

تمرین سری چهارم درس مکانیک تحلیلی ۲ - بهار ۹۸
دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف
تاریخ تحویل: شنبه ۳۱ فروردین ماه ۱۳۹۷

- لطفا جواب تمرین را اسکن و به آدرس ایمیل TA.baghram.1@gmail.com ارسال کنید.
- در عنوان ایمیل، نام درس، شماره دانشجویی و شماره سری تمرین را لحاظ بفرمایید.

(۱) مرکز جرم اجرام زیر را محاسبه کنید:

الف) مخروطی یکنواخت با ارتفاع h و شعاع قاعده r

ب) مرکز جرم سیم یکنواختی که کمانی به زاویه α را در بر می‌گیرد.

ج) مرکز جرم نیم کره به شعاع R که چگالی آن از رابطه $\rho = a - b * r$ پیروی می‌کند ($a > bR$)

د) مرکز جرم مثلث متساوی الساقین با چگالی سطحی یکنواخت

(۲) طناب صافی در بالای حفره ای در یک میز قرار دارد. سرعت، شتاب خروج طناب (بر اثر کشش خود) از حفره را بر اساس فاصله انتهای طناب از میز محاسبه کنید.

(۳) سطح مقطع دیفرانسیلی $\sigma(\theta)$ و سطح مقطع کل σ_t را برای پراکندگی کشسان یک ذره از یک کره نفوذناپذیر محاسبه کنید، پتانسیل به صورت زیر است

$$U(r) = \begin{cases} 0 & r > a \\ \infty & r < a \end{cases}$$

(۴) در زمان صفر، یک ظرف خالی به جرم m حاوی جرم M ماسه می‌باشد. ظرف با یک فنر بدون وزن و با کشش ثابت T به دیواری متصل است. (زمین بدون اصطکاک است) طول اولیه فنر L و فاصله ظرف از دیوار X می‌باشد. اگر ماسه از ظرف با نرخ $\frac{dm}{dx} = \frac{M}{L}$ تخلیه گردد. الف) انرژی جنبشی ماسه داخل ظرف چقدر است و مقدار بیشینه آن چقدر است؟ ب) ممنتوم ظرف (ظرف و ماسه داخل آن) چقدر بوده و مقدار بیشینه آن چقدر است؟

(۵) فرض کنید که ابر از تعداد زیادی از قطرات معلق آب در هوا (که به صورت یکنواخت و در حال سکون است) تشکیل شده است. فرض کنید جریانی از قطرات باران از میان این ابر در حال بارش هستند (سقوط) بعد از مدت زمان طولانی شتاب این جریان باران چقدر است. (فرض کنید که جریان باران با برخورد به قطرات معلق آب در ابر آن را به خود جذب می کنند. همچنین فرض کنید کلیه قطرات باران کروی شکل هستند و از مقاومت هوا صرف نظر کنید)

(۶) مساله برخورد الاستیک دو توپ را در نظر بگیرید، بین آن دو اصطکاکی وجود ندارد، جرم کره ساکن m_1 و کره ی به جرم m_2 با پارامتر برخورد b و اندازه تکانه p_1 به سوی آن یکی دیگر پرتاب شده است، هر دو کره شعاع r دارند.

الف) زاویه ی انحراف m_1 از مسیر اولیه بر حسب b و چقدر خواهد بود؟

ب) سطح مقطع دیفرانسیلی را $\sigma(\theta)$ بدست آورید.

ج) در حالت برخورد رودرو $b = 0$ ، انرژی نهایی E ، m_1 را بدست آورید.

د) با تغییر دادن مقدار m_1 ، ماکسیمم E را بدست آورید، چه کسری از انرژی اولیه α در این حالت به m_1 داده شده است.

(۷) یک گاز یک بعدی محصور بین دو نقطه از فضا را در نظر بگیرید. که از n_1 ذره به جرم m_1 و n_2 ذره به جرم m_2 تشکیل شده است. قصد داریم با کمک اطلاعات ساده ای که در مورد مساله برخورد فراگرفته ایم اطلاعاتی در مورد خواص آماری این گاز پیدا کنیم.

تابع توزیع اینکه اگر یک ذره m_i که در اینجا $i = 1, 2$ را انتخاب کنیم سرعتش بین v تا $v + dv$ باشد عبارت است از: $p_i(v)dv$ توقع داریم در حالت تعادل سیستم با وجود برخوردهای متعدد میان ذرات مختلف، این تابع های توزیع (p_i) تغییر نکنند.

الف) یک برخورد میان ذره های m_1 و m_2 در نظر بگیرید که یکی از آن دو اندازه سرعت v_1 و دیگری اندازه سرعت v_2 دارد. اندازه سرعت هر دوی این ذرات پس از برخورد را پیدا کنید. تابع توزیع $p_1(v)$ این سیستم با رخ دادن چنین برخوردی چگونه تغییر می کند؟

ب) مشابه قسمت قبل عمل کنید اما برخورد را این بار میان دو ذره m_1 و m_2 با سرعت های دلخواه در نظر بگیرید. برای این که پس از این برخورد توابع توزیع (p_i) ثابت بمانند، معادله ای (انتگرالی) برای آن ها بدست آورید.

راهنمایی: فرض کنید یک برخورد رخ بدهد:

ب-۱) احتمال این که در این برخورد سرعت ذره ی نوع ۱: v_1 و سرعت ذره ی نوع ۲: v_2 باشد چقدر است؟

ب-۲) رخ دادن این برخورد باعث می شود $\epsilon = p_1(v_1) - p_1(v_1')$ که $\epsilon = 1/n_1$ چون، یک ذره که پیش از برخورد سرعت v_1 داشته است، پس از برخورد دیگر از این گروه خارج شده است. اما از سویی این ذره، سرعت جدید v_1' پیدا کند که یعنی

$$p_1(v_1') \rightarrow p_1(v_1) + \epsilon$$

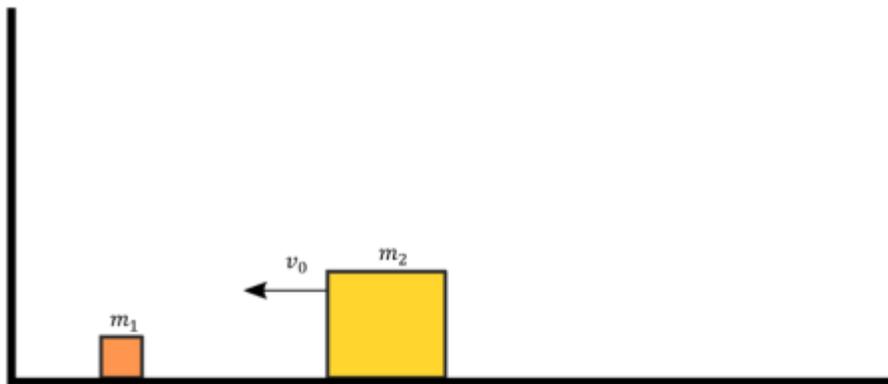
چون یک ذره به گروه سرعت های v_1' افزوده می شود. به این ترتیب یک جریان پیوسته میان تمام گروه سرعت ها داریم. با در نظر گرفتن اینکه انواع مختلف برخورد می تواند هر کدام با احتمالی که در قسمت ب-۱ حساب کردید بدست آورید پس از رخ دادن N برخورد کاملاً مستقل $p_1(v)$ به چه میزان زیاد و به چه میزان کم می شود؟ (چند ذره این گروه را ترک می کنند و چند ذره به این

گروه اضافه می‌شوند) این میزان را به صورت انتگرالی بیان کنید چون $(N \gg 1)$. حال شرط اینکه $p_1(v)$ پس از تمام این برخوردها تغییر نکند را به صورت یک معادله‌ی انتگرالی بیان کنید.

۸) این ویدئو در یوتیوب را تماشا کنید:

<https://www.youtube.com/watch?v=HEfHFsfGXjs>

در این ویدئو یک مساله بسیار جذاب مطرح می‌شود. شکل زیر را در نظر بگیرید.



جرم m_1 در ابتدا ساکن است و جرم m_2 با سرعت اولیه به سمت آن حرکت می‌کند. تمام برخوردها کشسان است و هیچ اصطکاکی وجود ندارد. پس از برخوردهای متعدد میان جرم m_1 و m_2 یا میان m_1 و دیوار سمت چپ، جرم m_2 بازی را به سمت بی‌نهایت سمت راست ترک می‌کند و دیگر هیچ برخوردی صورت نمی‌گیرد. تعداد کل برخوردها را N بنامید.

در این ویدئو گفته می‌شود: اگر $m_1 = 1\text{kg}$ و $m_2 = 100^{a-1}\text{kg}$ باشد آن گاه تعداد کل برخوردهای صورت گرفته (میان دو جرم یا جرم m_1 با دیوار)، برابر a رقم اول عدد π است! که یعنی مثلاً:

- اگر $m_1 = 1\text{kg}$ و $m_2 = 1\text{kg}$ تعداد کل برخوردها $N = 3$ است.
- اگر $m_1 = 1\text{kg}$ و $m_2 = 100\text{kg}$ تعداد کل برخوردها $N = 31$ است.
- اگر $m_1 = 1\text{kg}$ و $m_2 = 10,000\text{kg}$ تعداد کل برخوردها $N = 314$ است.
- ...

حال شما به طور دقیق این مساله را حل کنید و نتیجه را اثبات کنید.

با آرزوی موفقیت و سالی خوش!