الکترومغناطیس ۱

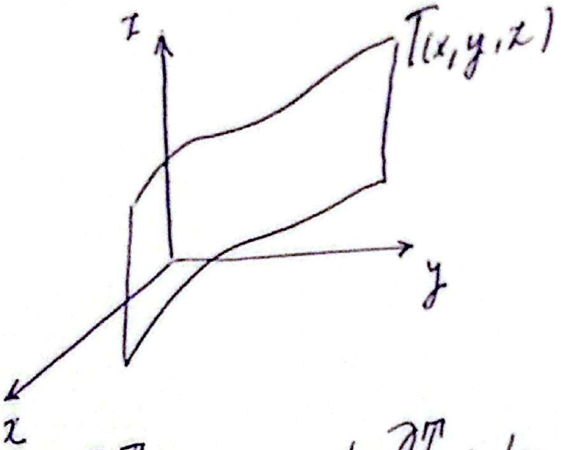
حسابان بی‌نهایت خرد

Differential Calculus

تابع یک متغیره $f = f(x)$ را در نظر می‌گیریم. تغییر این تابع به ازای جابه‌جایی متغیر x به صورت زیر است

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right) dx \quad , \quad \frac{df}{dx} :$$ شیب این تابع است

تعمیم این مفهوم برای تابعی که در فضای ۳ بعدی قرار دارد، مفهوم گرادیان - Gradient بوجود خواهد آمد



سؤال این است که با حرکت در هر جهت تابع چقدر تغییر می‌کند

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) dz$$

dx، dy، dz جابه‌جایی بی‌نهایت خرد infinitesimal در هر جهت است.

تغییر dT را به صورت زیر می‌توان بازنویسی کرد.

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{z}\right) \cdot \underbrace{\left(dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}\right)}_{d\vec{l}}$$

المان بی‌نهایت خرد جابه‌جایی $d\vec{l}$

$$d\vec{l} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$$

حال تعریف می کنیم

$$\vec{\nabla} T \equiv \frac{\partial T}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{z}$$

$\downarrow$

gradient of T

$\vec{\nabla}$ یک عملگر است که روی T عمل می کند. $\vec{\nabla} T$ یک بردار است.

مثال: تابع $T = T(x,y,z) = x^2 + xy + zx^2$ را درنظر بگیرید، گرادیان این تابع را محاسبه کنید

$$\vec{\nabla} T = (2x + y + 2zx)\hat{x} + x\hat{y} + x^2\hat{z}$$

برای درک هندسی مفهوم گرادیان از تعریف زیر استفاده می کنیم

$$dT = \vec{\nabla} T \cdot d\vec{l} = |\vec{\nabla} T||d\vec{l}|\cos\theta$$

θ زاویه بین المان $d\vec{l}$ و بردار $\vec{\nabla} T$ است. $|d\vec{l}|$ را ثابت درنظر بگیرید و θ را تغییر دهید.

بیشترین تغییر در زاویه $\theta = 0$ است

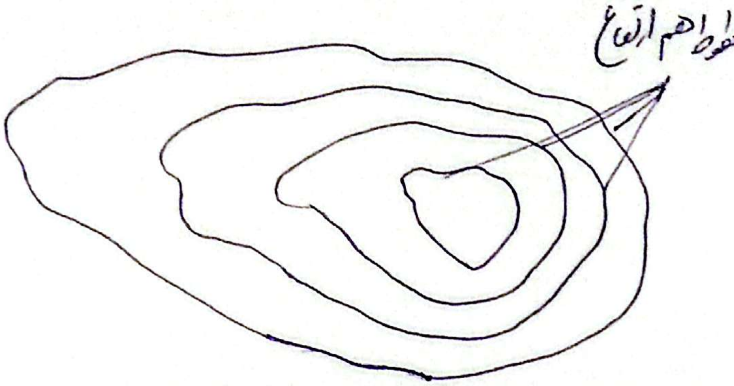
$$dT\Big|_{Max} = |\vec{\nabla} T|_{\theta=0}$$

گرادیان $\vec{\nabla} T$ در جهت است که بیشترین تغییر را برای تابع T دارد.

اندازه $|\vec{\nabla} T|$، شیب (آهنگ تغییر) را در جهت بیشینه تغییرات را نشان می دهد.

درنقشه های توپوگرافی، از خطوط هم ارتفاع درنقشه ها استفاده می کنند

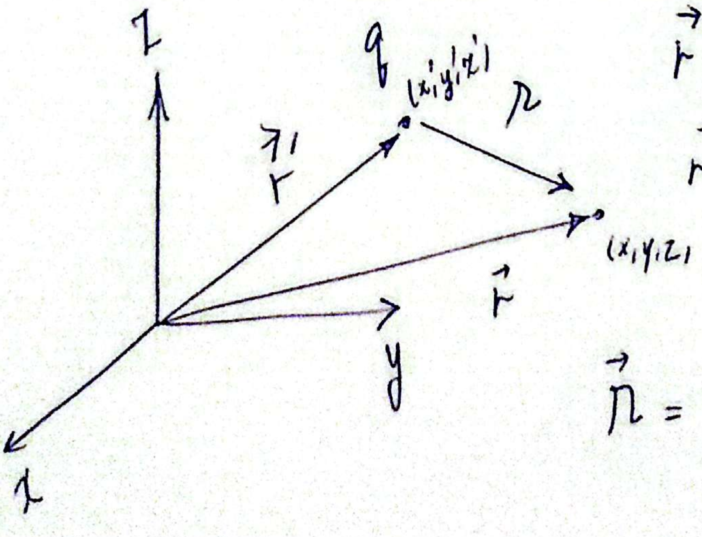
گرادیان عمود بر خطوط هم ارتفاع contour lines است.



نقاطی که بر روی خطوط هم ارتفاع هستند، گرادیان عمود دارند. اگر تصویر فوق نقشه ارتفاع کوهستان باشد معنای آن این است که صعود به قله از سمت راست دشوارتر است، به دلیل نزدیکی خطوط هم ارتفاع گرادیان بیشتر است. صعود به قله از سمت چپ به خاطر تغییرات آرام‌تر آسان‌تر است

مثال دیگری از contour line ها می‌تواند خطوط شدت تابش پرتو ایکس از تصویر یک خوشه کهکشانی باشد.

تمرین: فرض کنید بردار $\vec{\mathscr{r}}$، بردار متصل کننده بار به نقطه‌ای که میدان را اندازه‌گیری می‌کنیم به صورت شکل زیر باشد.



$\vec{r}' : (x', y', z')$ موقعیت بار q

$\vec{r} : (x, y, z)$ موقعیت نقطه‌ای که میدان را اندازه‌گیری می‌کنیم.

$$\vec{\mathscr{r}} = \vec{r} - \vec{r}'$$

تست ها را بررسی کنید:

a) $\vec{\nabla}(\mathscr{r}^2) = ?$

$$\vec{\mathscr{r}} = (x-x')\hat{x} + (y-y')\hat{y} + (z-z')\hat{z}$$

$$\mathscr{r} = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

$$\vec{\nabla}\mathscr{r}^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]\hat{y}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]\hat{z}$$

$$= 2(x-x')\hat{x} + 2(y-y')\hat{y} + 2(z-z')\hat{z} = 2\vec{\mathscr{r}}$$

توجه کنید که گرادیان از یک اسکالر به ما یک بردار می دهد.

b) $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-1/2}\hat{x}$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}[\dots]^{-1/2}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}[\dots]^{-1/2}\hat{z}$$

داخلش را شما...

$$= -\frac{1}{2}2(x-x')\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')\right]^{-3/2}\hat{x}$$

$$-\frac{1}{2}2(y-y')[\dots]^{-3/2}\hat{y} - \frac{1}{2}2(z-z')[\dots]^{-3/2}\hat{z}$$

$$= -\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')\right]^{-3/2}\left\{(x-x')\hat{x} + (y-y')\hat{y} + (z-z')\hat{z}\right]$$

$$= -\frac{1}{\mathscr{r}^3}\vec{\mathscr{r}} = -\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}$$

c) $\vec{\nabla}(r^n) = ?$

ابتدا مولفه x را حساب می‌کنیم

$$\frac{\partial}{\partial x} r^n = n r^{n-1} \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$= n r^{n-1}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{r} 2 r_x\right) = n r^{n-1} \hat{r}_x$$

با تعمیم به مولفه‌های y , z خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla}(r^n) = n r^{n-1} \hat{r}$$

اپراتور $\vec{\nabla}$ Del که به صورت زیر تعریف شد توسط ویلیام روان همیلتون (1805-1865) استفاده شد

$$\vec{\nabla} \equiv \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

نماد ∇ (nabla یا Del) توسط P.G Tait (1831-1901) معرفی شد.

این اپراتور بر روی اسکالر اثر کرده، یک بردار را به دست می‌دهد که به آن گرادیان گفتیم.

این اپراتور می‌تواند بر روی یک بردار عمل کند. این عمل می‌تواند به صورت div . یا ضرب خارجی x ، Curl محسوب می‌شود.

$\vec{\nabla} T$ gradient

$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ divergence

$\vec{\nabla} \times \vec{v}$ curl

دیورژانس : The Divergence

تعریف دیورژانس را به صورت زیر داریم

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(v_x\hat{x}+v_y\hat{y}+v_z\hat{z}\right)=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

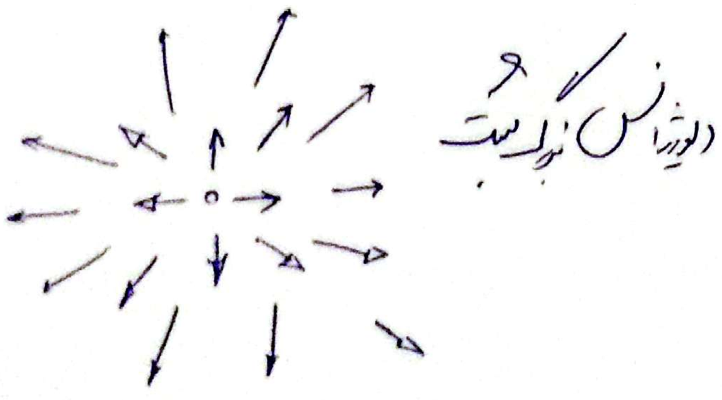
عملگر Del بر روی یک بردار عمل کرده، خروجی آن یک اسکالر است.

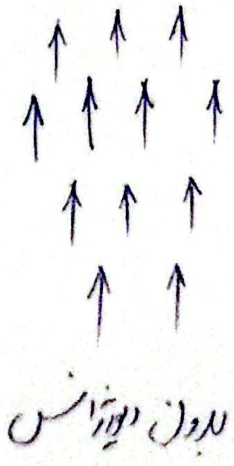
برای تعبیر هندسی دیورژانس فرض کنید که یک میدان برداری به شکل زیر داشته باشیم

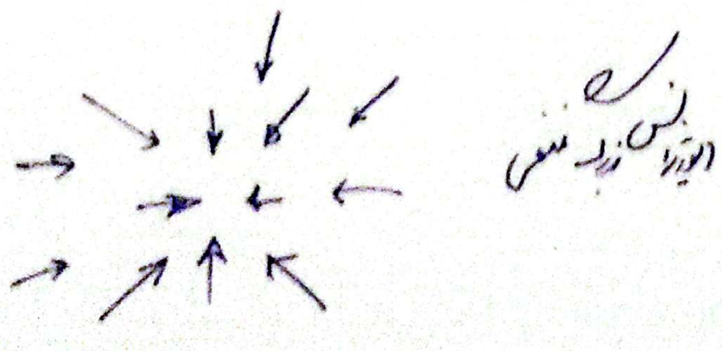
$$\vec{v}(x,y,z)=v_x(x,y,z)\,\hat{x}+v_y(x,y,z)\,\hat{y}+v_z(x,y,z)\,\hat{z}$$

دیورژانس نشان می‌دهد که بردار $\vec{v}$ چقدر پراکنده (واگرا - spreads out) می‌شود

به طور مثال:





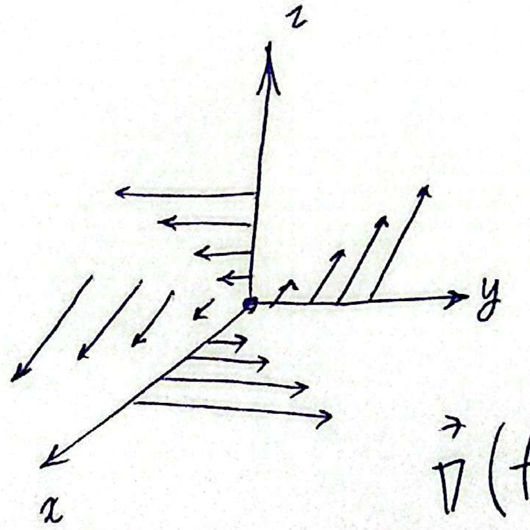


کرل : Curl

اپراتور nabla به صورت ضرب خارجی بر روی یک بردار عمل می کند. تعریف به صورت زیر است

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \hat{x}\left(\frac{\partial}{\partial y} v_z - \frac{\partial}{\partial z} v_y\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial}{\partial z} v_x - \frac{\partial}{\partial x} v_z\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial}{\partial x} v_y - \frac{\partial}{\partial y} v_x\right)$$

تعبیر هندسی اپراتور کرل آن است که میزان چرخش یک بردار را حول یک نقطه نشان می دهد.



Curl positive

قوانین ضرب به صورت زیر است

$$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$$ f , g اسکالر

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

گرادیان، دیورژانس، کرل اسکالرها و بردارها را می‌توان به صورت زیر تقسیم بندی کرد.

الف ۱) ضرب اسکالر دو بردار $\quad \vec{A}\cdot\vec{B} \quad , \quad fg \quad$ دو نوع اسکالر

الف ۲) ضرب خارجی دو بردار $\quad \vec{A}\times\vec{B} \quad , \quad f\vec{A} \quad$ بردار

برای اسکالر، گرادیان داریم.

$$\text{(i)} \quad \vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$$

$$\text{(ii)} \quad \vec{\nabla}(\underbrace{\vec{A}\cdot\vec{B}}_{\text{اسکالر}}) = \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$$

حال برای دو بردار الف ۲ داریم.

$$\text{(iii)} \quad \vec{\nabla}\cdot(f\vec{A}) = f\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}f)$$

$$\text{(iv)} \quad \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

به همین ترتیب می‌توان کرل بردارهای الف ۲ را حساب کرد.

$$\text{(v)} \quad \vec{\nabla}\times(f\vec{A}) = f\,\vec{\nabla}\times\vec{A} - \vec{A}\times(\vec{\nabla}f)$$

$$\text{(vi)} \quad \vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$$

به عنوان مثال یکی از ساده‌ترین اتحادها را اثبات می‌کنیم، مابقی به عنوان تمرین می‌توان بررسی کرد.

$$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{A}) = \frac{\partial}{\partial x}(fA_x) + \frac{\partial}{\partial y}(fA_y) + \frac{\partial}{\partial z}(fA_z)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}A_x + f\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}A_y + f\frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}A_z + f\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}\right)\cdot\left(A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}\right)$$

$$+ f\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$

$$= (\vec{\nabla}f)\cdot\vec{A} + f\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

برای تکمیل بحث، اتحادهای مربوط به تقسیم را نیز در ذیل می‌آوریم.

$$\vec{\nabla}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\vec{\nabla}f - f\vec{\nabla}g}{g^2}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{A}}{g}\right) = \frac{g\vec{\nabla}\cdot\vec{A} - \vec{A}\cdot\vec{\nabla}g}{g^2}$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{A}}{g}\right) = \frac{g(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + \vec{A}\times\vec{\nabla}g}{g^2}$$

مشتق های مرتبه دوم

گرادیان اسکالر $\vec{\nabla} T$ خود بردار است. از این رو می توان دیورژانس و کرل آن را محاسبه کرد.

1: Divergence of gradient $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} T)$

2: Curl of gradient $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla} T)$

دیورژانس یک بردار $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$ اسکالر است. از یک اسکالر فقط می توان گرادیان حساب کرد

3: gradient of divergence $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})$

کرل یک بردار $\vec{\nabla}\times\vec{v}$، بردار است. از یک بردار می توان دیورژانس و کرل گرفت

4. Divergence of curl $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{v})$

5. Curl of curl $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v})$

مورد اول دیورژانس گرادیان خود نام مجزا لاپلاسی Laplacian است
که با نماد $\nabla^2 T$ نشان داده می شود.

$$\nabla^2 T = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} T) = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{z}\right) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

نکته جالب این است که از یک بردار نیز می‌توان لاپلاسی گرفت

$$\nabla^2 \vec{v} = (\nabla^2 v_x)\hat{x} + (\nabla^2 v_y)\hat{y} + (\nabla^2 v_z)\hat{z}$$

دومین مورد کرل گرادیان است که صفر است.

2. Curl of gradient $\equiv$ zero

اثبات:

$$\left(\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}T)\right)_i = \epsilon_{ijk}\,\partial_j\,\partial_k T = 0$$

پادمتقارن تحت تبدیل j , k

متقارن تحت تبدیل j , k

جالب است بدانید که در الکترواستاتیک، کرل میدان الکتریکی صفر است. از این رو می‌توان میدان الکتریکی را برحسب گرادیان یک میدان اسکالر نوشت چون کرل گرادیان صفر است.

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \ \text{(electrostatic)} \longrightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

میدان اسکالر

3. درمورد سوم گرادیان دیورژانس اسم خاصی ندارد و می‌تواند غیر صفر باشد

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})$$

مورد چهارم: دیورژانس کرل صفر است

Divergence of Curl $\equiv 0$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{V})=0$$

اثبات $\quad \partial_i(\vec{\nabla}\times\vec{V})_i=\partial_i\epsilon_{ijk}\partial_j V_k=\epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j V_k=0$

پادمتقارن تحت تبدیل i-j

متقارن بین جابجایی

مورد پنجم: کرل کرل است که آن را اثبات می‌کنیم.

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{V})-\nabla^2 V$$

$$\left(\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})\right)_i=\epsilon_{ijk}\partial_j(\vec{\nabla}\times\vec{V})_k=\epsilon_{ijk}\partial_j\epsilon_{kmn}\partial_m V_n$$

$$=\epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn}\partial_j\partial_m V_n=(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm})\partial_j\partial_m V_n$$

اندیس تکراری

$$=\delta_{im}\delta_{jn}\partial_j\partial_m V_n-\delta_{in}\delta_{jm}\partial_j\partial_m V_n$$

$$=\partial_j\partial_i V_j-\partial_j\partial_j V_i=\partial_i(\partial_j V_j)-\partial^2 V_i$$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$

صفحه ۳ $\Rightarrow \quad =\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{V})-\nabla^2\vec{V}$

پایان درس نه