Potentials :

هدف اصلی الکترواستاتیک پیدا کردن میدان الکتریکی یک توزیع بار است.

Coloumb's law :
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\hat{\imath}}{\imath^2}\rho(r')d\tau'$$

استفاده از این انتگرال به جز موارد خاص دشوار است! از این رو از تقارن‌ها استفاده از (قانون گاوس) می‌توان استفاده کرد. البته ایده بهتر استفاده از پتانسیل است

However, a better strategy is to calculate potential

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{1}{\imath}\rho(\vec{r}')d\tau'$$

حتی این انتگرال نیز ممکن است دشوار باشد، به خصوص در ارتباط با مسئله‌هایی که بارها در جای خود ثابت نیستند فقط شرایط مرزی را داریم

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi & \text{Electrostatic} \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \end{cases}$$

so $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow -\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Poisson Equation : $\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ + with appropri[t]e boundry condition!

laplace Equation: $\nabla^2\varphi = 0$
charges are elsewhere.

2. $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$ Cartesian Coordinate

این معادله در گرانش، الکترواستاتیک و انتقال گرما استفاده می‌شود.

- gravitation!
- Electrostatic!
- Heat transfer!

جواب معادله لاپلاس در 1D خط است.

Laplace eq. in 1D: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \rightarrow \boxed{\varphi = mx + b}$

1. $\varphi(x)$ is the average of $V(x+a)$ and $V(x-a)$ for any a

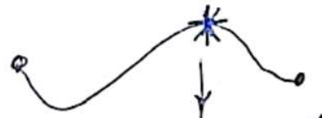
$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+a) + \varphi(x-a)\right]$$

جواب معادله لاپلاس همواره میانگین است.

laplace equation is kind of averaging instruction.

2. laplace equation tolerates no local maxima or minima.

نتیجه ویژگی 1 است.



Higher than average of neighbors!

EXTREME VALUES OF $V(\varphi)$ must occur @ end-points.

در نقاط ابتدایی و انتهایی مشتق دوم منفی یا مثبت است.

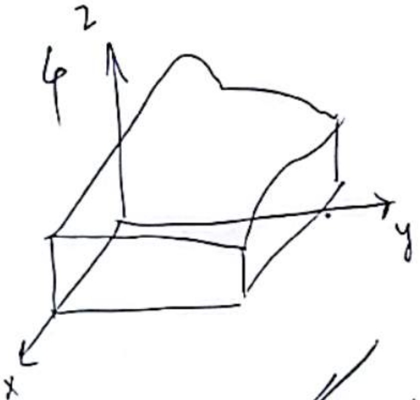
صفر بودن مشتق دوم کمک می‌کند به نداشتن minima, maxima اصلاً نداشته باشند.

Project: Mathematical Charactristics of Laplace equation!

3. laplace equation in 2D :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \qquad \underline{\text{PDE}}$$

جواب معادله دیفرانسیل جزئی رو در نقطه دو ثابت ندارد



1. Value of φ at a point (x,y) is the average of those around the point.

$$\boxed{\varphi(x,y) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{Circle} \varphi \, dl}$$

Method of relaxation!

- جواب میانگین برای ۲ بعد نیز برقرار است.

2. φ has no local maxima or minima! All extrems occur on boundry.

- جواب معادله لاپلاس بیشینه یا کمینه موضعی ندارد و نقاط اکسترمم در مرزها است.

Harmonic functions in 2D minimizes the surface area spanning the given boundry line!

□ laplace Equation in 3D :

حال به بررسی ویژگی های معادله لاپلاس در ۳ بعد می پردازیم. مهم ترین ویژگی در ۳ بعد نیز آن است که پتانسیل هر نقطه با میانگین پتانسیل کره به شعاع R برابر است.

4, 1. The value of φ at point $\vec{r}$ is the average value of φ over a spherical radius R centered at $\vec{r}$.

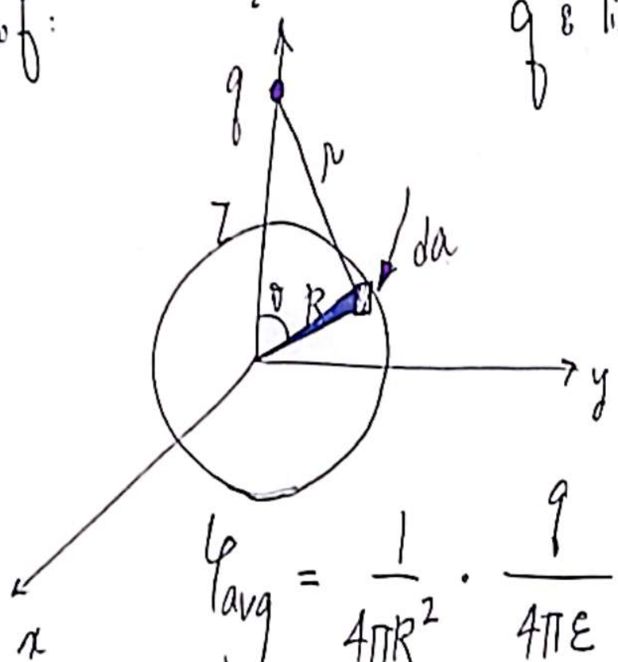
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{\text{sphere}} \varphi \, da$$

پتانسیل در مرکز کره را مجموعی بارها (توزیع بارها)
برابر است با میانگین پتانسیل های روی کره !

2. As a consequence φ can have no local maxima or minima; extereme value of φ must occur @ boundries.

اثبات هم:

Proof:



q: lies in z-direction,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$$

پتانسیل حاصل از بار روی سطح کره به شعاع R

$$r^2 = z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta$$

$$\varphi_{avg} = \frac{1}{4\pi R^2} \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int \left[z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta\right]^{-\frac{1}{2}} \underbrace{R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}_{\text{المان سطح}}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2zR} \sqrt{z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta} \Bigg|_0^{\pi} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2zR} \left[(z+R) - (z-R)\right]$$

$$= \underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z}}_{\text{پتانسیل بار در مرکز کره.}}$$

by superposition goes to (all) any collection of charge.

Boundry Condition & Uniqueness Theorem :

یکتایی جواب
و شرایط مرزی :

1 جواب معادله لاپلاس در حجم V به‌طور یکتا مشخص می‌شود،
درصورتی که در مرز S، شرایط مرزی معلوم باشد

* مرز می‌تواند در بی‌نهایت باشد، V را صفر در نظر بگیریم.

فرض کنید برای معادله لاپلاس ۲ پاسخ داشته باشیم

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0 \qquad \nabla^2 \varphi_2 = 0$$: Two solution

هر دو مقدار روی S مشخص داشته باشند.

$\varphi_3 \equiv \varphi_1 - \varphi_2$, THIS OBEY'S LAPLACE EQEATION.

φ_3 نیز در معادله لاپلاس صدق می‌کند $\quad \nabla^2 \varphi_3 = \nabla^2 \varphi_1 - \nabla^2 \varphi_2 = 0$

laplace equation allows no local maxima or minima

all exterma occu on boundry.

$\varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$! در مرز ، φ_3 must be zero everywhere

$$\varphi_1 = \varphi_2 \ !$$

از آن‌جا که معادله لاپلاس اجازه ماکسیمم و مینیمم را بجز در مرز نمی‌دهد، و از آن‌جایی که
φ_1 ، φ_2 در مرز مشخص اند. پس φ_3 برابر صفر خواهد بود و طبق گزاره فوق همواره صفر است.

تئوری ارنشاو Earnshaw's theorem

یک بار الکتریکی، تنها با نیروی الکترواستاتیک نمی‌تواند در حال تعادل باشد.

دلیل این امر این است که انرژی پتانسیل الکتریکی $q\varphi$ است و برای تعادل پایدار φ باید نقطه کمینه باشد ولی جواب معادله لاپلاس کمینه را قبول نمی‌کند از این رو نقطه تعادل ناپایدار از جنس saddle-point است.

جواب معادله لاپلاس را در مختصات کروی و استوانه‌ای به گونه‌ای که بستگی فقط به r و s داشته باشد را بیابید.

در مختصات کروی داریم:

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = 0$$

در نتیجه

$$r^2\frac{d\varphi}{dr} = cte = \text{ثابت} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dr} = \frac{c}{r^2}$$

$$\boxed{\varphi = -\frac{c}{r} + K}$$

در مختصات استوانه‌ای

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(s\frac{d\varphi}{ds}\right) = 0$$

$$\Rightarrow s\frac{d\varphi}{ds} = \underset{\text{ثابت}}{\underbrace{C}} \Rightarrow \frac{d\varphi}{ds} = \frac{c}{s} \Rightarrow \varphi = c\ln s + K$$

قضیه یکتایی معادله لاپلاس بسیار مهم در الکتریسیته است.

مهم نیست به چه روشی، فقط کفایت می‌کند که حل معادله لاپلاس را بیابیم به شکلی که

شرایط مرزی را ارضا کند. در این صورت جواب پیدا شده پاسخ صحیح است.

در مورد قضیه یکتایی، برای معادله پواسون (حضور بار الکتریکی) نیز قضیه یکتایی قابل استفاده است

فرض کنید دو تابع φ_1 و φ_2 در معادله پواسون به شکل زیر پاسخ باشند

$$\nabla^2 \varphi_1 = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \quad , \quad \nabla^2 \varphi_2 = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

در نتیجه

$$\nabla^2 \varphi_3 = \nabla^2 \varphi_1 - \nabla^2 \varphi_2 = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho + \frac{1}{\epsilon_0}\rho = 0$$

بار دیگر $\varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2$ جواب معادله لاپلاس است و مقدار آن در مرز

صفر است در نتیجه در همه جا صفر است، در این صورت $\varphi_3 = 0$، از این رو $\varphi_1 = \varphi_2$

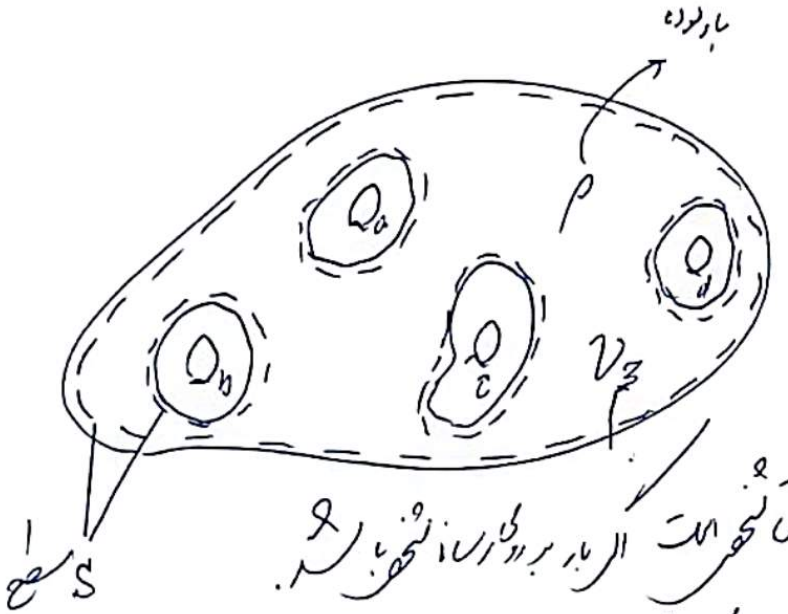
رساناها و دومین قضیه یکتایی

در مسائل الکتروستاتیکی که بررسی می‌کنیم، گاهی پیکربندی وجود دارد که مجموعه‌ای از رساناها

در محیطی قرار دارند که بار ρ نیز در آن وجود دارد. اگر پتانسیل رساناها

مشخص باشد که مسئله را با استفاده از روش پیشین محاسبه می‌کنیم ولی اگر رساناها دارای

بار مشخص باشند کمی باید دقت کرد.



نتیجه: میدان الکتریکی در پیکربندی فوق مشخص است اگر بار بر روی رساناها مشخص باشد.

برای اثبات فرض می‌کنیم دو میدان الکتریکی $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ وجود دارد که در قانون گاوس صدق می‌کند

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_1 = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}_2 = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

و همه رساناها در قانون گاوس انتگرالی صدق می‌کند.

$$\oint_{\text{سطح دربرگیرنده رسانای } i} \vec{E}_1\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0}Q_i \quad ; \quad \oint_{\text{سطح دربرگیرنده رسانای } i} \vec{E}_2\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0}Q_i$$

و همچنین از سطح بزرگی که همه بارها را دربرگیرد داریم

$$\oint_{\text{سطح خارجی دربرگیرنده همه بارها}} \vec{E}_1\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0}Q_{tot} \qquad \oint_{\text{سطح خارجی دربرگیرنده همه بارها}} \vec{E}_2\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0}Q_{tot}$$

9/

با استفاده از تکنیک همشکلی میدان اختلاف را محاسبه می کنیم

$$\vec{E}_3 \equiv \vec{E}_1 - \vec{E}_2 \quad \text{که} \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}_3 = 0$$

برای هر سطح باشد $\oint \vec{E}_3 \cdot d\vec{a} = 0$

نکته پایه در اینجا آن است که می دانیم φ_3 بر روی سطح رسانا ثابت است در رساناها سطوح هم پتانسیل هستند البته نه لزوما برابر بر روی هر رسانا.

برای پاسخ به این سوال از اتحاد زیر استفاده می کنیم.

$$\vec{\nabla}\cdot(\varphi_3 \vec{E}_3) = \underbrace{\varphi_3\, \vec{\nabla}\cdot\vec{E}_3}_{\text{طبق رابطه فوق } 0} + \vec{E}_3\cdot(\underbrace{\vec{\nabla}\varphi_3}_{\text{طبق تعریف برابر } -\vec{E}_3}) = -(E_3)^2$$

با انتگرال گیری روی حجم v با استفاده از قانون گاوس داریم

$$\int_v \vec{\nabla}\cdot(\varphi_3 \vec{E}_3)\, d\tau = \oint_S \varphi_3 \vec{E}_3 \cdot d\vec{a} = -\int_v (E_3)^2\, d\tau$$

انتگرال روی کل سطوح: همه رساناها هم سطح خارجی

$$\overset{\text{ثابت}}{=} \varphi_3 \oint \vec{E}_3 \cdot d\vec{a} = 0$$

φ_3 ثابت است از انتگرال * خارج شده در رابطه

از این رو $\int_v (E_3)^2\, d\tau = 0$ در نتیجه $\vec{E}_3 = 0$ در کل فضا است