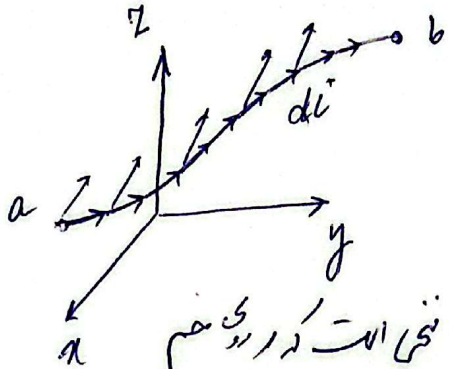
الکتروستاتیک جلسه ۱

در این مقدمات ریاضی از این الکترومغناطیس، نیاز به اجرای انتگرال‌های روی خطی، صفحه و حجم داریم.

به عنوان مثال انتگرال رو به رو، انتگرال بر روی یک خطی از a و b است

$$\int_a^b \vec{v} \cdot d\vec{l}$$



$d\vec{l}$ بردار جابه‌جایی خرد بر روی خطی است که بر روی هم تعریف شده است. $\vec{v} \cdot d\vec{l}$ تصویر بردار $\vec{v}$ را بر روی خم می‌دهد. انتگرال می‌تواند بر روی خم بسته هم بسته شود.

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

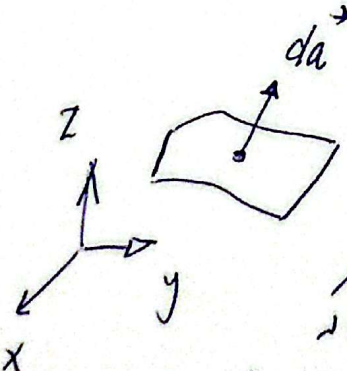
Closed loop

در نیروهای کمیت‌هایی که مقدار انتگرال آن بر روی خطی تنها به نقاط ابتدا و انتهای مسیر بستگی دارد هم است. به این کمیت‌ها، کمیت‌های پایستار Conservative می‌گویند.

تا کنون کار و تعریف انرژی پایستار؟

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

انتگرال روی سطح نیز به صورت زیر است.

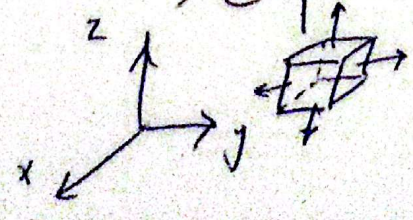


$$\int_S \vec{v} \cdot d\vec{a}$$

$d\vec{a}$ بردار سطح به این صورت تعریف می‌شود که اندازه آن مساحت سطح و جهت آن عموماً بردار نرمال سطح است.

انتگرال روی سطح بسته، روی انتخاب حجم سطح بر می‌گردد.

$$\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{a}$$



قضیه اساسی حساب / The Fundamental Theorem of Calculus

در این درس اهمیت بسیاری دارد به شرح زیر در ساده‌ترین شکل آن بیان می‌شود.

$$\int_a^b \left(\frac{df}{dx}\right) dx = f(b) - f(a)$$

انتگرال مشتق یک تابع توسط مقادیر آن تابع در ابتدا و انتهای بازه (مرزها) داده می‌شود.

قضیه اساسی حساب برای گرادیان به شرح زیر است.

$$\int_a^b (\vec{\nabla} T) \cdot d\vec{l} = T(b) - T(a)$$

- مستقل از مسیری است که از a به b می‌رود

قضیه ۱ $\int_a^b (\vec{\nabla} T) \cdot d\vec{l}$

در روی یک مسیر بسته صفر است.

قضیه ۲ $\oint (\vec{\nabla} T) \cdot d\vec{l} = 0$

قضیه اساسی حساب برای دیورژانس به شرح زیر است

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})\, d\tau = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{a}$$

انتگرال حجمی V — انتگرال سطحی S

سطح S، مرز حجم V است.

- این قضیه، قضیه دیورژانس، گرین و یا گاوس نامیده می‌شود.

3- اگر تا سطح بسته کدام میدان تراکم ناپذیر شد $\oint \vec{v} \cdot d\vec{a}$ شار آن میدان است

قضیه گاوس تعبیر هندسی دارد:

$$\int_{V} (\text{چشمه‌ها و چاهک‌های حجم})\, dV = \oint_{S} (\text{شاری که از سطح دربرگیرنده حجم خارج می‌شود})\, dS$$

حجم V — سطح S

نظریه اساسی حساب درباره کرل‌ها:

Stokes theorem:
$$\int_{S} (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{a} = \oint_{C} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

S: سطح — C: مرز سطح (حلقه) boundry

نتیجه 1: $\int_{S} (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{a}$ انتگرال رویه‌ای تنها به مرز رویه دربرگیرنده سطح مرتبط است و ارتباطی با سطح ندارد.

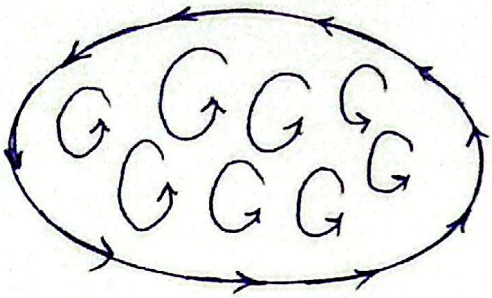
نتیجه 2: $\oint_{S} (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{a}$ انتگرال رویه‌ای بر هر سطح بسته‌ای صفر است.

تعبیر هندسی انتگرال کرل بر روی یک سطح بدین صورت قابل تصور است که سطوح تراز چرخشی داخل سطح یکدیگر را خنثی کرده و آنچه باقی می‌ماند برروی مرز سطح است.

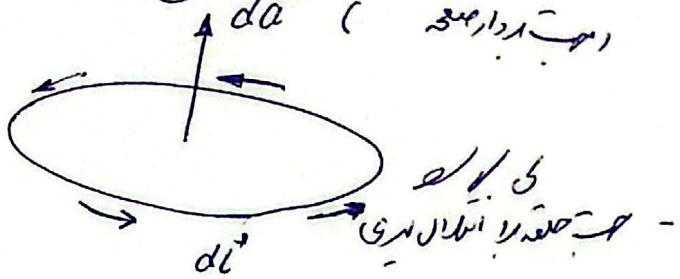
Powered by CamScanner

۴

طرح واره ای از انتگرال گیری روی یک سطح



نکته دارای تصویری آن است که جهت انتگرال گیری بسته به سطح S با قانون دست راست داده می شود



انتگرال جزء جزء قضیه اساسی حساب:

$$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{A}) = f\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{\nabla}f$$

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot(f\vec{A})\,d\tau = \int_V f(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\,d\tau + \int_V \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}f)\,d\tau = \oint_S f\vec{A}\cdot d\vec{a}$$

(قضیه گوس)

نتیجه:

$$\int_V f(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\,d\tau = \oint f\vec{A}\cdot d\vec{a} - \int_V \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}f)\,d\tau$$

Powered by CamScanner

دستگاه مختصات کروی:

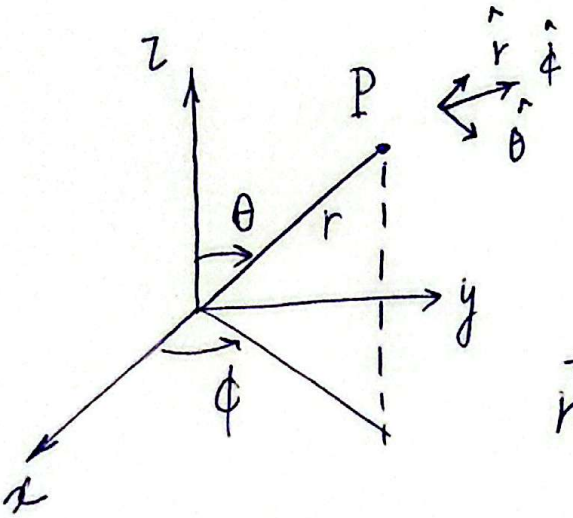
دستگاه مختصات کروی با سه مولفه (r, θ, ϕ) و ارتباط آن با مختصات دکارتی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi$$
$$z = r\cos\theta$$

θ زاویه قطبی — polar angle

ϕ زاویه سمتی — azimuthal angle.

$$\vec{A}_P = A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta} + A_\phi\hat{\phi}$$



بردارهای واحد پایه در دستگاه کروی را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$\vec{r} = r\sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + r\sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + r\cos\theta\,\hat{z}$$

$$\hat{r} \equiv \frac{d\vec{r}}{dr} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}$$

$$\hat{\theta} \equiv \frac{d\vec{r}}{|r|d\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z}$$

$$\hat{\phi} \equiv \frac{d\vec{r}}{\sin\theta|r|d\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}$$

نکته مهم این است که بردارهای پایه $\hat{r}$، $\hat{\theta}$، $\hat{\phi}$ بسته به موقعیت نقطه P تغییر می‌کنند از این رو در انتگرال گیری‌ها باید مراقب باشیم.

b/

هم چنین در مشتق گیری ها باید دقت کرد که بردار پایه ثابت نیستند به طور مثال:

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} \equiv \cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{z} = \hat{\theta}$$

که نشان می دهد بردارهای پایه هم تغییر می کنند به طور مثال:

$$\hat{r}\cdot\hat{\theta} = (\sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{z}) \cdot (\cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{z})$$

$$= \sin\theta\cos\theta\cos^2\phi + \sin\theta\cos\theta\sin^2\phi - \cos\theta\sin\theta$$

$$= \sin\theta\cos\theta\underbrace{(\cos^2\phi + \sin^2\phi)}_{1} - \cos\theta\sin\theta = 0$$

$$\hat{\theta}\cdot\hat{\phi} = (\cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{z}) \cdot (-\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{j})$$

$$= -\cos\theta\cos\phi\sin\phi + \cos\theta\sin\phi\cos\phi = 0$$

هم چنین طول بردارهای پایه واحد است. به طور مثال

$$\hat{\theta}\cdot\hat{\theta} = (\cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{z}) \cdot (\cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{z})$$

$$= \cos^2\theta\cos^2\phi + \cos^2\theta\sin^2\phi + \sin^2\theta$$

$$= \cos^2\theta\underbrace{(\cos^2\phi + \sin^2\phi)}_{1} + \sin^2\theta = 1.$$

Powered by CamScanner

در ادامه بحث تحصیلات کروی، المان طول در این مختصات به صورت زیر است.

$$d\vec{l} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi}$$

المان طول در مختصات کروی

$$dl_r = dr \qquad dl_\theta = r\,d\theta \qquad dl_\phi = r\sin\theta\,d\phi$$

در نتیجه المان حجم در این مختصات به شکل زیر است

$$d\tau = dl_r\,dl_\theta\,dl_\phi = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

- اگر بخواهیم سطح تک کره به شعاع r را حساب کنیم

$$da_{\text{سطح کره}} = dl_\theta\,dl_\phi\,\hat{r} = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,\hat{r}$$

ثابت

- اگر بخواهیم سطح را در صفحه x-y ($\theta = \frac{\pi}{2}$) حساب کنیم

$$da_{x-y} = dl_r\,dl_\phi\,\hat{\theta} = r\,dr\,d\phi\,\hat{\theta}$$

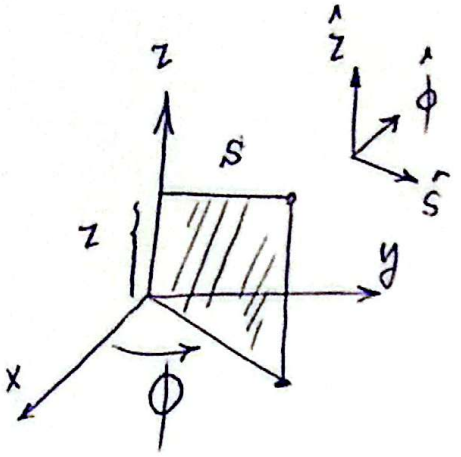
- در حل حجم و انتگرال در مختصات کروی به شرح زیر است.

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi}$$

شعاع r — زاویه سمتی ϕ — زاویه قطبی θ

- در انتگرال دوبل، انتگرال در مختصات کروی سعادت است که به آن ها خواهیم گفت.

مختصات استوانه‌ای Cylindrical Coordinate



برای نقطه P با مختصات (s, ϕ, z) مطابق شکل

در دستگاه استوانه‌ای و ارتباط آن با دستگاه دکارتی بصورت است از

$$\begin{cases} x = s(\cos\phi) \\ y = s(\sin\phi) \\ z = z \end{cases}$$

بردارهای پایه در مختصات استوانه‌ای به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\hat{s} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}$$

$$\hat{\phi} = \frac{d\vec{r}}{s\,d\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}$$

$$\hat{z} = \frac{d\vec{r}}{dz} = \hat{z}$$

همان طور که دیده می‌شود بردارهای پایه یکه بوده و طول واحد دارند. به طور مثال

$$\hat{s}\cdot\hat{\phi} = (\cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y})\cdot(-\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y})$$

$$= -\cos\phi\sin\phi + \sin\phi\cos\phi = 0$$

$$\hat{\phi}\cdot\hat{\phi} = (-\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y})\cdot(-\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y})$$

$$= \sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$$

Powered by CamScanner

المان طول در مختصات استوانه‌ای برابر است با

$$d\vec{l} = ds\,\hat{s} + s\,d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z}$$

المان حجم این مختصات برابر است با

$$\begin{cases} dl_s = ds \\ dl_\phi = s\,d\phi \\ dl_z = dz \end{cases} \qquad d\tau = s\,ds\,d\phi\,dz$$

حدود انتگرال به صورت زیر است:

$$\int_{0}^{+\infty} \quad \int_{0}^{2\pi} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}$$

حدود متغیر s — حدود متغیر ϕ — حدود متغیر z

○ مشتق‌ها در مختصات غیر دکارتی

فرض کنید دستگاه مختصات غیر دکارتی متعارفی با مختصه‌های (u, v, w) انتخاب کنیم

در دستگاه دکارتی (x, y, z) به خوبی خود متعارف و آشنا است. در دستگاه کروی و استوانه‌ای (r, θ, ϕ) و (s, ϕ, z) است.

حال طول بس خود را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$d\vec{l} = f\,du\,\hat{u} + g\,dv\,\hat{v} + h\,dw\,\hat{w}$$

با توجه به این در کتاب h g f در دستگاه مختصات به صورت زیر است.

10/

دستگاه مختصات / کمیت	u	v	w	f	g	h
Cartesian دکارتی	x	y	z	1	1	1
Spherical کروی	r	θ	ϕ	1	r	$r\sin\theta$
Cylindrical استوانه‌ای	s	ϕ	z	1	s	1

$$d\vec{l}_{Cartesian} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$$

$$d\vec{l}_{Spherical} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi}$$

$$d\vec{l}_{Cylindrical} = ds\,\hat{s} + s\,d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z}$$

$d\vec{l}$ برای بردار کشش‌های گرادیان، دیورژانس، کرل باید از نقطه‌ای (u, v, w) به نقطه‌ای $(u+du, v+dv, w+dw)$ جابه‌جا شویم.

$t(u, v, w)$ را در نظر بگیرید که نتیجه اسکالر

$$dt = \frac{\partial t}{\partial u} du + \frac{\partial t}{\partial v} dv + \frac{\partial t}{\partial w} dw \qquad (1)$$

حال برای تعریف گرادیان در مختصات دلخواه معمولا از تعریف زیر استفاده می‌کنیم.

$$dt = \vec{\nabla} t \cdot d\vec{l} = (\vec{\nabla} t)_u f\, du + (\vec{\nabla} t)_v g\, dv + (\vec{\nabla} t)_w h\, dw \qquad (2)$$

مولفه u-ام گرادیان مولفه v-ام گرادیان مولفه w-ام گرادیان

با مقایسه (1) و (2) خواهیم داشت:

$$(\vec{\nabla} t)_u \equiv \frac{1}{f}\frac{\partial t}{\partial u} \; ; \; (\vec{\nabla} t)_v \equiv \frac{1}{g}\frac{\partial t}{\partial u} \qquad (\vec{\nabla} t)_w \equiv \frac{1}{h}\frac{\partial t}{\partial w}$$

در نتیجه گرادیان t به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{\nabla} t \equiv \frac{1}{f}\frac{\partial t}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{g}\frac{\partial t}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h}\frac{\partial t}{\partial w}\hat{w}$$

با این تعریف گرادیان در مختصات کروی برابر خواهد بود.

$$\vec{\nabla} t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

in spherical coordinate

در مختصات استوانه‌ای برابر خواهد بود با

$$\vec{\nabla} t = \frac{\partial t}{\partial s}\hat{s} + \frac{1}{s}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{z}$$

in cylindrical coordinate

Powered by CamScanner

دیورژانس : برای تعریف دیورژانس در مختصات خمیدگانی از قضیه گاوس استفاده می‌کنیم

$$\vec{A}(u,v,w) = A_u \hat{u} + A_v \hat{v} + A_w \hat{w}$$

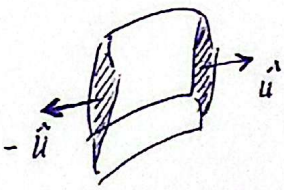
قضیه گاوس $\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\, d\tau$ را می‌نویسیم و از آن برای استخراج دیورژانس استفاده می‌کنیم

$$dl_u = f\,du \;,\; dl_v = g\,dv,\; dl_w = h\,dw$$

* المان حجم : $d\tau = dl_u\, dl_v\, dl_w = (fgh)\, du\, dv\, dw$

توجه داشته باشید که المان حجم از جنس طول به توان ۳ است. از آنجایی که مختصات خمیدگی از جنس زاویه هستند ترکیب (fgh) خود را تصحیح می‌کند.

سطح جلویی :



$$\left.\begin{aligned} d\vec{a} &= -(gh)\, dv\, dw\, \hat{u} \\ \vec{A} \cdot d\vec{a} &= -(gh A_u)\, dv\, dw \end{aligned}\right\}$$

سطح پشتی : باندازه $u+du$ جابجا شده. از سری تیلور

$$F(u+du) - F(u) = \frac{dF}{du}\, du$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}(gh A_u)\right] du\,(dv\,dw) = \frac{1}{fgh}\frac{\partial}{\partial u}(gh A_u)\, d\tau$$

اختلاف تابع در دو سطح جلویی و پشتی

* حجم المان

front - back surface $= \frac{1}{fgh} \frac{\partial}{\partial u} (ghA_u)\, d\tau$

left - right surface $= \frac{1}{fgh} \frac{\partial}{\partial v} (fhA_v)\, d\tau$

top - bottom surface $= \frac{1}{fgh} \frac{\partial}{\partial w} (fgA_w)\, d\tau$

بنابراین:

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{fgh} \left[\frac{\partial}{\partial u} (ghA_u) + \frac{\partial}{\partial v} (fhA_v) + \frac{\partial}{\partial w} (fgA_w) \right] d\tau$$

طرفین $d\tau$ تقسیم دیورژانس را به دست می‌دهد:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{fgh} \left[\frac{\partial}{\partial u} (ghA_u) + \frac{\partial}{\partial v} (fhA_v) + \frac{\partial}{\partial w} (fgA_w) \right]$$

در مختصات کروی:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin\theta A_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin\theta A_\theta) + \frac{\partial (rA_\phi)}{\partial \phi} \right]$$

sph

بنابراین

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

Powered by CamScanner

در سیستم مختصات استوانه‌ای خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(sA_s) + \frac{\partial}{\partial \phi}(A_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(sA_z)\right]$$

Cyl.

$$= \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(sA_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial \phi}A_\phi + \frac{\partial}{\partial z}A_z$$

به وضوح دیده می‌شود که در مختصات غیر دکارتی پیچیدگی بیشتری وارد می‌شود که می‌تواند موضوع تمرین خوبی باشد.

نقطه شروع در بسیاری از مسائل مهندسی معادل با یک نقطه‌ای است!

o

ادامه در برگه بعد