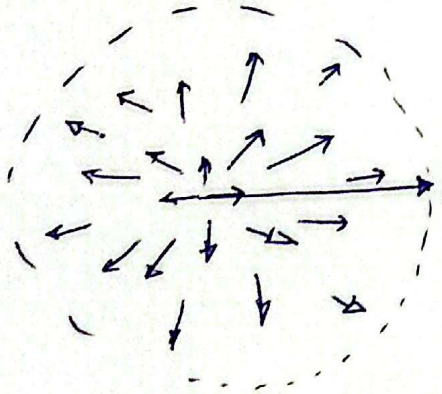
الکترومغناطیس ۱

تابع دلتای دیراک Dirac Delta Function

در درس نامه پیش دیورژانس در مختصات کروی را به دست آوردیم.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 V_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, V_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}$$

حال فرض کنید که میدان برداری شعاعی به صورت $\vec{v} = \frac{\hat{r}}{r^2}$ باشد. به صورت واضح این میدان برداری دیورژانس دارد، مطابق طرح داده شده در



- کره به شعاع دلخواه R

شار عبوری خطوط وجود دارد.

حال دیورژانس را طبق بالا می سنجیم

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{1}{r^2}\right) = 0$$

این تناقض جای سؤال دارد. برطرف کردن این مشکل یکی از نشانه های نیاز به توابع تابع دلتای دیراک است. برای شروع از قضیه گاوس استفاده می کنیم

$$\oint_S \vec{b}\cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{V}\, d\tau$$

2

ابتدا سمت چپ معادله را حل می‌کنیم

$$\oint_S \vec{v}\cdot d\vec{a} = \int \left(\frac{1}{R^2}\hat{r}\right)\cdot\left(R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \hat{r}\right)$$

انتگرال سطح کره‌ای به شعاع R

$$= \left(\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\phi\right) = 4\pi$$

این نتیجه در تناقض با صفر بودن دیورژانس میدان برداری $\frac{\hat{R}}{R^2}$ است. مسئله همگرایی این است که این تابع در $r \to 0$ واگرا است. برای برطرف کردن این تکینگی تابعی را با نام تابع دلتا تعریف کردیم که نتیجه انتگرال برابر 4π می‌شد.

$$\int \vec{\nabla}\cdot\vec{v}\, d\tau = 4\pi$$

برای این منظور تابع دلتای دیراک را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

از نظر ریاضی این تعریف، تابع نیست. دقیق‌تر می‌توان آن را توزیع یا تابع تعمیم یافته خواند.

- Generalized function

اگر $f(x)$ تابع پیوسته و خوش رفتاری باشد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,dx = f(0)$$

زیرا $$f(x)\,\delta(x) = f(0)\,\delta(x)$$

زیرا $\delta(x)$ در همه نقاط به جز از $x=0$ ، صفر است.

تکته: تابعی غیر از δ که بازه انتگرال از $-\infty$ تا $+\infty$ باشد بین ε و $-\varepsilon$ حول صفر نیز قابل قبول است.

هم چنین صفر تعریف دیم:

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0 & x \neq a \\ \infty & x = a \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\,dx = +1$$

از این رو برای تابع خوش رفتار $f(x)$ داریم:

$$f(x)\,\delta(x-a) = f(a)\,\delta(x-a)$$

از این رو $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a)$$

تابع دلتای دیراک در انتگرال معنی پیدا می کند.

4

تابع دلتای دیراک ۳ بعدی

$$\delta^{3D}(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \qquad \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{j} + z\hat{z}$$

$$\int_{\text{all-space}} \delta^{3D}(\vec{r})\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\delta(y)\delta(z)\, dx\,dy\,dz = 1$$

برای تابع

$$\int_{\text{all-space}} f(\vec{r})\, \delta^{3D}(\vec{r} - \vec{a}) = f(\vec{a})$$

حال توابع تابع دلتای دیراک مراب بس دیورژانس را به صورت زیر داریم

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 4\pi\,\delta^{3D}(\vec{r})}$$

حال فرض کنید که از گذشته توابع کردیم

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{r} - \vec{r}'$$

$$\vec{\nabla}_r \cdot \left(\frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2}\right) = 4\pi\,\delta^{3D}(\vec{\mathcal{R}})$$

↓

(مختصه ۲ تابع است) دیورژانس نسبت به مختصه r

رابطه هم دیگر دو بیان $\frac{1}{\mathcal{R}}$ است

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\mathcal{R}}\right) = -\frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \quad \text{نتیجه} \quad \nabla^2\frac{1}{\mathcal{R}} = -4\pi\,\delta^{3D}(\vec{r})$$

Powered by CamScanner

تمرین: انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$J = \int_v (r^2+2)\,\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) d\tau$$

این انتگرال با توجه به تعریف تابع دلتا دیراک بسیار راحت است

$$J = \int_v (r^2+2)\,4\pi\,\delta^{3D}(r)\,d\tau = 8\pi$$

↑ $r=0$ (تابع دلتا دیراک)

حال این انتگرال را می‌توان از راه طولانی‌تر با استفاده از مشتق جزء قضیه گاوس محاسبه کرد.

$$J = \int_v \vec{\nabla}\cdot\left[(r^2+2)\frac{\hat{r}}{r^2}\right] d\tau - \int_v \frac{\hat{r}}{r^2}\cdot\left[\vec{\nabla}(r^2+2)\right] d\tau$$

$$= \oint (r^2+2)\frac{\hat{r}}{r^2}\cdot d\vec{a} - \int_v \frac{\hat{r}}{r^2}\cdot 2r\hat{r}\,d\tau$$

طبق قضیه گاوس ← S: کره شعاع R

$$= \int (R^2+2)\sin\theta\,d\theta\,d\phi - \int \frac{2}{r}\,r^2\,dr\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

$$d\vec{a} = R^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,\hat{r}$$

$$= 4\pi(R^2+2) - 4\pi R^2 = 8\pi$$

$4\pi R^2$

همانطور که قبلا محاسبه شد

بردارهای با کرل صفر

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \iff \vec{F} = -\vec{\nabla} f$$

قضیه: در ارتباط با نیروهای مدل کرل (irrotational :) Curl-less

a) $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ در هر نقطه

b) $\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l}$ مستقل از مسیر بین a و b

c) $\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$ برای هر مسیر بسته

d) $\vec{F} = -\vec{\nabla} f$

با توجه به این است که پتانسیل تا یک ثابت قابل افزودن یا کم کردن است و این تنها یکتایی نیست.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0 \iff \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

اگر دیورژانس یک بردار صفر شد

قضیه ۲ و ۸ بردارهایی که دیورژانس آن‌ها صفر است.

Divergence - less (or Solenoidal fields)

(a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$ در هر نقطه

(b) $\int \vec{F} \cdot d\vec{a}$ مستقل از سطحی است که مرز مشترک دارند

(c) $\oint \vec{F} \cdot d\vec{a}$ برای هر سطح بسته ای صفر است

(d) $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

۶- از آنجایی که کرل گرادیان صفر است. می‌توان گرادیان یک اسکالر را به $\vec{A}$ که به نام تابع پتانسیل برداری می‌شناسیم اضافه کنیم.

بنابراین هر بردار را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

توجه کنید که در ۳ بعد $\vec{F}$ دارای سه مولفه F_x, F_y, F_z است. این سه مولفه با ۳ درجه آزادی به ۱ درجه برای φ، ۲ درجه برای $\vec{A}$ تقسیم می‌شود. توجه کنید که $\vec{A}$ بردار است و چون $\vec{\nabla}.\vec{A}=0$ یک درجه آزادی کم می‌شود.

از این رو هر بردار را می‌توان به صورت یک بخش بدون کرل و یک بخش بدون دیورژانس نوشت.