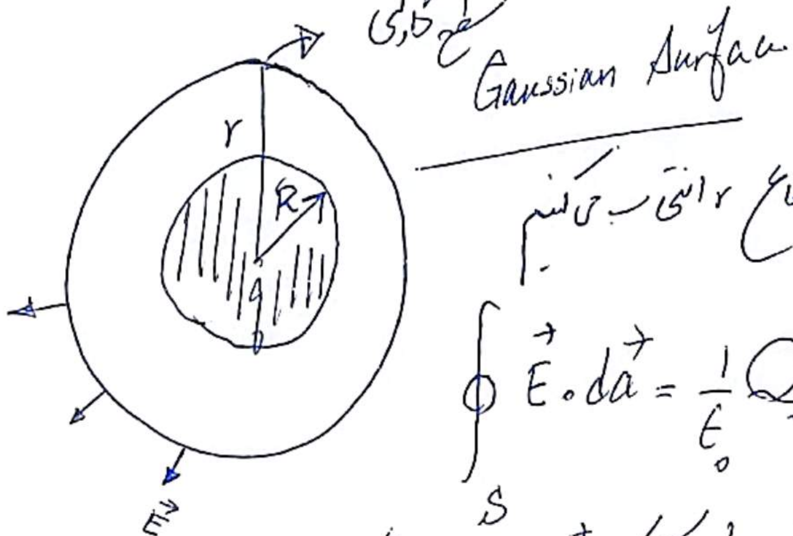
درس الکترومغناطیس ۱

کاربرد قانون گاوس:

قانون گاوس در شکل انتگرالی خود برای محاسبه میدان الکتریکی بسیار مفید است به خصوص زمانی که تقارن در مسئله وجود داشته باشد.

به طور مثال فرض کنید کره ای با بار الکتریکی یکنواخت q و شعاع R باشد، میدان الکتریکی را در خارج کره در فاصله r محاسبه کنید.



ابتدا سطح گاوسی را برای کره ای به شعاع r انتخاب می کنیم

شکل قانون گاوس به صورت

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{enc}$$

که $Q_{enc} = q$، به دلیل تقارن میدان الکتریکی $\vec{E}$ به صورت شعاعی به سمت خارج است

$d\vec{a}$ نیز به همین ترتیب شعاعی به سمت خارج است از این رو

$$\int_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \int_S |E|\, da = |E| \int_S da = 4\pi r^2 |E|$$

میدان الکتریکی بر روی سطح گاوسی ثابت است.

$$|E|\, 4\pi r^2 = q/\epsilon_0 \rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

نتیجه را دقت کنید. میدان الکتریکی خارج کره برابر است با حالتی که بار در مرکز قرار دارد.

در مورد این که در جلسه قبل چرا میدان را مساوی در نظر گرفتیم کمی فکر کنید!!

قانون گاوس همواره صحیح است ولی استفاده از آن سهل نیست. تقارن در مسائل بسیار مهم است
اگر توزیع بار ρ نامتقارن می‌بود دیگر سطح گاوسی را که انتخاب می‌کردیم به سادگی نمی‌توانستیم
از قانون گاوس استفاده کنیم.

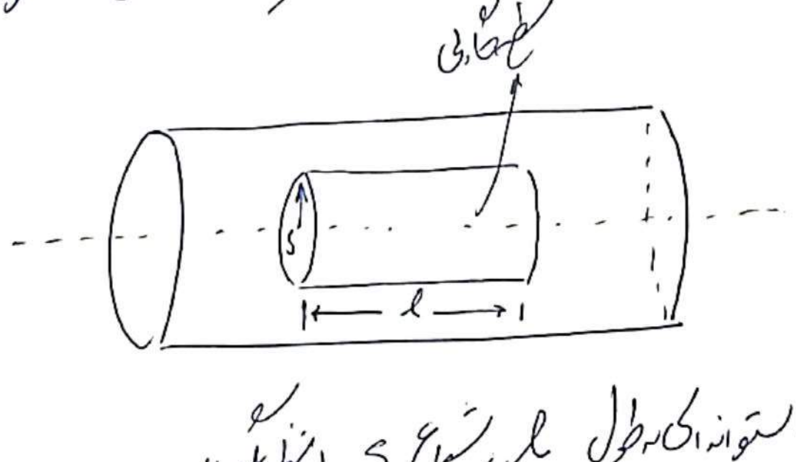
سه نوع تقارن در مسائل الکترومغناطیس به کار می‌برند

1) تقارن کروی Spherical Symmetry

2) تقارن استوانه‌ای Cylindrical Symmetry

3) تقارن صفحه plane Symmetry

تمرین: استوانه طویلی هم‌محور شکل چگالی بار حجمی رابطه $\rho = Ks$ دارد که
K مقدار ثابت و s فاصله از مرکز محور تقارن است. میدان الکتریکی را در درون استوانه محاسبه کنید.



ابتدا سطح گاوسی را استوانه‌ای به طول l و شعاع s در نظر بگیرید.

قانون گاوس به شکل انتگرال برابر است

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{enc}$$

ابتدا بار محصور را محاسبه می‌کنیم

$$Q_{enc} = \int \rho \, d\tau = \int (ks')(s' ds' d\phi \, dz)$$

برای حجم استوانه در نقطه (s, ϕ, z)

$$= 2\pi l k \int_0^s s'^2 ds' = \frac{2}{3}\pi l k s^3$$

حال با توجه به ملاحظات تقارنی میدان الکتریکی در جهت شعاعی "$\hat{s}$" است. از این رو

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int |E| \, da = |E| \int da = |E| \, 2\pi s l$$

در نتیجه

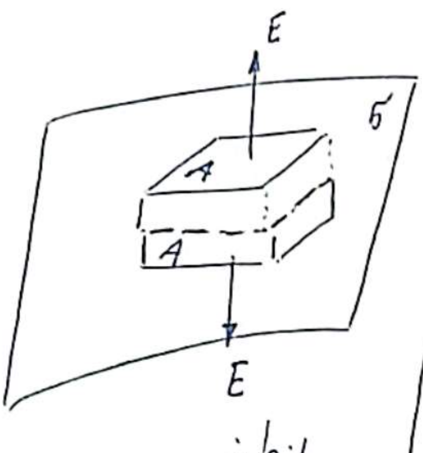
$$|E| \, 2\pi s l = \left(\frac{2}{3}\pi l k s^3\right) \frac{1}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{3\epsilon_0} k s^2 \hat{s}$$

تمرین: صفحه‌ی نامتناهی با بار σ را در نظر بگیرید. میدان را در فضا حساب کنید.

سطح گاوسی را مانند شکل یک جعبه در نظر می‌گیریم.

به این سطح "Gaussian pillbox" گویند.



$$Q_{enc} = \sigma A$$

با توجه به ملاحظات تقارنی میدان الکتریکی به سمت بالا و پایین است.

از طرفی

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{a} = 2E|A|$$

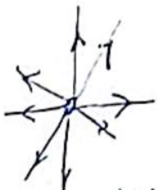
$$2A|E| = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma A$$ از این رو

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n}$$ لذا

نکته جالب این است که میدان الکتریکی یک صفحه مستقل از فاصله از آن صفحه r است. درست است که میدان از یک بار با $1/r^2$ کاهش می‌یابد ولی در دور شدن از صفحه با نسبت r^2، بار بیشتری را شاهد می‌کند و این دو نسبت ساده می‌شوند.

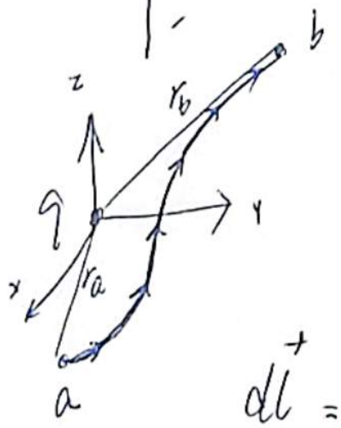
$\boxed{}$ کرل میدان الکتریکی

خطوط میدان یک تک بار الکتریکی



این نکته را به ذهن متبادر می‌کند که کرل میدان صفر است

با این حال انتگرال روی مسیر میدان را از نقطه دلخواه a به b محاسبه می‌کنیم



$$\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = ?$$

در مختصات کروی جزء طول به شکل زیر است

$$d\vec{l} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi}$$

برای بار نقطه‌ای در مرکز

$$\vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}dr$$ لذا

که r_a، r_b فاصله بار تا نقاط a, b است.

$$\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{q}{dr} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}\Big|_{r_a}^{r_b}$$ از این رو

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_a} - \frac{q}{r_b}\right)$$

جالب است که انتگرال روی مسیر بسته صفر است

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \xrightarrow[\text{حال با استفاده از قضیه استوکس}]{} \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$$

صفر بودن کرل تک بار را نشان دهیم. حال با استفاده از اصل برهم نهی

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots \rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}\times\vec{E}_1 + \vec{\nabla}\times\vec{E}_2 + \dots = 0$$

پتانسیل الکتریکی

میدان الکتریکی یک بردار خاص نیست، برداری است که کرل آن صفر است. از این رو توزیع دلخواهی از بارها نمی‌توانند میدان الکتریکی ایجاد کنند که به طور مثال $\vec{E} = y\hat{x}$ باشد چون این میدان کرل دارد.

میدان برداری که کرل آن صفر است را می‌توان به صورت گرادیان یک میدان اسکالر نوشت.

از آن جایی که انتگرال روی مسیر بسته میدان صفر است تعریف می‌کنیم

$$V(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) \equiv -\int_{O}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Notation of Griffiths

O نقطه مرجعی است که از پیش درباره آن توافق کرده‌ایم

φ از این رو فقط به نقطه r ارتباط دارد.

b

اختلاف پتانسیل بین دو نقطه a و b به صورت زیر است.

$$\varphi(b)-\varphi(a) = -\int_{\mathcal{O}}^{b}\vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{\mathcal{O}}^{a}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= -\int_{\mathcal{O}}^{b}\vec{E}\cdot d\vec{l} - \int_{a}^{\mathcal{O}}\vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{a}^{b}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

از طرف دیگر قضیه اساسی حساب (دیفرانسیل گرادیان) می‌گوید:

برای هر بردار $\vec{\nabla}V$ و اسکالر V

$$V(b)-V(a) = \int_{a}^{b}(\vec{\nabla}V)\cdot d\vec{l}$$

درنتیجه

$$\int_{a}^{b}(\vec{\nabla}\varphi)\cdot d\vec{l} = -\int_{a}^{b}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

از آن جایی که این روابط برای هر مسیر دلخواهی از a و b صحیح است

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi}$$

این رابطه شکل دیفرانسیلی تعریف زیر است

$$\varphi(\vec{r}) \equiv -\int_{\mathcal{O}}^{\vec{r}}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

نکته کلیدی مستقل از مسیر بودن انتگرال میدان الکتریکی یا معادل آن صفر بودن کرل بود.

چند نکته در مورد پتانسیل

۱- پتانسیل و انرژی پتانسیل دو مفهوم متفاوت هستند، اگرچه ارتباط فیزیکی دارند. در استفاده از این واژه‌ها باید دقت کرد، تاکنون تعریف پتانسیل را توصیف کرده‌ایم.

۲- در اغلب مسائل الکتروستاتیک، حل مسئله با استفاده از پتانسیل‌ها ساده‌تر است. زیرا با حل مسئله یک تابع اسکالر، مسئله را حل کرده و فقط کافی است گرادیان آن را حساب کنیم. دلیل این که اطلاعات یک بردار در اسکالر است، این است که سه مولفه‌های میدان مستقل نیستند.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

۳- نکته بعدی در مورد نقطه مرجع است. همواره تفاوت پتانسیل بین دو نقطه مهم است و مکان مبدا (مرجع) اهمیتی ندارد. از این رو که جابه‌جایی مبدا یک مقدار ثابت را به پتانسیل اضافه یا کم می‌کند.

$$\varphi'(r) = -\int_{O'}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{O'}^{O} \vec{E}\cdot d\vec{l} - \int_{O}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{l} = K + \varphi(r)$$

مقدار ثابت K در اختلاف پتانسیل‌ها تاثیری ایجاد نمی‌کند *

پتانسیل نسبت به نقطه O'

$$\varphi'(b) - \varphi'(a) = \varphi(b) - \varphi(a)$$

همچنین طبق تعریف $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi'$ به دلیل ثابت بودن مقدار K

$$\nabla\phi' = \nabla\phi \to E' = E$$

از این رو مبدأ پتانسیل همانند مبدأ پتانسیل گرانشی (ارتفاع صفر) است؛ که همواره اختلاف ارتفاع اهمیت دارد.

یک انتخاب مناسب برای مبدأ پتانسیل بی‌نهایت است. در بی‌نهایت دور از توزیع بار می‌توان پتانسیل را صفر در نظر گرفت. البته این انتخاب برای زمانی که توزیع بار خود بی‌نهایت است مانند صفحه گسترده مناسب نیست و می‌توان نقطه دیگری را به عنوان مبدأ تعریف کرد.

۴- پتانسیل نیز به اصل برهم‌نهی superposition principle احترام می‌گذارد.
زیرا این اصل را ابتدا از نیرو شروع کردیم

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots$$

با تقسیم نیرو بر بار آزمون Q

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots$$

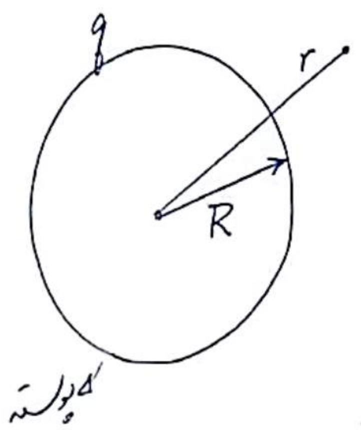
حال اگر دو سمت رابطه را انتگرال بگیریم از یک مبدأ مشخص تا نقطه r خواهیم داشت

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \cdots$$

۵- واحد پتانسیل به شکل زیر است. واحد اختصاصی پتانسیل ولت است

$$[\phi] = [E]\cdot[l] = \frac{\text{Newton}}{\text{Coloumb}}\cdot \text{meter} = \frac{\text{Joule}}{\text{Coloumb}} \equiv \text{Volt}$$

تمرین: یک پوسته کروی به شعاع R را در نظر بگیرید که بار الکتریکی q بر روی آن به صورت یکنواخت قرار دارد. پتانسیل را در خارج و داخل پوسته محاسبه کنید.



ابتدا مرجع پتانسیل را در بی نهایت صفر در نظر می گیریم.

با استفاده از قانون گاوس میدان الکتریکی را در فاصله r محاسبه می کنیم

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

حال پتانسیل را ابتدا در خارج پوسته محاسبه می کنیم

$$\varphi(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{q}{r'^2}dr' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'}\Big|_{\infty}^{r}$$

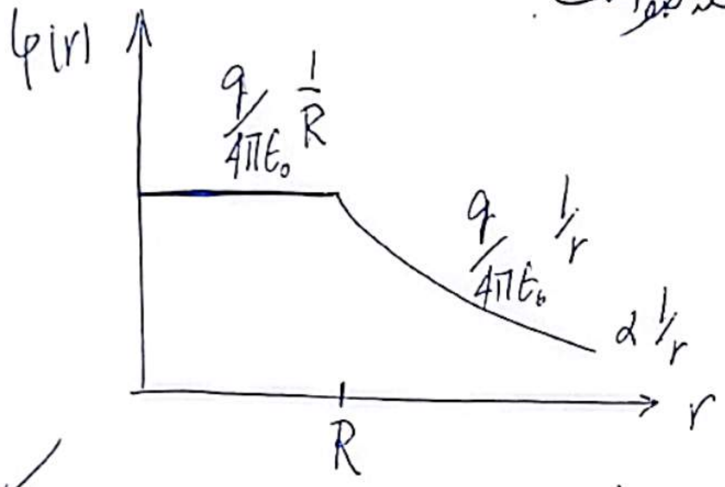
$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

حال برای پتانسیل در نقطه داخل پوسته انتگرال را به دو قسمت تقسیم می کنیم

$$\varphi(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{+\infty}^{R}\frac{q}{r'^2}dr' - \int_{R}^{r}(0)\,dr' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

نکته جالب این است که پتانسیل در داخل پوسته غیر صفر است ولی ثابت است

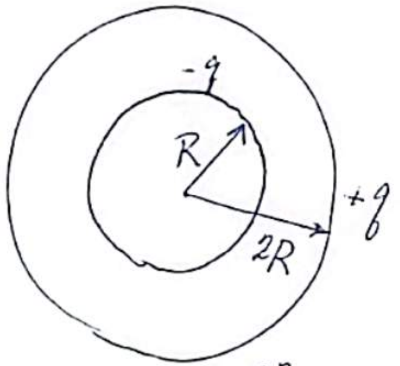
از این رو $\vec{\nabla}\phi$ در داخل پوسته صفر است.



پتانسیل داخل کره بستگی به توزیع بار در کل فضا دارد.

به طور مثال اگر یک پوسته دیگر با بار q به شعاع $2R$ پوسته به شعاع R و بار $-q$ را در بر گرفته باشد

پتانسیل را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم



$$E(r) = \begin{cases} 0 & r > 2R \\ -\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & R < r < 2R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{2R} (0)\, dr' - \int_{2R}^{R} -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr'}{r'^2} - \int_{R}^{r} (0)\, dr$$

در داخل دو پوسته

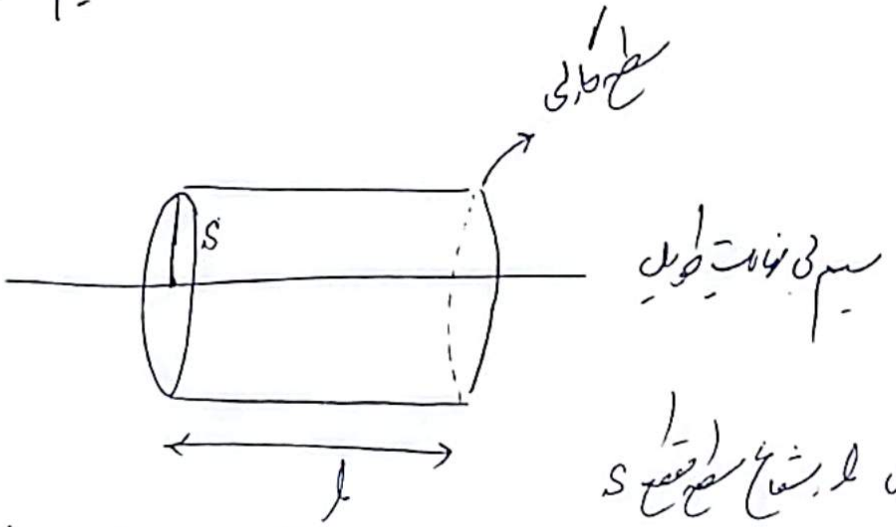
$$= 0 - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'} \Big|_{2R}^{R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{R}\right)$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

این بدان معنا است که پتانسیل از توزیع بار در تمام فضا اثر می‌پذیرد.

تمرین: پتانسیل را در فاصله s از یک سیم بی نهایت طویل که چگالی بار خطی λ را دارد محاسبه کنید و نشان دهید که میدان حاصل از گرادیان پتانسیل جواب صحیح را به دست می دهد.

جواب: ابتدا با استفاده از قانون گاوس میدان الکتریکی را در فاصله s از سیم پیدا می کنیم



سطح گاوسی به طول l با شعاع سطح مقطع s

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{enc} = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda l$$

$$|E|\, 2\pi s\, l = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda l \quad \text{با استفاده از تقارن} \quad \rightarrow \vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{s} \hat{s}$$

از آنجایی که بار تا بی نهایت گسترده شده است نقطه مرجع نمی تواند در بی نهایت باشد. از این رو مبدا را در فاصله دلخواه $s = a$ در نظر بگیریم.

$$\varphi(s) = -\int_a^s \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{s'} ds' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\lambda \ln\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$-\vec{\nabla}\varphi = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{s} \hat{s}$$ نتیجه میدان الکتریک