الکترودینامیک ۱

معادله پواسون، معادله لاپلاس

در الکترواستاتیک ۲ معادله را بدست آوردیم

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$$

همانطور که $\vec{E}$ این امکان را ایجاد کرد $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ حال این رابطه را در قانون گاوس استفاده می‌کنیم

$$\vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla}\varphi) = \rho/\epsilon_0 \rightarrow \boxed{\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0}$$

به معادله بالا، معادله پواسون Poisson Eq. می‌گویند که به نام Siméon Denis Poisson (1781-1840) ریاضی-فیزیکدان فرانسوی نامگذاری شده است.

در صورتی که در فضا، بار الکتریکی وجود نداشته باشد، معادله پواسون به معادله لاپلاس Laplace Eq. تقلیل پیدا می‌کند.

$$\boxed{\nabla^2\varphi = 0}$$

رابطه $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$: معادله جدیدی برای φ در اختیار نمی‌دهد.

○ پتانسیل بارهای جایگزیده Localized Charge Distribution.

تاکنون پتانسیل را با استفاده از میدان الکتریکی به صورت $\varphi(r) \equiv -\int_{O}^{(r)} \vec{E}\cdot d\vec{l}$ تعریف کردیم

البته این تعریف از نظر کاربردی چندان مناسب نیست زیرا اگر $\vec{E}$ را بدانیم مسئله حل شده است

حال رضایت آن است که ابتدا φ را حساب کرده و سپس از روی آن $\vec{E}$ را حساب کنیم.

با معادله پواسون $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ و با داشتن φ می‌توانیم چگالی بار را بدست آوریم و مسئله معکوس معادله پواسون است می‌خواهیم از توزیع بار، پتانسیل را حساب کنیم.

از بار نقطه‌ای آغاز می‌کنیم. میدان الکتریکی برابر است با

و المان طول برابر است با

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \qquad \vec{dl} = dr\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi}$$

در نتیجه $$\vec{E} \cdot \vec{dl} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

اگر نقطه مرجع را در بی‌نهایت اختیار کنیم

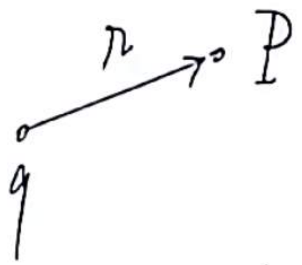
$$\varphi(r) = -\int_{O}^{r} \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{r} \frac{q}{r'^2} dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

هم اکنون ایده استفاده از علامت منفی در تعریف پتانسیل خود را نشان می‌دهد. بدون تعریف پتانسیل بار مثبت، مثبت خواهد بود. انتخاب مرجع پتانسیل در بی‌نهایت نیز حد پایین انتگرال را صفر می‌کند.

این تشابه ذهنی کمک کننده است که پتانسیل مثبت شبیه تپه، پتانسیل منفی شبیه دره است و بار از تپه به دره حرکت می‌کند.

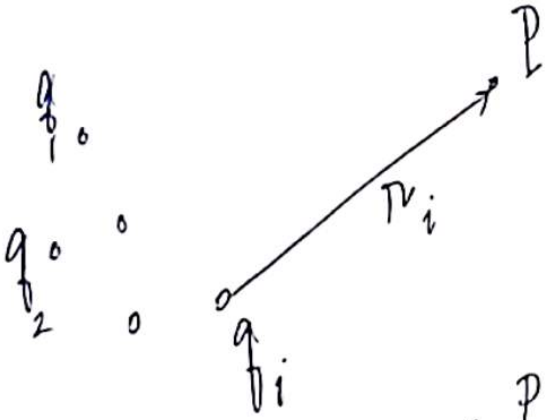
به طور کلی پتانسیل یک بار الکتریکی را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{r}$$



r : فاصله بار الکتریکی تا نقطه $\vec{r}$ است

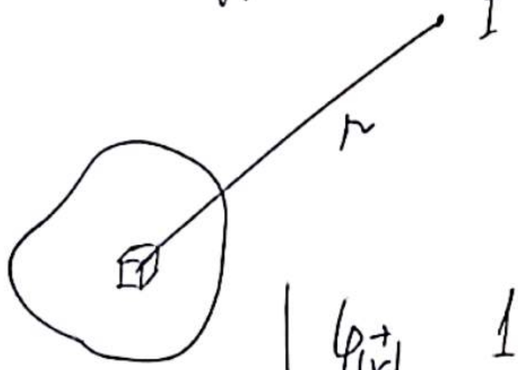
اگر از اصل برهم نهی استفاده کنیم



$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i}$$

برای توزیع پیوسته بار داریم

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{1}{r}\,dq$$



به طور مشخص برای توزیع حجمی داریم.

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')\,d\tau'}{r}}$$

این معادله‌ای است که به ما می‌گوید که با داشتن ρ چگونه می‌توان پتانسیل را پیدا کرد. این رابطه را می‌توان با معادله حاکم بر میدان الکتریکی مقایسه کرد.

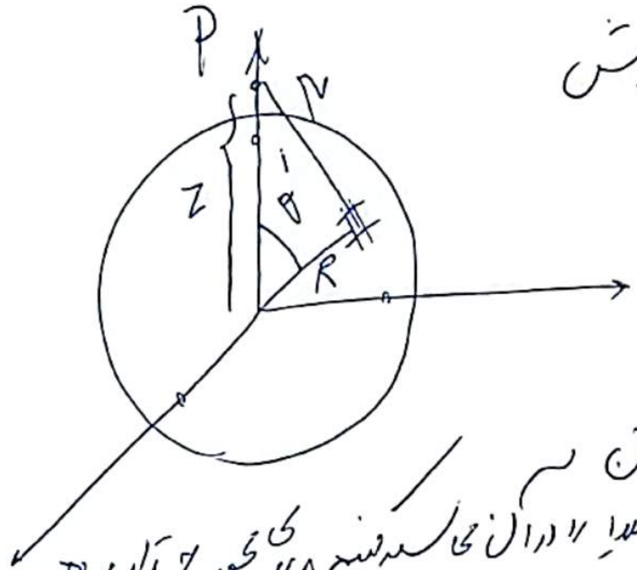
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{r^2}\,\hat{r}\,d\tau'$$

پتانسیل توزیع بار خطی و در صفحه به شکل زیر است.

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\lambda(\vec{r}\,')}{r}\,dl' \quad , \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma(\vec{r}\,')\,da'}{r}$$

این روابط بر این اساس نوشته شده است که نقطه مرجع بی نهایت است.

تمرین: پتانسیل الکتریکی یک پوسته کروی به شعاع R را که بار σ بر روی آن است را بدست آورید.



این مسئله را پیشتر حل کرده بودیم. حال تلاش خواهیم کرد از تعریف زیر استفاده کنیم.

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma}{r}\,da'$$

برای سادگی نقطه P را که می‌خواهیم میدان را در آن محاسبه کنیم بر روی محور z قرار می‌دهیم. با استفاده از قانون کسینوس‌ها داریم.

$$r^2 = R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta'$$

$$da' = R^2 \sin\theta'\,d\theta'\,d\phi'$$

المان سطح

در نتیجه

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\sigma\int \frac{R^2 \sin\theta'\,d\theta'\,d\phi'}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta'}}$$

5

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi R^2 \sigma \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta' d\theta'}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta}}$$

$$= \frac{R^2\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{Rz} \sqrt{R^2+z^2-2Rz\cos\theta} \,\Big|_0^{\pi} \right)$$

$$= \frac{R^2\sigma}{2\epsilon_0 Rz} \left(\sqrt{R^2+z^2+2Rz} - \sqrt{R^2+z^2-2Rz} \right)$$

$$= \frac{R\sigma}{2\epsilon_0 z} \left[\sqrt{(R+z)^2} - \sqrt{(R-z)^2} \right]$$

$z - R = \sqrt{(R-z)^2}$ در نتیجه $z > R$ برای نقاط خارج پوسته

$R - z = \sqrt{(R-z)^2}$ در نتیجه $z < R$ برای نقاط داخل پوسته

در نتیجه

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{R\sigma}{2\epsilon_0 z} \left[(R+z) - (z-R) \right] = \dfrac{R^2\sigma}{\epsilon_0 z} & \text{outside} \\[2ex] \dfrac{R\sigma}{2\epsilon_0 z} \left[(R+z) - (R-z) \right] = \dfrac{R\sigma}{\epsilon_0} & \text{inside} \end{cases}$$

بار کل پوسته

جابجا z^2 با r خواهیم داشت.

$q = 4\pi R^2 \sigma$

b.

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\dfrac{q}{r} & r \geq R \\[2ex] \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\dfrac{q}{R} & r < R \end{cases}$$

در این مسئله خاص آسان‌تر بود که پتانسیل را از میدان الکتریکی به دست می‌آوردیم و $\vec{E}$ را نیز از قانون گاوس چون پیچیده در واقع پتانسیل مسئله برداری است.

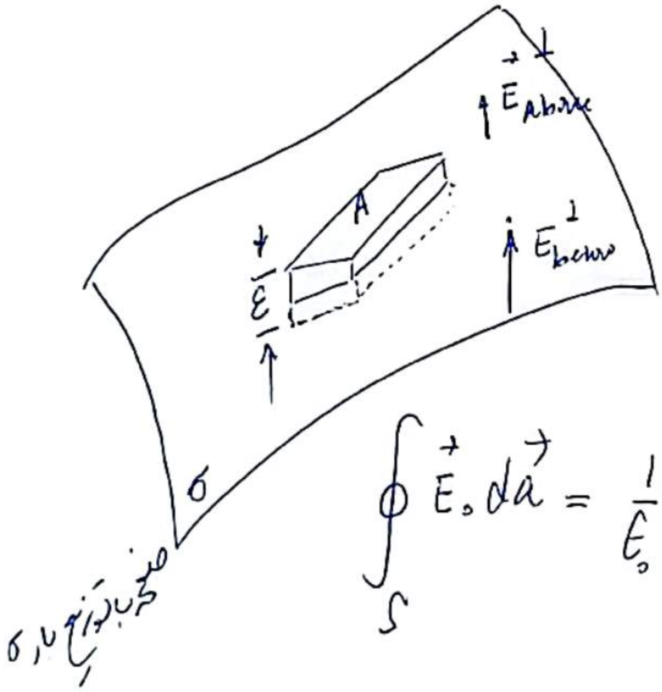
□ مثلث روابط ارزی

در الکترواستاتیک سه کمیت اصلی ρ و φ و $\vec{E}$ داریم. همواره امکان حل مسئله با تقارن و قانون گاوس وجود ندارد و شرایط دشوارتر از شکل ساده مطرح شده در این بخش است. این ۳ کمیت توسط روابط زیر به هم مرتبط‌اند.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
 & \rho \arrow[dl, bend right, "\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho}{r}\, d\tau"'] \arrow[dr, bend left, "\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\hat{r}}{r^2}\rho\, d\tau"] & \\
\varphi \arrow[ur, bend left, "\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0"] \arrow[rr, bend left, "\vec{E} = -\nabla\varphi"] & & \vec{E} \arrow[ul, bend right, "\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0 \quad \nabla\times\vec{E} = 0"'] \arrow[ll, bend left, "\varphi = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l}"]
\end{tikzcd}$$

در فصل های پیشین دیدیم که میدان الکتریکی در صفحات باردار دچار ناپیوستگی می‌شود

این ناپیوستگی را می‌توانیم با استفاده از قانون گاوس محاسبه کنیم



یک جعبه بسیار کوچک گاوسی به سطح A انتخاب می‌کنیم به گونه ای که چگالی بار در داخل سطح ثابت باشد

طبق قانون گاوس

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{enc} = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma A$$

سطح جعبه گاوسی

$$E^{\perp}_{above} - E^{\perp}_{below} = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma$$

مولفه عمود در پایین سطح

مولفه عمود بر سطح به سمت بالا

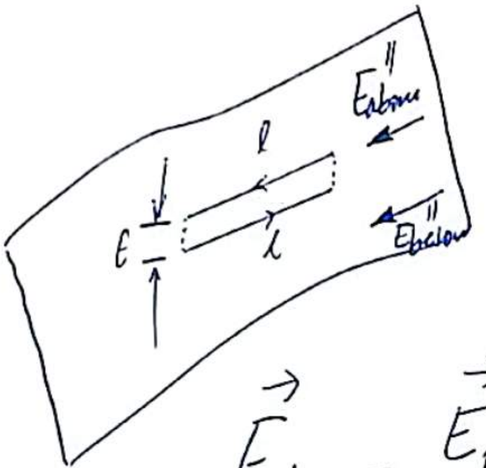
نتیجه: مولفه عمودی میدان الکتریکی به اندازه $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ ناپیوستگی دارد.

برخلاف مولفه عمودی میدان الکتریکی، مولفه مماسی همواره پیوسته است زیرا

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \to E_{above}\, l - E_{below}\, l = 0$$

$$E^{\parallel}_{above} = E^{\parallel}_{below}$$

تصویر پولک موازی به شکل زیر است



جمع‌بندی آن که در الکترواستاتیک

می‌توان شرط مرزی را به صورت زیر نوشت

$$\vec{E}_{above} - \vec{E}_{below} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}$$

بردار واحد عمود بر سطح

پتانسیل الکتریکی همواره پیوسته است. زیرا طبق تعریف داریم

$$\varphi_{above} - \varphi_{below} = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

از آنجایی که طول می‌تواند به سمت صفر برود.

$$\varphi_{above} = \varphi_{below}$$

ولی گرادیان پتانسیل که همان میدان الکتریکی است ناپیوستگی دارد.

$$\vec{\nabla}\varphi_{above} - \vec{\nabla}\varphi_{below} = -\frac{1}{\epsilon_0}\sigma\hat{n}$$

یا

$$\frac{\partial\varphi_{above}}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_{below}}{\partial n} = -\frac{1}{\epsilon_0}\sigma$$

مشتق نسبت به جهت نرمال هم

که

$$\frac{\partial}{\partial n}\varphi \equiv (\vec{\nabla}\varphi)\cdot\hat{n}$$