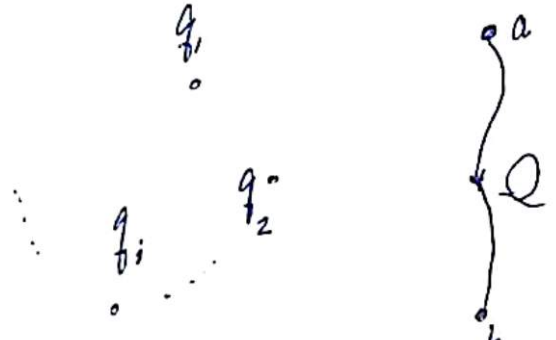
الکتریسیته ساکن

کار و انرژی در الکتریسیته ساکن

فرض کنید توزیع بار $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots$ داشته باشیم. می‌خواهیم بار آزمون $Q$ را از نقطه $a$ به نقطه $b$ برسانیم.




سؤال این است که کار مورد نیاز چقدر است؟

در هر نقطه از مسیر نیروی خالص وارد بر بار آزمون برابر است با $\vec{F} = Q\vec{E}$ که $\vec{E}$ میدان الکتریکی توزیع بار است.

حال نیروی شما برابر است با $\vec{F}_{agent} = -Q\vec{E}$ ($\vec{F}_{agent}$ نیروی شما است که بار را جابه‌جا می‌کند. توجه داشته باشید که این تعریف مستقل از علامت بار $Q$ است و خود $Q$ می‌تواند مثبت یا منفی باشد.)

حال کل کار برای جابه‌جایی از $a$ به $b$ برابر است با:

$$W = \int_a^b \vec{F}_{agent} \cdot d\vec{l} = -Q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q\left[\varphi(b) - \varphi(a)\right]$$

که $\varphi(b)$, $\varphi(a)$ پتانسیل الکتریکی در نقاط $a$ و $b$ است.

حال توجه داشته باشید که کار انجام شده بین $a$ و $b$ مستقل از مسیر است.

حال با توجه به تعریف کاری می‌توانیم پتانسیل را به صورت زیر نیز تعریف کنیم

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \frac{W}{Q}$$

به بیان دیگر اختلاف پتانسیل بین دو نقطه a و b برابر است با کار انجام شده برای جابه‌جایی بار آزمون Q از نقطه a به b؛ به بیان دیگر کار برروی اندازه بار.

حال اگر بار آزمون را از بی‌نهایت به نقطه r بیاوریم به قسمی که پتانسیل در بی‌نهایت را نیز صفر در نظر گرفته باشیم، خواهیم داشت

$$W = Q\left[\varphi(r) - \varphi(\infty)\right]$$

$$\varphi(\infty) = 0$$

در این صورت پتانسیل، انرژی پتانسیل الکتریکی در واحد بار است. توجه داشته باشید که برای بار اول از واژه انرژی پتانسیل الکتریکی استفاده کردیم. به این خاطر که انرژی است که معادل کار انجام شده برای ایجاد پیکربندی بار لازم بوده است. از این رو

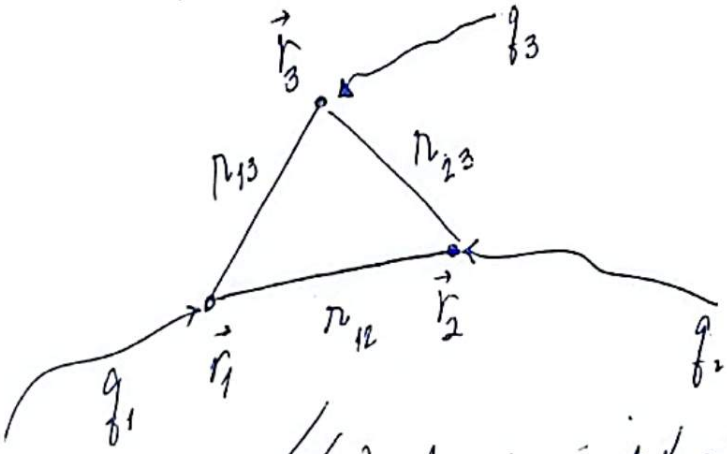
$$W = Q\,\varphi(r) \quad \text{در نتیجه}$$

potential is potential energy (the work required to create the system) per unit charge.

این تعریف شبیه تعریف میدان الکتریکی است که نیرو بر واحد بار تعریف شد.

انرژی پتانسیل توزیع دلخواه بارهای الکتریکی :

برای محاسبه انرژی پتانسیل توزیع بارها، از این ایده استفاده می‌کنیم که بارهای الکتریکی را از بی‌نهایت جابجا کرده و در موقعیت‌های $\vec{r}_1$، $\vec{r}_2$، $\vec{r}_3$ و ... قرار می‌دهیم.




برای جابجایی بار اول نیاز به انجام کار نیست $W_1 = 0$ چون میدان الکتریکی در فضا وجود ندارد.

ولی برای بار دوم $q_2$ نیاز به کار داریم که برابر است با

$$W_2 = q_2 V_1(\vec{r}_2)$$

که $V_1$ پتانسیل بار $q_1$ است که در نقطه $\vec{r}_2$ محاسبه شده است. از این رو

$$W_2 = q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{12}}\right)$$

حال اگر بار سوم را وارد محیط کنیم باید کار لازم برای بار $q_3$ را حاصل از بار $q_1$، $q_2$ هم با هم محاسبه کنیم.

$$W_3 = q_3 \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_{13}} + q_3 \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r_{23}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right)$$

4

به طور مثال به کار لازم برای بار چهارم را بخواهیم محاسبه کنیم، داریم:

$$W_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_4 \left( \frac{q_1}{r_{14}} + \frac{q_2}{r_{24}} + \frac{q_3}{r_{34}} \right)$$

توجه داشته باشیم که کار مورد نیاز برای ایجاد پیکربندی ۴ بار جمع انرژی‌های $W_1$ تا $W_4$ است.

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{r_{34}} \right)$$

از این رو

شکل عمومی ضرب دو بار الکتریکی تقسیم بر فاصله بینشان دو بار است. از این رو در حالت کلی داریم:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

زیرا اندیس جمع $j$ برای هر مقداری از جمع دوبار $i$ - ضرب بارها - است. این ترکیب دو جمع را می‌توان به شکل مناسب‌تر زیر نیز نوشت.

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\neq i}^{n} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad *$$

دلیل این که ترم‌ها را مخصوصا دوبار جمع بسته، سپس تقسیم بر ۲ را انجام می‌دهیم توجه باید داشته باشیم که $j \neq i$ به این معنا است که یک بار از خودش ضرب نمی‌شود و سهمی در انرژی الکتریکی ندارد.

جمله * این انتگرال را داریم که به شکل دیگری نیز کار انجام میدهیم.

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\left(\sum_{j\neq i}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{r_{ij}}\right)$$

ترم داخل پرانتز، پتانسیل الکتریکی است در نقطه $\vec{r}_i$ (موقعیت بار $q_i$) توسط تمام بارها به جز $q_i$! توجه داشته باشید، پتانسیل حاصل از تمام بارها و نه فقط آنهایی که زمان ورود بار $q_i$ در موقعیت بوده‌اند. با این بازنویسی انرژی پتانسیل الکتریکی را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \varphi(\vec{r}_i)$$

□ انرژی الکتریکی توزیع پیوسته بارها

فرض کنید توزیع پیوسته‌ای از بارها به حجمی $\tau$ داشته باشیم؛ آن‌گاه معادله فوق به صورت زیر نوشته می‌شود

$$W = \frac{1}{2}\int_{\tau} \rho\varphi\, d\tau$$

طبیعی است که در صورتی که توزیع بار خطی یا بر روی سطح باشد؛ کار مورد نیاز برای ایجاد این توزیع مقدار $\int \lambda\varphi\, dl$، $\int \sigma\varphi\, da$ خواهد بود. در هر صورت رابطه فوق را می‌توان بر حسب میدان الکتریکی بازنویسی کرد.

با استفاده از قانون گاوس و جایگذاری $\rho$، $\rho = \varepsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ خواهیم داشت

b

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\,\varphi\, d\tau$$

نتیجه

حال با استفاده از اتحاد اول خرده حرف داریم

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\left[\int_V \vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{E})\,d\tau - \int_V (\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\varphi)\,d\tau\right]$$

جمله اول با استفاده از قانون گاوس برابر است با

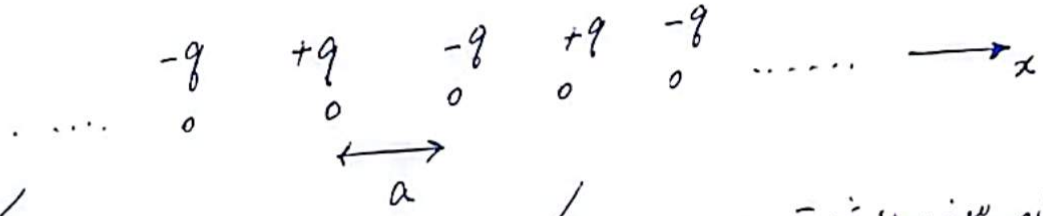
$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\left[\oint_S \varphi\vec{E}\cdot d\vec{a} + \int_V E^2\, d\tau\right]$$

که در آن دوم میدان الکتریکی را جایگزین منفی گرادیان $\varphi$ کردیم $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$

حال سوال پیش می آید که بر روی چه حجمی انتگرال می گیریم؟ انتگرال بر روی حجمی باید باشد که توزیع بار را در بر گیرد، اما می توان حجم را افزایش نیز داد، فراتر از نقاطی که بارها وجود دارند زیرا در موقعیت های جدید $\rho = 0$ است و کمکی به انتگرال اولیه ای که نوشتیم $\frac{1}{2}\int \rho\varphi\, d\tau$ نمی کند، با این ایده حجم انتگرال گیری را می توان کل فضا تصمیم گرفت. این پیشنهاد را اول را توجیه می کند، زیرا $\vec{E}$ متناسب با $\frac{1}{r^2}$ برای بار نقطه ای کاهش می یابد و $\varphi$ متناسب با $\frac{1}{r}$ در حالی که سطح با $r^2$ افزایش می یابد. از این رو انتگرالی به راحتی می میرد.

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{\text{all space}} E^2\, d\tau$$

تمرین ۶: فرض کنید زنجیره طولی از بارها به صورت زیر داشته باشید که کلی در سال بار $\pm q$ داشته باشند. بارها روی یک راستا و به فاصله $a$ هستند.




فاصله بین بارها ثابت و برابر $a$ است. کار مورد نیاز برای ساختن این زنجیره را حساب کنید. قرارداد کنید بار اول تک بار را حساب کنید.

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \varphi(\vec{r}_i)$$

انرژی یک بار در زنجیر

$$W = \frac{1}{2} q \varphi = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (2)\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(-1)^n q^2}{na}$$

ضریب 2 برای سمت چپ توزیع بارها است. $n$ شماره بار از تک تک بارهای ناصفر است. $(-1)^n$ جهت را تعیین می‌کند

$$W = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

حل با توجه به $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$$

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

$$-\ln(2) = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

8

$$W = (\ln 2)\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

به ضریب $\alpha$ Madelung Constant می‌گویند. تقسیم این مسئله به ۲، ۳، ... نیز امکان‌پذیر است.

تمرین: انرژی یک پوسته کروی به شعاع $R$ و بار $q$ را محاسبه کنید.

با توجه به توزیع بار همواری سطح داریم

$$W = \frac{1}{2}\int \sigma \varphi \, da,$$

پتانسیل پوسته در شعاع $R$ برابر است با

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R}$$

در نتیجه: $$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{q}{R}\int \sigma \, da = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{R}$$

این نتیجه را از توزیع $W = \frac{\epsilon_0}{2}\int E^2 d\tau$ نیز می‌توان به دست آورد.

در داخل پوسته $\vec{E} = 0$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$ خارج پوسته $\rightarrow$ $$E^2 = \frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 r^4}$$

از این رو $$W = \frac{\epsilon_0}{2(4\pi\epsilon_0)^2}\int_{\text{outside}} \left(\frac{q^2}{r^4}\right) r^2 \sin^2\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

انتگرال $4\pi$

$$= \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0} q^2 4\pi \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{R}$$ نتیجه‌ی قبل

$\longleftrightarrow 1/R$

## چند نکته در مورد انرژی الکتریکی

۱) تناقض مشهود:

تاکنون برای استخراج انرژی الکتریکی از دو رابطه استفاده کردیم.

برای توزیع بار گسسته $W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \phi(\vec{r}_i)$ (2.42)

و برای توزیع پیوسته به جسم بدان

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{\text{all space}} E^2 d\tau \quad (2.45)$$

حال جالب است که مشاهده کنیم که رابطه 2.45 همواره مثبت است در حالی که رابطه (2.42) می تواند منفی نیز باشد، به طور مثال در بار خالص صفر هم در فاصله نسبتاً کم از 2.42 آن نا منفی است.

این تناقض از آن جایی نشأت می گیرد که در رابطه (2.42) ما رفتیم برای شکل دادن به بار الکتریکی در آن نحوه بسته شده است، طبیعی است چون این انرژی طبق رابطه (2.45) می باشد است.

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2}\int\left(\frac{q^2}{r^4}\right)(r^2\sin^2\theta\, dr\, d\phi\, d\theta)$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{q^2}{r^2}dr = \infty$$

از این رو انرژی الکتریکی رابطه 2.45 دقیق تر است و مسئله می باشد ها در انرژی الکتریکی یک بار از تجمیع های کوانتومی الکترون فاصله یا در جا است نیاز به تلاش بیشتری برای فهم وی سه آن ها است.

10/ سوال بعدی که در این راستا می‌شود پرسید این است که انرژی الکترواستاتیک ذخیره شده است (در بار یا در میدان)؟ دو رابطه را مجدد نظر بیاندازید!

$$W = \frac{1}{2}\int \rho V \, d\tau$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{\text{all-space}} E^2 \, d\tau$$

به طور مثال در پوسته کروی با بار q آیا انرژی در روی پوسته است یا در کل فضا؟ با پاسخ این سوال شگفتی دارد به این نکته دقت کنید که کدام توصیف را انتخاب کنیم. جواب این سوال در بخش تانسور همچنین نسبت عام برای کروی که بعدا در باره آن نکته خواهیم کرد.

نکته بعدی در مورد اصل برهم نهی است. انرژی الکترواستاتیک برای یک میدان الکتریکی برابر است با

$$W_{tot} = \frac{\epsilon_0}{2}\int E^2 \, d\tau = \frac{\epsilon_0}{2}\int (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 \, d\tau$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2}\int (E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2) \, d\tau$$

$$= W_1 + W_2 + \epsilon_0 \int \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \, d\tau$$

ادامه دارد