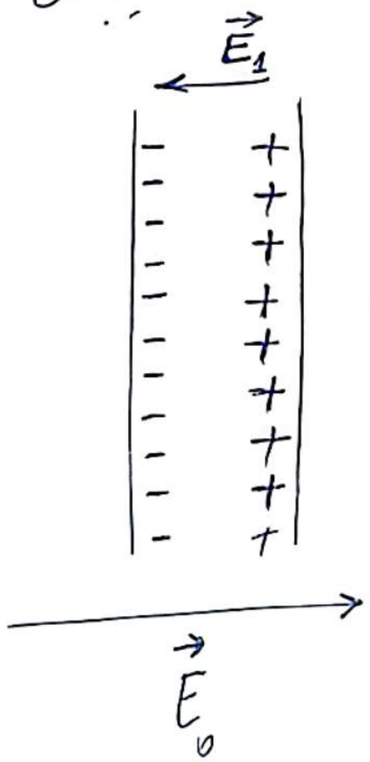
1   Conductors (رساناها)   الکترومغناطیس ۱

خواص الکتریکی مواد آن‌ها را در دسته‌بندی رسانا (conductor)، عایق - نارسانا (insulator) قرار می‌دهد. حرکت الکترون آزاد در فلزها و یا حرکت یون‌ها در محلول‌های رسانا ویژگی رسانا را ایجاد می‌کند. البته از دید الکترواستاتیک، ویژگی‌های رساناها را به شکل زیر می‌توان دسته‌بندی کرد.

(i) $\vec{E}=0$ درداخل رسانا

چرا این چنین است؟ اگر میدان الکتریکی غیر صفر باشد، بارها تحت آن حرکت می‌کنند. به بیان دیگر شرایط الکترواستاتیک رخ نمی‌دهد. البته این حرکت به صورت بسیار سریع انجام می‌شود به طوری که در رسانا بار القایی induced charge ایجاد می‌شود که نتیجه آن خنثی کردن اثر میدان در داخل است.



به طور مثال قطعه‌ای از فلز در میدان خارجی $\vec{E}_0$ قرار دارد. بارها (الکترون‌ها) به گونه‌ای حرکت می‌کنند که بار مثبت در راست و بار منفی در چپ قرار می‌گیرد.

حال در داخل $\vec{E}_0+\vec{E}_1=0$

(ii) $\rho = 0$ در داخل رسانا

به دلیل قانون گاوس $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0$ در داخل رسانا، اگر $\vec{E}=0$ باشد آنگاه $\rho = 0$ است.

(iii) - بار خالص باقی مانده بر روی سطح رسانا قرار می‌گیرد.

(iv) سطح رسانا یک سطح هم‌پتانسیل است:

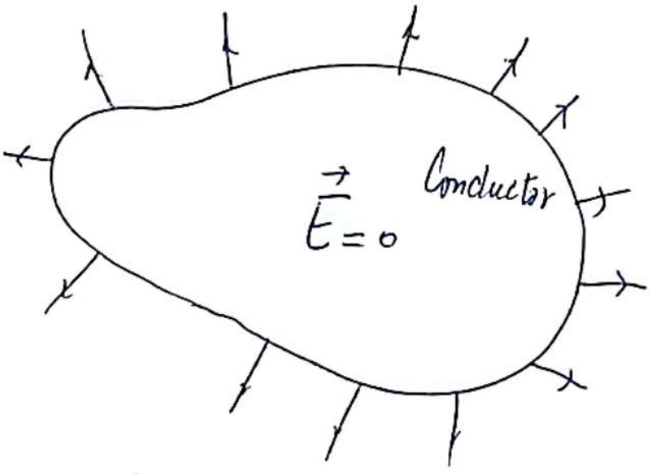
اگر a و b دو نقطه بر روی سطح رسانا باشد

$$\varphi(b) - \varphi(a) = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(a) = \varphi(b)$$

(v) - میدان الکتریکی رسانا عمود بر سطح رسانا به سمت خارج است.

این گزاره در راستای ویژگی (i) است. در صورت وجود مولفه مماسی بارهای الکتریکی شروع به حرکت می‌کنند. این حرکت تا زمانی ادامه پیدا می‌کند که پس از تعادل این مولفه صفر شود.



دیدگاه انرژی نیز می‌تواند کمک کننده باشد: توزیع بارها به گونه‌ای است که انرژی الکتریکی را کمینه کند.

در ادامه مسئله جالب محاسبه انرژی الکتریکی یک کره توپر با شعاع R و توزیع بار یکنواخت ρ را محاسبه می‌کنیم.

ابتدا این انرژی را از رابطه $W = \frac{1}{2}\int \rho \varphi \, d\tau$ می‌توان محاسبه کرد، برای این منظور باید پتانسیل φ را به دست آوریم.

برای محاسبه پتانسیل از رابطه $\varphi(r) = -\int_{+\infty}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ استفاده می‌کنیم

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} & r > R \text{ برای} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qr}{R^3} \hat{r} & r < R \text{ برای} \end{cases}$$

برای داخل کره از قانون گاوس

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} \rightarrow E\, 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4\pi}{3} r^3$$

$$E = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho r \rightarrow \vec{E} = \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{q}{\frac{4\pi}{3} R^3} r \hat{r} \checkmark$$

برای $r > R$ $\quad \varphi(r) = -\int_{\infty}^{r} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^2} dr' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'}$

4/

برای $r<R$

$$\varphi(r) = -\int_{\infty}^{R} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r'^2}\,dr' - \int_{R}^{r} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^3}\,r'\,dr'$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R^3}\left(\frac{r^2-R^2}{2}\right)$$

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2R}\left(3-\frac{r^2}{R^2}\right)$$

درنتیجه می‌توان انرژی الکتریکی را به صورت زیر حساب کرد.

$$W = \frac{1}{2}\rho\,\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2R}\int_0^R \left(3-\frac{r^2}{R^2}\right)4\pi r^2\,dr$$

$$= \frac{q\rho}{(4R)(4\pi\epsilon_0)}4\pi\left[\,r^3\Big|_0^R - \frac{r^5}{5R^2}\Big|_0^R\right]$$

$$= \frac{q\rho}{4R\epsilon_0}\left[R^3-\frac{R^3}{5}\right] = \frac{qR^2\rho}{5\epsilon_0}$$

$$\rho = \frac{q}{\frac{4\pi}{3}R^3} \rightarrow \boxed{W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3q^2}{5R}\right)}$$

حال انرژی الکتریکی را با استفاده از توزیع میدان استخراج می‌کنیم.

$$W=\frac{\epsilon_0}{2}\int E^2\,d\tau \qquad (2.45)$$

میدان الکتریکی را پیشتر محاسبه کردیم. در نتیجه:

$$W=\frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 q^2\left\{\int_R^\infty \frac{1}{r^4}\,4\pi r^2\,dr+\int_0^R\left(\frac{r}{R^3}\right)^2 4\pi r^2\,dr\right\}$$

$$=\frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 q^2\,4\pi\left\{-\frac{1}{r}\Big|_R^\infty+\frac{1}{R^6}\,\frac{r^5}{5}\Big|_0^R\right\}$$

$$=\frac{\epsilon_0}{2}\,\frac{1}{4\pi\epsilon_0^2}\,q^2\left\{\frac{1}{R}+\frac{1}{5R}\right\}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{3}{5}\,\frac{q^2}{R} \quad \checkmark$$

که همان نتیجه قبلی است.

این نتیجه را می‌توانیم از رابطه زیر نیز به دست آوریم.

$$W=\frac{\epsilon_0}{2}\left(\int_V E^2\,d\tau+\oint_S \varphi\,\vec{E}\cdot d\vec{a}\right)$$

که V حجمی است که تمام بارها را در بر گرفته است، و S سطح آن است.

این سطح دلخواه به شعاع a را به گونه ای انتخاب می کنیم که $a > R$ باشد، از این رو

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\Bigg(\underbrace{\int_0^R \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qr}{R^3}\right)^2 4\pi r^2\,dr}_{\text{درون}} + \underbrace{\int_R^a \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{q^2}{(r^2)^2} 4\pi r^2\,dr}_{\text{خارج کره}}$$

$$+ \underbrace{\oint_{r=a} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}\right)\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\right) r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi}_{\text{انتگرال روی سطح}} \Bigg)$$

روی سطح

$$= \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0^2}\frac{q^2}{R^6}\frac{r^5}{5}\Big|_0^R + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0^2}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_R^a \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} q^2 \frac{1}{a} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q^2 \left(\frac{1}{5R} - \cancel{\frac{1}{a}} + \frac{1}{R} + \cancel{\frac{1}{a}} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3}{5}\frac{q^2}{R} \right)$$ که همان نتیجه قبلی است.

روش دیگر برای محاسبه انرژی الکتریکی یک کره روش assembly است

بدین گونه که کره ای به شعاع r در نظر می گیریم، و بار کمی خود dq' به بار q' درون کره اضافه می کنیم

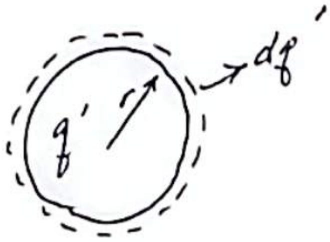
و این حجم ها را به صورت دیواره پوسته ای به کره اضافه می کنیم

کار انجام شد $\quad dW = \varphi\, dq' = dq'\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q'}{r}\right)$

بار داخل کره به شعاع r

$$q' = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho = q\,\frac{r^3}{R^3}$$

که q بار کل درون کره است



$$dq' = \frac{3q}{R^3} r^2\, dr$$

در نتیجه

$$dW = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q r^3}{R^3}\right)\frac{1}{r}\left(\frac{3q}{R^3} r^2\, dr\right)$$

$$dW = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{3q^2}{R^6}\, r^4\, dr$$

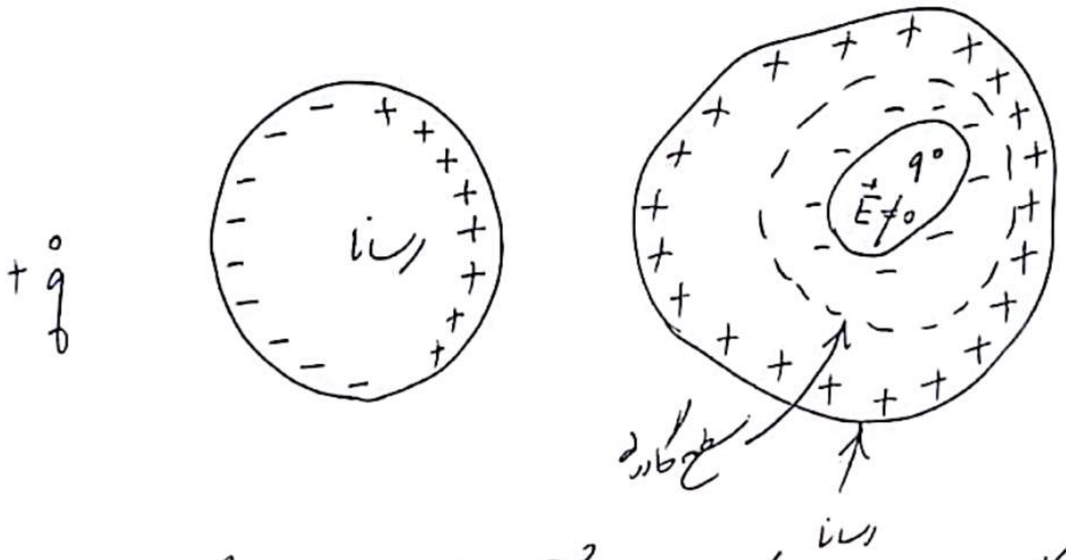
$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{3q^2}{R^6}\int_0^R r^4\, dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{3q^2}{R^6}\cdot\frac{R^5}{5}$$

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3}{5}\,\frac{q^2}{R}\right)$$

همان نتیجه قبلی

☐ بار القایی Induced Charge

فرض کنید رسانایی بدون بار داشته باشید. بار q را مطابق شکل به آن نزدیک می‌کنید.
الکترون های آزاد به گونه ای باز جنبش می‌کند که میدان الکتریکی درون رسانا صفر شود.



اگر حفره ای را در رسانا ایجاد کنیم میدان در آن صفر نیست. بار القایی به گونه ای باز جنبش می‌شود که در درون رسانا میدان صفر باشد.

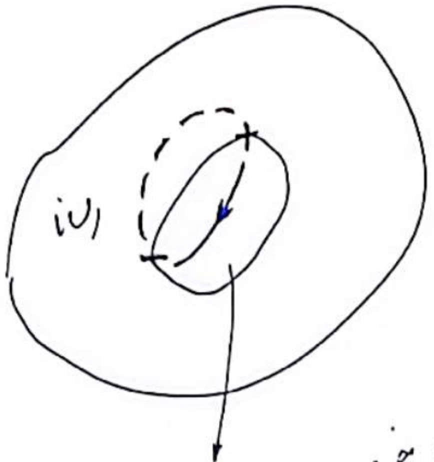
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = 0 \quad , \quad Q_{enc} = q + q_{induced}$$

دور سطح گاوسی

$$q_{induced} = -q$$

'Faraday cage' یک نمونه جالب از بکارگیری حفره در رسانا، قفس فاراده است
که در آن رسانایی حفره‌ای را در بر گرفته است و در داخل حفره بار الکتریکی وجود ندارد.
در نتیجه میدان در داخل حفره صفر است.

به طور مثال شکل زیر را در نظر بگیرید که حفره بدون بار در داخل رسانا محصور شده است.



روی منحنی بسته

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

در داخل رسانا میدان صفر است؛ هم داخل حفره ثابت و یا صفر است که برای برقراری رابطه فوق میدان باید صفر باشد.

از این رو در داخل رسانا از یکدیگر در امان هستند.

حال در ارتباط با اندازه‌ی میدان در خارج رسانا بحث کنیم. طبق رابطه

$$\vec{E}_{above} - \vec{E}_{below} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}$$

با توجه به این که میدان در داخل رسانا صفر است، میدان بیرون رسانا برابر خواهد بود. این نتیجه سازگار است با آن گزاره که میدان عمود بر رسانا است. از این نتیجه‌گیری می‌توانیم بار را بر روی سطح رسانا محاسبه کنیم

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}$$

$$\sigma = \epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

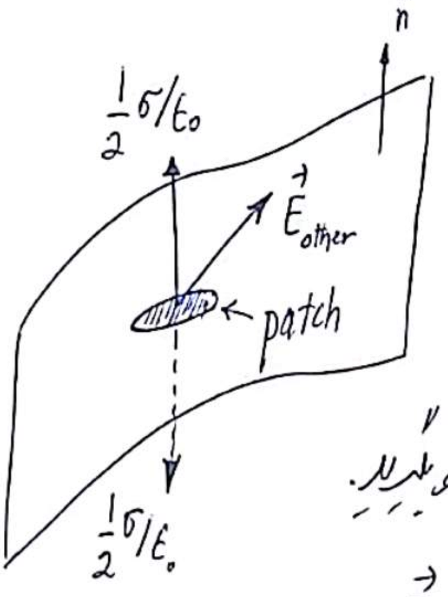
برای محاسبه نیروی واحد سطح وارد بر بار $\vec{f}$ برابر است با

$$\vec{f} = \sigma \vec{E}$$

از آن جایی که نیرو در بالا و پایین متفاوت است، میانگین میدان را انتخاب می‌کنیم

$$\vec{f} = \sigma \vec{E}_{average} = \frac{1}{2}\sigma\left(\vec{E}_{above} + \vec{E}_{below}\right)$$

برای توجیه میانگین گیری شکل زیر را در نظر بگیرید. میدان حاصل از بار خارج از سطح مورد بحث (patch) و یا میدان خارجی را با $\vec{E}_{other}$ نشان داریم



$$* \begin{cases} \vec{E}_{above} = \vec{E}_{other} + \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n} \\ \vec{E}_{below} = \vec{E}_{other} - \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n} \end{cases}$$

سطح مورد بحث آنقدر کوچک است که بردار عمود بر صفحه آن را می‌توانید متصور شوید و بار روی سطح را ثابت در نظر بگیرید.

میدان کلی را به صورت $\vec{E} = \vec{E}_{patch} + \vec{E}_{other}$

میدان patch هیچ نیرویی بر خود وارد نمی‌کند، پس نیروی حاصل میدان E_{other} است

دینامیک سطحی که در رابطه * نوشته‌ایم. حال دو رابطه * میانگین گیری می‌کنیم.

$$\vec{E}_{other} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}_{above} + \vec{E}_{below}\right) = \vec{E}_{averg}$$

پس میانگین گیری روشی بر حذف اثر patch است.

در مورد رسانا $E_{above} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}$ ، $E_{below} = 0$ ← در نتیجه $\vec{E}_{avg} = \frac{1}{2\epsilon_0}\sigma\hat{n}$

$$\underbrace{\vec{f}}_{\text{نیرو در واحد سطح}} = \vec{E}_{avg}\sigma$$

$$\vec{f} = \frac{1}{2\epsilon_0}\sigma^2\hat{n} \quad , \quad \underbrace{P}_{\text{همان فشار}} = \frac{\epsilon_0}{2}E^2$$