الکترونیک ۱

خازن ها

فرض کنید دو رسانا کی با بار $+Q$ و دیگری با بار $-Q$ مطابق شکل قرار گیرند

از آن جایی که پتانسیل بردی سطح رسانا ثابت است می توانیم از اختلاف پتانسیل آن ها صحبت کنیم

$$\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = -\int_{(-)}^{(+)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

البته تعیین مقدار این انتگرال برای رسانا های با شکل پیچیده، بسیار پیچیده باشد، حتی امکان ناپذیر. ولی می دانیم که مقدار این انتگرال متناسب با بار الکتریکی خواهد بود. طبق قانون کولن

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho}{r^2} \hat{r}\, d\tau$$

از آنجایی که $\vec{E}$ متناسب است با Q همانطور φ متناسب است با Q؛ نسبت را ظرفیت خازن "Capacitance" می نامیم.

$$C \equiv \frac{Q}{\varphi}$$

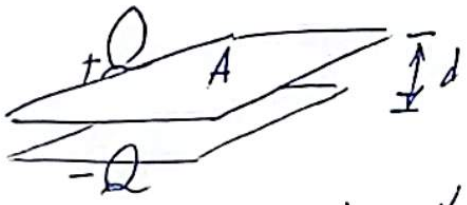
این کمیت، کمیتی هندسی است و فقط به سطح دو صفحه و فاصله سطوح و شکل آن ربط دارد.

در واحدهای SI، این کمیت را با فاراد Farad اندازه گیری می کنند

2-

۱ فاراد معادل ۱ کولن بر ۱ ولت است. البته این واحد در کاربردهای روزمره بزرگ است، و لذا picofarad (10^{-12} F) یا microfarad (10^{-6} F) استفاده می‌کنیم.

به طور مثال خازن یک خازن با صفحه موازی parallel-plate capacitor از دو صفحه فلزی به سطح A، به فاصله d از هم قرار گرفته است.



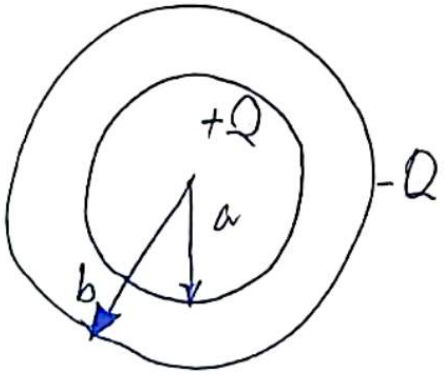
$|\vec{E}| = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{Q}{A}$ ، چگالی بار $\sigma = \frac{Q}{A}$

$$\varphi = \frac{Q}{A\epsilon_0} d, \text{ and hence } C = \frac{Q}{\varphi} = A\epsilon_0/d$$

اختلاف پتانسیل

این رابطه نشان می‌دهد که ϵ_0 را می‌توانیم در واحد $\frac{\text{farad}}{\text{m}}$ نیز اندازه بگیریم.

حال دو کره متحدالمرکز به شعاع a، b در نظر بگیرید $b > a$ بار $+Q$ را بر کره داخلی و $-Q$ را بر روی کره خارجی قرار می‌گیرد.



میدان فضای بین دو کره

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

3

$$\varphi = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

↓ از صفحه (+) به سمت بی‌نهایت

$$C = \frac{Q}{\varphi} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

↓ ظرفیت خازن

برای جا به جا کردن بار از بی‌نهایت تا سطح خازن باید کار بر روی بار انجام شود. این کار توسط نیروی خارجی (-) انجام می‌شود. از این رو طبق رابطه

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \frac{W}{Q}$$

نیروی لازم جهت جا به جایی بار dq برابر است با

$$dW = \left(\frac{q}{C}\right) dq$$

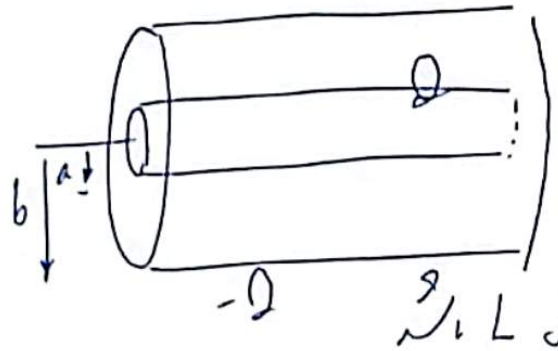
کار کل برای جا به جایی بار Q برابر است با

$$W = \int_0^Q \left(\frac{q}{C}\right) dq = \frac{1}{C}\frac{Q^2}{2}$$

از رابطه $Q = CV \rightarrow W = \frac{1}{2} C\varphi^2$

$= C\varphi$

تمرین: ظرفیت خازن دو رسانا طول دار استوانه‌ی هم مرکز را بیابید.



فرض کنید بار Q روی استوانه‌ی داخلی به طول L باشد.

میدان توسط قانون گاوس داده می‌شود.

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = E(2\pi s)L = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{enc} = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\frac{1}{s}\hat{s}$$

اختلاف پتانسیل استوانه‌ها برابر است با

$$V(b) - V(a) = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\int_a^b \frac{ds}{s}$$

$$= -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

پتانسیل خازن

$$\frac{C}{L} = \frac{Q}{VL} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{L}\Big/\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$