Special Relativity
نسبیت خاص

Fall 2025 — پاییز ۱۴۰۴

Lecture Note 15 — درس‌نامه ۱۵

در این درس‌نامه در پی آن هستیم که مفهوم نیرو به عنوان یک بردار را به مفهوم ۴-بردار ارتقاء دهیم.

نقطهٔ شروع همواره آن است که با استفاده از ۴-بردارهای از پیش تعریف شده کمیت جدیدی را بسازیم که در حدهای مورد نظر به مکانیک نیوتنی تبدیل شوند.

پیشنهاد ساده و معقول استفاده از مفهوم ۴-بردار تکانه و زمان همراه به این شکل است.

$$f^\mu \equiv \frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{dp^\mu}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dp^\mu}{dt}$$

dp^μ چاربردار است ، $d\tau$ (زمان همراه) یک ناوردای لورنتسی است؛ به درستی هم بر حسب زمان مختصاتی چارنیرو را نوشتیم. با توجه به تعریف چارتکانه و چارسرعت به شکل زیر

$$p^\mu = m_0 u^\mu \quad ; \quad u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt}$$

m_0: جرم سکون

نمایش این دو ۴-بردار به شکل زیر است.

$$\| u^\mu \| = \gamma (c, \vec{v}) \qquad \| p^\mu \| = \gamma m_0 (c, \vec{v})$$

توجه داشته باشید که علامت " " برای نمایش ۴-بردار به صورت سطری نوشتن است، که برای سادگی در نوشتار در این درسنامه و باقی درسنامه حذف شده است.

حال چاربردار نیرو را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f^{\mu} = \gamma \frac{dp^{\mu}}{dt} = \gamma m_0 \frac{d}{dt} \left(\gamma c , \gamma \vec{v} \right)$$

که فرض کرده‌ایم، جرم ثابت و ویژگی ذاتی ذرات است، و در مسائل پیش رو تغییر نمی‌کند.

یک قدم فراتر

$$f^{\mu} = \gamma m_0 \left(\dot{\gamma} c , \dot{\gamma} \vec{v} + \gamma \dot{\vec{v}} \right)$$

کمیتی که در محاسبات پیش رو بسیار مهم می‌شود کمیت $\dot{\gamma}$ است که تمایل وجود دارد هم اکنون آن را محاسبه کنیم.

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\dot{\gamma} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{c^2}\right)\left(2 \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}}{c^2} \gamma^3$$

چار بردار نیرو را می توانیم برحسب تعریف های نسبتی ۳ بردارها نیز بازنویسی کنیم.

۳ بردار تکانه نسبیتی :

$$\vec{p}_{rel} = m_0 \gamma \vec{v}$$

که $\vec{v}$ ، ۳ بردار سرعت است. در نتیجه ۳ بردار نسبیتی نیرو را به شکل زیر تعریف می کنیم.

$$\vec{F}_{rel} = \frac{d}{dt} \vec{p}_{rel} = \frac{d}{dt} (m_0 \gamma \vec{v})$$

انرژی نسبیتی نیز $E = \gamma m_0 c^2$ در نتیجه

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) = (\gamma mc, \gamma m\vec{v})$$

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dp^\mu}{dt}$$

چار بردار نیرو

$\mu = i$ قسمت فضایی $\quad f^i = \gamma \frac{dp^i}{dt} = \gamma \vec{F}_{rel}$

قسمت زمانی مولفه صفرم ۴ نیرو بردار است. هدف اثبات این رابطه است

$$\frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c} \gamma \equiv f^0$$

بدین ترتیب شروع خواهیم کرد

$$f^0 = \frac{dp^0}{d\tau} = \frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau} = \frac{\gamma}{c} \frac{dE}{dt}$$

حال باید نشان دهیم $\quad \frac{dE}{dt} \equiv \vec{F}_{rel} \cdot \vec{v}$

$$\vec{F}_{rel} \cdot \vec{v} = \frac{d\vec{P}_{rel}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt}\left(m_0 \gamma \vec{v}\right) \cdot \vec{v} \qquad (I)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\gamma m_0 c^2\right) \qquad (II)$$

حال محاسبه را از دو سمت پیش می‌بریم.

$$(I) \qquad m_0\left(\frac{d\gamma}{dt}\vec{v} + \gamma \vec{a}\right) \cdot \vec{v} = m_0\left(\frac{d\gamma}{dt} v^2 + \gamma \vec{v} \cdot \vec{a}\right)$$

که $\vec{a}$ - سه بردار شتاب نسبی است.

$$II = m_0 c^2 \frac{d\gamma}{dt}$$

از این رو به دنبال نشان دادن برابری رابطه زیر هستیم

$$\frac{d\gamma}{dt} v^2 + \gamma \vec{v} \cdot \vec{a} = c^2 \frac{d\gamma}{dt} \qquad (*)$$

داریم: $$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{c^2} \gamma^3 \qquad (**)$$

$$(*, **) \qquad c^2 \frac{d\gamma}{dt}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c^2 \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{c^2} \gamma^3 \cdot \gamma^{-2} = \gamma \vec{v} \cdot \vec{a}$$

نتیجتاً برابری رابطه * را به دست می‌دهد.

پس نتیجه بسیار مهم

$$f^{\mu} = \frac{dp^{\mu}}{d\tau} = \gamma m_0 \left(\dot{\gamma} c ,\ \dot{\gamma} \vec{v} + \gamma \dot{\vec{v}} \right)$$

و

$$f^{\mu} = \left(\gamma \frac{\vec{F}_{rel} \cdot \vec{v}}{c} ,\ \gamma \vec{F}_{rel} \right)$$

که

$$\vec{F}_{rel} = \frac{d}{dt} \left(\gamma m \vec{v} \right) = \frac{d}{dt} \left(\vec{P}_{rel} \right)$$

حال اگر روی قسمت فضایی نیرو تمرکز شویم :

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^{3} \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^{2}}$$

$$\vec{F}_{rel} = \gamma m_0 \left[\vec{a} + \gamma^{2} \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})}{c^{2}} \vec{v} \right]$$

ترم داخل کروشه به دلیل روابط جبری حاکم بر γ می تواند به شکل مناسب تری نوشته شود

پیشنهاد :
$$\vec{a} + \frac{\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{a})}{c^{2}} = \vec{a} + \frac{\vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{a})}{c^{2}} - \frac{\vec{a} v^{2}}{c^{2}}$$

با استفاده
$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$= \vec{a} \left(1 - \frac{v^{2}}{c^{2}} \right) + \frac{\vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{a})}{c^{2}} = \frac{1}{\gamma^{2}} \left[\vec{a} + \frac{\vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{a})}{c^{2}} \gamma^{2} \right]$$

نتیجه نهایی

$$\vec F = \frac{d}{dt}\left(\gamma m \vec v\right) = \frac{d\vec P_{rel}}{dt} = \gamma m_0 \left(\vec a + \gamma^2 \frac{\vec v \cdot \vec a}{c^2}\vec v\right)$$

$$= m\gamma^3\left(\vec a + \frac{\vec v \times [\vec v \times \vec a]}{c^2}\right)$$

اگر نیرو موازی با سرعت باشد، $\vec v \times \vec a = 0$ در این صورت

$$\vec F = m_0\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\frac{d\vec v}{dt}$$

در این راستا مسئله را واکاوی کنیم. فرض کنید بار q به جرم m، تحت میدان $\vec E$ در راستای x حرکت کند
با توجه به توضیح ۳ـ بردار نیروی نسبیتی، مسیر ذره را بدست آورید. شرایط اولیه در $t=0$ را به صورت $x=0$، $v=0$
در نظر بگیرید.

$$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = \vec F\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{q\vec E}{m}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

شتاب با جهت هم راستا است.

$$\frac{qE}{m} \equiv \tilde a \quad \rightarrow \quad \tilde a t = \int_0^{v(t)} \frac{dv'}{\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

$$v(t) = \frac{\tilde a t}{\sqrt{1 + \left(\frac{\tilde a t}{c}\right)^2}}$$

به جواب حرکت هذلولوی بیافتیم

$$V(t) = \frac{\tilde{a}t}{\sqrt{1+\left(\frac{\tilde{a}t}{c}\right)^2}}$$

اگر $t \to \infty$ در این صورت v به سمت c می‌رود!

اگر $\tilde{a}t \ll c$ جواب غیرنسبیتی را به دست خواهیم آورد $v(t) \simeq \tilde{a}t$

حال برای مکان

$$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow x(t) = \int_0^t v(t')\,dt'$$

$$x(t) = \frac{c^2}{\tilde{a}}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\tilde{a}t}{c}\right)^2} - 1\right)$$

در حد $t \to \infty$ جواب $x \to ct$ را خواهیم داشت. در حد غیرنسبیتی $\tilde{a}t \ll c$

$$x(t) \simeq \frac{1}{2}\tilde{a}t^2$$