به نام او

میان‌ترم آنالیز ریاضی ۱ **۸۷/۲/۱۲** **مدت امتحان: ۳ ساعت**

۱- ثابت کنید سه تعریف زیر برای $\limsup$ دنباله $\{x_n\}$ معادل هستند.

الف- $\limsup x_n := \lim k_n$ که $k_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$.

ب- $\limsup x_n := \sup\{a \mid$ زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ به a همگرا است$\}$

ج- $\limsup x_n = x^*$ که x^* دارای خواص زیر است:

- برای هر $\varepsilon > 0$، از یک جا به بعد داریم: $x_n < x^* + \varepsilon$
- برای تعداد نامتناهی جمله داریم: $x^* - \varepsilon < x_n$

۲- ثابت کنید آزمون ریشه برای همگرایی سریها قوی‌تر آز ازمون نسبت است. یک مثال بزنید که همگرایی آن با آزمون ریشه نشان داده شود، اما با ازمون نسبت نتوان آن را اثبات کرد.

۳- توضیح دهید چگونه و در چه مواقعی ضرب دو سری عددی $\sum a_n$ و $\sum b_n$ تعریف می‌شوند. با یک مثال نشان دهید که در بعضی از حالتها نمی‌توان ضرب را تعریف کرد.

۴- ثابت کنید تعداد نقاط ناپیوستگی هر تابع یکنوا شمارا است.

۵- فاصله هر نقطه از فضای متریک M تا زیرمجموعه A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$$

هم‌چنین اگر $B \subseteq M$، فاصله دو مجموعه A و B را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$d(A, B) := \inf\{d(x, A) \mid x \in B\}$$

الف- نشان دهید تابع $x \mapsto d(x, A)$ به طور یکنواخت پیوسته است.

ب- آیا رابطه $d(A, B) = \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ درست است؟ (با استدلال یا مثال نقض)

ج- اگر A بسته باشد و B فشرده و $A \cap B = \varnothing$، آنگاه دو زیرمجموعه باز U و V وجود دارند که $A \subseteq U$، $B \subseteq V$ و $U \cap V = \varnothing$.

د- آیا گزاره قبل برای حالتی که A و B هر دو بسته باشند، صحیح است؟