به نام او

۸۴/۱۱/۳

امتحان پایان ترم درس نظریه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای .

۱ـ قضیه مقدار میانگین را برای توابع هارمونیک اثبات نمائید .

۲ـ ثابت کنید هر جواب کلاسیک معادله حرارت ، تابعی هموار است .

۳ـ اصل ماکزیمم قوی را برای یک عملگر سهموی در حالت $c \geq 0$ اثبات نمائید .

۴ـ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ دیسک واحد حول مبدأ مختصات است. اگر $u \in C^1(\Omega)$ جواب معادله زیر باشد :

$$a(x,y)\,u_x + b(x,y)\,u_y + u = 0 \qquad \text{in } \Omega$$

و روی مرز $\Omega$ رابطه زیر برقرار باشد

$$a(x,y)\,x + b(x,y)\,y > 0$$

ثابت کنید $u \equiv 0$ درون $\Omega$ .

۵ـ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ناحیه‌ای هموار است . اگر $u$ جواب معادله زیر باشد :

$$\Delta u + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,u_{x_i} = f \qquad \text{in } \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega$$

ثابت کنید از شرط $f \geq 0$ در $\Omega$ نتیجه می‌شود $f \equiv 0$ .

۶ـ الف ) ثابت کنید اگر محمل یک توزیع ، مجموعه $\{0\}$ باشد ، آنگاه آن ترکیب خطی توزیع دلتا و مشتقات آن است .

ب ) (تعمیم قضیه لیوویل ) اگر $u$ یک تابع هارمونیک در $\mathbb{R}^n$ باشد و دارای کران $|u(x)| \leq C(1+|x|)^N$ برای مقادیر ثابت $C$ و $N > 0$ باشد ، ثابت کنید $u$ یک چندجمله‌ای است . (راهنمائی : ابتدا ثابت کنید $\hat{u}$ یک توزیع متعادل است .)

در امتحانات واقعی زندگی موفق باشید .