یک الگوریتم تقریبی برای انتشار در کمترین زمان به کمک شارهٔ بیشینه

امید خوانساری‌نیا محمّد قدسی

دانشکدهٔ مهندسی کامپیوتر، دانشگاه صنعتی شریف
ghodsi@sharif.edu, khansary@ce.sharif.edu

چکیده

این مقاله به مسألهٔ انتشار در کمترین زمان در شبکه‌های با مدل ارتباط تلفنی می‌پردازد. پس از بیان صورت مسأله و مرور بر الگوریتمهای تقریبی که تاکنون طراحی شده‌اند، یک الگوریتم تقریبی جدید ارائه می‌گردد که جواب حاصل از آن نسبت به جواب بهینه، حداکثر به میزان $O(\sqrt{n})$ بیشتر می‌باشد. ویژگی این الگوریتم، استفاده از تکنیک یافتن شارهٔ بیشینه می‌باشد که رهیافتی جدید در مقایسه با روشهای بکار رفته در الگوریتمهای تقریبی موجود است. در نهایت نیز مقایسه‌ای بین الگوریتم جدید و بهترین الگوریتم موجود انجام می‌شود.

واژه‌های کلیدی: انتشار در شبکه، گراف شاره، الگوریتم تقریبی

۱ مقدمه

یکی از مهمترین کمیتهای بیانگر کارآیی در یک شبکهٔ ارتباطی، سرعت انتقال پیام مابین عناصر شبکه است. تحقیقات بسیاری برای طراحی روشهای کمینه‌سازی تأخیر پیامی انجام گرفته که از آن جمله، زمان انتشار[۱] در یک شبکه می‌باشد.

در این مقاله، شبکه بوسیلهٔ یک گراف متصل با مدل ارتباطی تلفنی در نظر گرفته می‌شود. در این مدل ارتباطی، واحد تبادل یک پیام بر روی خط ارتباطی (لبهٔ گراف)، *call* نامیده می‌شود و محدودیتی برای میزان اطلاعات مبادله شده در طی یک *call* وجود ندارد. یک *round* مجموعه‌ای از *call*های انجام شده به طور همزمان است. هر *round* یک واحد زمانی طول می‌کشد و به عبارت دیگر $round_t$ از زمان $t-۱$ آغاز و در زمان t تمام می‌شود. در هر *round*، اگر یک *call* بر روی لبهٔ e قرار گیرد، e یک لبهٔ فعال و در غیر این صورت یک لبهٔ بیکار است. زمانبندی، مجموعهٔ قوانین مدیریت فعال‌سازی لبه‌ها در هر *round* است.

مسألهٔ انتشار به فرآیندی اطلاق می‌گردد که در آن

[۱] broadcast time

گره v به عنوان آغازکنندهٔ عمل انتشار، باید پیام M را به مابقی گرههای شبکه ارسال کند. کارآیی یک عمل انتشار معمولاً با تعداد واحدهای زمانی لازم برای تکمیل آن سنجیده می‌شود. اگر S به مفهوم زمانبندی به کار رفته برای انتشار در گراف G باشد، زمان انتشار از گره v مطابق زمانبندی S با $b(v,G,S)$ نمایش داده می‌شود. $b(v,G)$ به معنای زمان انتشار از گره v در G است که برابر کمترین زمان انتشار یک پیام با شروع از گره v در گراف G، به ازای تمام زمانبندیهای ممکن S است. یعنی:

$$b(v,G) = min_S\{b(v,G,S)\}\ ,$$

$$b(G) = max_v\{b(v,G)\}$$

در صورت عدم وجود ابهام، از $b(v)$ به جای $b(v,G)$ استفاده می‌شود.

در شبکهٔ $G=(V,E)$ با گره u به عنوان گره آغازکنندهٔ انتشار، مسألهٔ زمان انتشار کمینه [۲](MBT)، انتشار یک پیام از گره u به مابقی گرهها در $b(u)$ واحد زمانی است. مسألهٔ MBT در حالت کلی یک مسألهٔ NP—تمام است و بنابراین الگوریتم قویاً چندجمله‌ای، تاکنون برای حل آن طراحی نشده است[۳]. حالت کلیتر مسألهٔ انتشار آن است که به جای یک گره، زیرمجموعه‌ای از گرههای گراف (مانند $V_\circ$) در ابتدا پیام را در اختیار داشته و می‌توانند آغازکنندهٔ عمل انتشار باشند (مسألهٔ SMBT[۳]). این مسأله، حتی برای مقدار $k=۴$ که در آن k حداکثر تعداد واحدهای زمانی برای اتمام عمل انتشار است، NP—تمام می‌باشد [۳].

بهترین الگوریتم موجود برای مدل مورد بحث در این مقاله، الگوریتمی با ضریب تقریب $O(\log^۲ n/\log\log n)$ می‌باشد[۲، ٦]. الگوریتم جالب دیگر برای حالتی که شبکه، درختی از زیرگرافهای کامل است در [۴] آمده است. برای این حالت یک الگوریتم تقریبی وجود دارد که جواب حاصل از آن نسبت به جواب بهینه، حداکثر به میزان $O(\log^۲ n)$ بیشتر است. همچنین روشهای دیگری نیز ارائه گردیده است.

در روش برنامه‌ریزی پویا، در هر *round*، پیام از گرههای فرستنده به گرههای گیرنده ارسال می‌گردد. از آنجا که *call*ها بر روی لبه‌های غیرمجاور قرار دارند، بنابراین لبه‌های فعال در هر *round* یک تطابق مابین گرههای فرستنده و گیرندهٔ پیام به وجود می آورند. معمولاً بهتر است که پیام در ابتدا به گرههایی با ویژگیهای خاص ارسال شود. مثلاً گرههایی که درجهٔ آنها در بین تمامی گرههای گیرندهٔ پیام بیشینه باشد. در مرجع [۴] ثابت شده است که این الگوریتم شبه چندجمله‌ای است و استفاده از این روش می‌تواند تا $\sqrt{n}$ برابر، جواب بدتر تولید کند. پس به کارگیری روش برنامه ریزی پویا قابل اطمینان نمی‌باشد ولی می‌توان نتیجه گرفت که الگوریتم FPAS برای حل مسألهٔ MBT وجود دارد.

یکی از روشهای مهم در ارتباط با مسائل بهینه‌سازی در گرافها، روش تقسیم و غلبه است. هدف یافتن مجموعهٔ کوچکی از گرههاست (SepV) به گونه‌ای که حذف آنها، مؤلفه‌های همبند با اندازه‌های تقریباً یکسان به وجود آورده و سپس هر مؤلفه، جداگانه به صورت بازگشتی حل می‌شود. متأسفانه، کارآیی این روش برای گرافهایی که مجموعهٔ SepV بزرگی دارند مناسب نیست. در مرجع [۵] ثابت شده است که یک الگورریتم تقریبی با ضریب تقریب $O(\log n)\phi(n)$ برای حل مسألهٔ کمترین زمان انتشار در یک گراف $<\rho,\phi(n)>-Separable$ وجود دارد.

در این مقاله با کمک شارهٔ بیشینه، ایدهٔ جدیدی در طراحی الگوریتم تقریبی برای حل مسألهٔ MBT ارائه گردیده است. برای این منظور ابتدا مفهومی به نام تابع کنترل [۴] معرفی شده و سپس الگوریتمی شبه چندجمله‌ای برای حل مسألهٔ تابع کنترل کمینه[۵] (MFC) با استفاده از گراف شاره طراحی گردیده است. در نهایت با تقسیم مجموعهٔ گرههای گراف G به چند دسته و بکارگیری الگوریتم طراحی شده برای حل مسألهٔ MFC، یک الگوریتم تقریبی جدید معرفی می‌شود که جواب حاصل

[۲] Minimum Broadcast Time
[۳] Subset Minimum Broadcast Time
[۴] Function Control
[۵] Minimum Function Control

از آن نسبت به جواب بهینه حداکثر به میزان $O(\sqrt{n})$ بیشتر می‌باشد و در اکثر حالات دارای ضریب تقریب $(3\sqrt{n}/\lceil\sqrt{n}\rceil + 2) \le 5$ است.

در بخش دوم این مقاله تعاریف و مقدمات لازم برای بیان الگوریتم جدید طراحی شده، ارائه می‌گردد. در بخش سوم، تعریف تابع کنترل و الگوریتمی برای حل مسألهٔ MFC آورده شده که از آن در الگوریتم جدید استفاده خواهد شد. در بخش چهارم، الگوریتمِ جدیدِ طراحی شده و قضایای لازم برای اثبات میزان تقریب جواب حاصل از آن، بیان می‌شود. در بخش انتهایی نیز نتیجه‌گیری ارائه شده است.

۲ تعاریف مورد نیاز

در این مقاله از علائم و مفاهیم زیر برای شرحِ رفتار شبکه استفاده می‌گردد. شبکه به وسیلهٔ گراف $G = (V, E)$ نمایش داده می‌شود که تعداد گرههای آن برابر n است. برای هر دو گره $u, v \in V$ تعداد لبه‌های موجود در کوتاهترین مسیر از v به w در G، با $dist(v, w)$ بیان می‌گردد. همچنین قطر گره v برابر $Diam(v) = max_w \, dist(v, w)$ و قطر گراف G برابر $Diam(G) = max_w \, Diam(v)$ است.

فرض کنید $V' \subseteq V$ باشد. زیرگراف $G' = (V', E')$ با لبه‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\forall \ u, v \in V' : (u, v) \in E \Rightarrow (u, v) \in E'$$

چنانچه G' یک گراف متصل باشد در آن صورت به V' یک خوشه[6] گفته می‌شود. دو خوشهٔ V' و V''، جداازهم هستند اگر و فقط اگر $V' \cap V'' = \emptyset$. همچنین دو خوشهٔ جداازهمِ C_1 و C_2 مستقل هستند اگر هیچ لبه‌ای در گرافِ G موجود نباشد که گرهی از C_1 را به گرهی از C_2 وصل کند.

تعریف ۱. فرض کنید که $S \subset V$ زیرمجموعه‌ای از گرههای گراف G باشد. زیردرخت $T = (V_1, E_1)$ از گراف G با ریشهٔ $v_0 \in V$، درخت کوتاهترین مسیرها[7] (SPT) است اگر و فقط اگر $S \subseteq V_1$، هر مسیر از v_0 به $v_i \in S$ در T، کوتاهترین مسیر متناظر در G بوده و هر برگ T متعلق به S باشد. SPT با گره ریشهٔ v_0 و مجموعهٔ S با $SPT(v_0, S)$ نمایش داده می‌شود.

اکنون تعریف گراف کنترل، برای مجموعهٔ $V_0 \subseteq V$ بیان می‌شود که از آن در الگوریتم تقریبی جدید استفاده می‌گردد.

تعریف ۲. فرض کنید که خوشه‌های تشکیل شده با حذف V_0 از گراف G، مجموعهٔ $\{C_1, ..., C_k\}$ باشد. گراف کنترل V_0 در G، گراف دوبخشی $D_{V_0,G} = (V_1, V_2, A)$ است که در آن $V_1 = V_0$، $V_2 = \{C_1, ...C_k\}$ و A شامل لبهٔ (v, C_i) است اگر و فقط اگر لبه‌ای مابین v و گره دلخواهی از C_i در گراف G موجود باشد.

تعریف صوری مسألهٔ MBT بدین صورت می‌تواند بیان گردد. یک انتشار از گره $v_0 \in V$، دنبالهٔ

$$\{v_0\} = V_0, E_1, V_1, E_2, ..., E_k, V_k = V$$

است به طوری که برای هر $1 \le i \le k$ شرایط زیر برقرار باشد:

۱) $V_i \subseteq V$ و $E_i \subseteq E$.

۲) فقط یکی از دو رأس هر لبهٔ موجود در E_i، در V_{i-1} باشد.

۳) مجموعه E_i یک مجموعهٔ مستقل[8] از لبه‌هاست.

۴) $V_i = V_{i-1} \cup \{v : (u, v) \in E_i\}$.

در چنین حالتی گفته می‌شود که عمل انتشار در k واحد زمانی انجام می‌گیرد. مسألهٔ MBT یافتن کوچکترین مقدار k است طوری که عمل انتشار در k واحد زمانی ممکن باشد. این مقدار k با $b(v_0, G)$ نمایش داده می‌شود.

برای هر گره متصل G با گره آغازین u برای انتشار، $b(u) \ge \lceil \log n \rceil$، چرا که در هر واحد زمانی تعداد گرههای گیرندهٔ پیام حداکثر دو برابر می‌شود. حد پایین دیگر برای $b(u)$ به صورت $b(u) \ge Diam(u)$ است، چرا که هر گره در هر *round* فقط می‌تواند اطلاعات را به گره مجاور خود انتقال دهد. گراف $G = K_n$

---

[6] cluster

[7] Shortest Path Tree

[8] disjoint set

(گراف کامل شامل n گره) مثالی از یک گراف با رابطهٔ $b(G) = \lceil \log n \rceil$ است. همچنین انتشار از گره آغازین u یک درخت پوشا را با ریشهٔ u مشخص می‌سازد. در این درخت پوشا، پدر گره v پیام را به گره v منتقل می‌کند. بنابراین در هر واحد زمانی به مجوعهٔ گرههای گیرندهٔ پیام حداقل یک گره افزوده می‌شود. پس در هر شبکهٔ G، $b(G) \leq n - ۱$. این حد بالا را نمی‌توان کاهش داد، برای مثال در گراف $G = S_n$ (گراف ستاره‌ای شامل n گره) زمان انتشار برابر $n - ۱$ است.

۳ مسألهٔ تابع کنترل کمینه (MFC)

فرض کنید که $G = (V_۱, V_۲, A)$ یک گراف دوبخشی با افرازهای $(V_۱, V_۲)$، مجموعهٔ لبه‌های A، تابع وزن $w : A \to Z^+$ و بدون هیچ گره منفصلی باشد. یک جواب امکان‌پذیر برای مسألهٔ MFC، تابع کنترل $F : V_۲ \to V_۱$ است که در آن $F(v_۲) = v_۱ \Rightarrow (v_۱, v_۲) \in A$. هرگره $v_۱ \in V_۱$، کارگزار و هر گره $v_۲ \in V_۲$، کارفرما نامیده می‌شود. اگر $F(v_۲) = v_۱$ باشد آنگاه گفته می‌شود که $v_۱$، $v_۲$ را کنترل می‌کند.

تعریف ۳. گراف دوبخشی $G = (V_۱, V_۲, A)$ و تابع کنترل F را در نظر بگیرید. فرض کنید k گره کارفرمای کنترل شده توسط گره کارگزار $v \in V_۱$، با نماد $D_k(v), \ldots, D_۱(v)$ و لبه‌های بین گره کارگزار و گرههای کارفرما با $e_i^v = (v, D_i(v))$ مشخص شوند. همچنین فرض کنید (بدون لطمه به کلیت مسأله) که گرههای کارفرما برای هر مقدار i به صورت غیرصعودی مرتب شده‌اند، یعنی $w(e_i^v) \geq w(e_{i+۱}^v)$. وزن تابع F بدین شکل تعریف می‌شود:

$$W(F) = max_{v \in V_۱}\{max_i\{i + w(e_i^v)\}\}$$

اکنون می‌توان مسألهٔ MFC را تعریف کرد. در گراف دوبخشی $G = (V_۱, V_۲, A)$، تابع کنترل $F : V_۲ \to V_۱$ را به گونه‌ای بیابید که $W(F)$ کمینه گردد. این تابع، تابع کنترل کمینهٔ G نامیده می‌شود. توجه شود که در این مقاله وزن لبه‌ها در شرط $w(e) \leq n$ صدق می‌کنند.

اساس راه حل این مسأله، استفاده از الگوریتم ۱ است. این الگوریتم برای گراف معلوم $G = (V_۱, V_۲, A)$ و عدد صحیح j بررسی می‌کند که آیا یک تابع کنترل F برای G با وزن $W(F) \leq j$ وجود دارد؟ سپس از این الگوریتم برای جستجوی تابع کنترل کمینه بر روی مقادیر ممکن j استفاده می‌شود. روش به کار رفته بر مبنای تکنیکهای یافتن شارهٔ بیشینه است. این الگوریتم، گراف شارهٔ FG_j را بر پایهٔ G و j می‌سازد، با این ویژگی که G دارای یک تابع کنترل F با وزن $W(F) \leq j$ است اگر و فقط اگر در FG_j امکان انتقال شاره به میزان $| V_۲ |$ واحد از منبع به مقصد ممکن باشد.

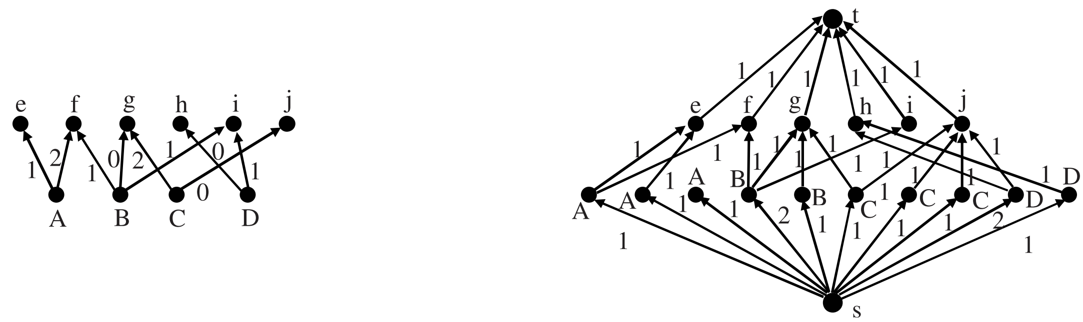
گراف شارهٔ FG_j با این روش ایجاد می‌گردد: دو گره منبع s و مقصد t به گراف G افزوده می‌شود. واضح است که در هر تابع کنترل F با وزن j، کارگزار v نمی‌تواند کارفرمای u را با شرط $w(u, v) \geq j$ کنترل کند. فرض کنید که w_v بزرگترین وزن لبه‌ای از لبه‌های مجاور به گره $v \in V_۱$ است که مقدار آن کوچکتر یا مساوی $j - ۱$ می‌باشد. از گره v به تعداد $w_v + ۱$ گره، کپی ایجاد می‌شود. برای کپی اول $(v_۱)$، لبهٔ جهتدار $(s, v_۱)$ با وزن $j - w_v$ و لبه‌های جهتدار $(v_۱, u)$ با وزن ۱ از گره $v_۱$ به گرههای $u \in V_۲$ با شرط وجود لبهٔ $(u, v) \in A$ رسم می‌گردد. برای هر v_i (کپی $i \geq ۲$ ام از گره v)، لبهٔ جهتدار (s, v_i) با وزن ۱ و نیز لبه‌های جهتدار $(v_۱, u)$ با وزن ۱ از گره v_i به گرههای $u \in V_۲$ با شرایط $(u, v) \in A$ و $w(u, v) \leq w_v - i + ۱$ رسم می‌شود. در نهایت نیز برای هر گره $u \in V_۲$، لبهٔ جهتدار (u, t) با وزن ۱ ایجاد می‌گردد. شکل ۱ مثالی از گراف G و گراف شارهٔ متناظر $FG_۳$ را نشان می‌دهد.

الگوریتم ۱

ورودی: گراف $G = (V_۱, V_۲, A, w)$ و عدد صحیح مثبت j.

۱) ایجاد گراف شارهٔ FG_j.

۲) محاسبهٔ شارهٔ بیشینه در FG_j از گره s به گره t.



شکل ۱: گراف G و گراف شارهٔ متناظر FG_3

از آنجا که دقیقاً $|V_2|$ لبه با وزن ۱ به گره t وارد شده است، مقدار شارهٔ بیشینه نمی‌تواند از $|V_2|$ بیشتر شود. لم زیر به راحتی قابل اثبات است.

لم ۱. مسألهٔ MFC را بر روی گراف G و گراف شارهٔ متناظر FG_j در نظر بگیرید (که طبق الگوریتم ۱ برای j خاصی ایجاد شده است). مقدار شارهٔ بیشینه از s به t در FG_j برابر $|V_2|$ است اگر و فقط اگر تابع کنترل F برای G با شرط $W(F) \leq j$ موجود باشد. تابع کنترل F برای G از شاره‌های تخصیص داده شده به لبه‌های FG_j بدست می‌آید.

اکنون تابع کنترل کمینه می‌تواند با کمک الگوریتم ۱ و جستجوی دودویی در محدودهٔ مقادیر امکان‌پذیر j حاصل گردد. الگوریتم ۲ این کار را انجام می‌دهد:

الگوریتم ۲

۱) مقداردهی اولیه: $j_1 \leftarrow min_e\{w(e)+1\}$ و $j_2 \leftarrow max_e\{w(e)\} + |V_2|$.

۲) تکرار مراحل زیر تا زمانی که $j = j_2 \leq j_1 + 1$:

۲—۱) $j \leftarrow \lceil (j_1 + j_2)/2 \rceil$.

۲—۲) اعمال الگوریتم ۱ بر روی G با مقدار j.

۲—۳) اگر شارهٔ بیشینه برابر $|V_2|$ است (یعنی تابع کنترل F با وزن j وجود دارد) آنگاه $j_1 \leftarrow j$، در غیر این صورت $j_2 \leftarrow j$.

۳) بازگرداندن تابع کنترل F متناظر با شارهٔ بیشینهٔ محاسبه شده در FG_j.

واضح است که با اجرای این الگوریتم، تابع کنترل کمینهٔ F با وزن $W(F) = j_1$ (برای مقدار نهایی j_1) به دست می‌آید. تعداد دفعات تکرار در الگوریتم ۲، چندجمله‌ای است ولی از آنجا که تعداد کپی‌های یک گره در FG_j به مقدار وزن لبه‌ها در G وابسته است، بنابراین پیچیدگی زمانی این روال بر حسب ورودی، قویاً چندجمله‌ای نمی‌باشد و در نتیجه یک الگوریتم شبه چندجمله‌ای برای حل مسألهٔ MFC وجود دارد.

۴ الگوریتم تقریبی جدید برای حل مسألهٔ MBT

روش بکار رفته در این الگوریتم بر پایهٔ تقسیم مجموعهٔ گرههای گراف G به خوشه‌هایی با اندازه $\lceil\sqrt{n}\rceil$ و انتشار در هر کدام به صورت جداگانه است. ابتدا ابزارهای مختلفی که در این الگوریتم مورد نیاز است، شرح داده می‌شود. اساس الگوریتم جدید تقسیم گرههای گراف مطابق لم زیر است.

لم ۲. مجموعهٔ گرههای گراف $G = (V, E)$ می‌تواند در زمان چندجمله‌ای به دو مجموعه از خوشه‌های A و B تقسیم شود به گونه‌ای که $|A| \leq \sqrt{n}$، خوشه‌ها در $A \cup B$ دوبه‌دو جداازهم بوده، $(\cup A) \cup (\cup B) = V$، اندازهٔ هر خوشهٔ $C' \in A$ برابر با $\lceil\sqrt{n}\rceil$، حداکثر اندازهٔ هر خوشهٔ $C' \in B$ برابر با $\sqrt{n}$ و خوشه‌های موجود در B دوبه‌دو مستقل از هم باشند.

اثبات. اثبات این لم مستقیماً با ایجاد دو مجموعهٔ A و B مطابق الگوریتم ۳ ارائه می‌گردد که در زیر آمده است:

الگوریتم ۳

۱) در ابتدا $X \leftarrow \{V\}$، $A \leftarrow \emptyset$ و $B \leftarrow \emptyset$.

۲) تکرار مراحل زیر تا زمانی که $X = \emptyset$ گردد:

۲—۱) انتخاب یک خوشهٔ C در X و زیرخوشهٔ دلخواه (متصل) C' از C به گونه‌ای که $|C'| = \lceil\sqrt{n}\rceil$.

۲—۲) حذف C' از C و $A \leftarrow A \cup \{C'\}$ (اکنون $C - C'$ از خوشه‌های مستقل تشکیل شده است).

۲—۳) افزودن مؤلفه‌های متصل $\{C'' \mid C'' \subseteq C - C', |C''| = \lceil\sqrt{n}\rceil\}$ به A.

۲—۴) افزودن مؤلفه‌های متصل $\{C'' \mid C'' \subseteq C - C', |C''| > \lceil\sqrt{n}\rceil\}$ به X.

۲—۵) افزودن مؤلفه‌های متصل باقیمانده در $C - C'$ به B.

در این الگوریتم سه مجموعهٔ مختلف از خوشه‌ها به نامهای A، B و X وجود دارد. واضح است که تمام خوشه‌ها در A دقیقاً دارای $\lceil\sqrt{n}\rceil$ گره هستند. بنابراین تعداد خوشه‌ها در A نمی‌تواند از $\sqrt{n}$ بیشتر شود. همچنین مشخص است که تعداد گرهها در هر خوشهٔ B از $\sqrt{n}$ بیشتر نیست.

برای اثبات این مطلب که خوشه‌ها در B مستقل هستند، کافیست نشان داده شود که در هر مرحله از اجرای الگوریتم، تمام خوشه‌های موجود در $X \cup B$ مستقل می‌باشند. اثبات به وسیلهٔ استقرای ریاضی روی تعداد مراحل اجرای الگوریتم انجام می گیرد. در ابتدا $B = X = \emptyset$ و در نتیجه برای حالت پایه استقراء حکم برقرار است. اکنون فرض کنید که پس از مرحلهٔ i ام تمامی خوشه‌های موجود در B و X دوبه‌دو مستقل باشند. در مرحلهٔ بعد، زیرمجموعه‌ای از گرههای موجود در خوشهٔ $C \in C'$ حذف می‌گردد. بنابراین گرههای باقیمانده به خوشه‌های مستقل تقسیم می‌شوند، که خوشه‌های افزوده شده به B و X زیرمجموعه‌ای از این خوشه‌ها هستند. بنابراین، حکم بنا بر فرض استقراء صحیح است. □

پیچیدگی زمانی الگوریتم ۳، $O(E\sqrt{V})$ است، چرا که بررسی خوشه‌های جدید تشکیل شده در هر مرحله از اجرای الگوریتم به میزان $O(E)$ زمان نیاز دارد. ابزار بعدی، استفاده از تابع کنترل کمینه برای انجام عمل انتشار است. فرض کنید $V' \subset V$ باشد. گراف کنترل V' در G را، $D_{V',G} = (V_1, V_2, A)$، مطابق تعریف ۲ تشکیل داده و وزن هر لبه صفر در نظر گرفته می‌شود. با این مفروضات لم زیر برقرار است.

لم ۳. فرض کنید که F، تابع کنترل کمینه برای $D_{V',G}$ باشد. در آن صورت $W(F) \leq b(V')$.

اثبات. فرض کنید S زمانبندی بهینه برای انتشار در مجموعهٔ V' در گراف G باشد. برای هر خوشهٔ $C_i \in V_2$، گرهی را در نظر بگیرید که اولین گره گیرندهٔ پیام در خوشهٔ C_i باشد. از آنجا که خوشه‌ها در C_i دوبه‌دو مستقل هستند، چنین گرهی برای هر i در V' موجود است. بنابراین طبق بحث فوق، می توان تابع F' را از V_2 به V_1 تشکیل داد. اکنون گره دلخواه $v \in V'$ را در نظر بگیرید. اگر این گره، j خوشه را کنترل کند، در آن صورت خوشهٔ $C_i \in V_2$ وجود دارد به طوری که v پیام مورد نظر را در $round_j$ (یا دیرتر) به C_i ارسال می‌کند. پس بنا بر ویژگی تابع F'، رابطه $j \leq b(V', G)$ برقرار است و در نتیجه $W(F') \leq b(V', G)$. اما وزن تابع F در شرط $W(F) \leq W(F')$ صدق می‌کند و لم اثبات می‌شود. □

آخرین ابزار، بکارگیری یک الگوریتم بهینه برای انجام عمل انتشار در یک درخت است. محاسبهٔ زمانبندی بهینه در درخت $T = (V_1, E_1)$ با شروع عمل انتشار از گره $v \in V_1$ ساده است[۱]. فرض کنید این الگوریتم بهینه، OT نامیده شود. در لم بعدی از درخت کوتاهترین مسیرهای $SPT(v, S)$ استفاده می‌گردد (تعریف ۱). واضح است که ساخت چنین درختی در زمان چندجمله‌ای بر حسب $|E|$ و با به کار گیری

الگوریتم درخت کوتاهترین مسیر آسان است. کافیست که ابتدا درخت کوتاهترین مسیر T را برای پوشش تمامی گرههای گراف ساخته و سپس به طور تکراری هر برگی از درخت T را که متعلق به S نباشد، حذف گردد (تا زمانی که دیگر چنین برگی وجود نداشته باشد).

لم ۴. ارسال یک پیام از گره v به زیرمجموعهٔ $V' \subseteq V$ از گراف G، می‌تواند حداکثر در $m - 1 + Diam(v)$ واحد زمانی انجام می‌شود که در آن $m =| V' |$ است.

اثبات. درخت دلخواه $SPT(v, V')$ را در نظر بگیرید. با کمک OT، پیام مورد نظر (M) به تمامی گرههای درخت ارسال می‌گردد. فرض کنید که u گره برگ دلخواهی باشد. باید نشان داد که گره u پیام M را در محدودهٔ زمانی مشخص شده در لم، دریافت می‌کند. این کار با برچسب‌گذاری گرهها توسط واحدهای زمانی سپری شده برای ارسال پیام M انجام می‌گیرد.

فرض کنید که در همین لحظه یکی از اجداد گره u (به نام v') پیام M را دریافت کرده است. گره v' در حال حاضر جوانترین جد گره u است که پیام M را می‌داند. حال اگر گره v' پیام M را به فرزندی بفرستد که زیردرخت T' متناظر با آن شامل گره u نباشد، گره برگ دلخواهی را در T' انتخاب کرده و این برگ با زمان فعلی برچسب می‌خورد. هنگامی که v' پیام M را به جد u بفرستد، زمان فعلی به عنوان برچسب گره v' تخصیص داده می‌شود.

واضح است که در هر واحد زمانی فقط یک گره، برچسب زمانی می‌خورد. بنابراین تعداد کل برچسبهای زمانی، دقیقاً برابر تعداد واحدهای زمانی است که قبل از رسیدن پیام M به گره u سپری شده است. همچنین هیچ برگی دو بار برچسب نخورده و گره u نیز برچسب نمی‌خورد. در نهایت هر یک از اجداد u فقط یک بار برچسب زده می‌شوند. بنابراین زمانی که لازم است تا پیام M به گره u برسد، حداکثر برابر $Diam(v)$ به اضافهٔ تعداد برگها در T (به جز گره u) است و چون هر برگ عضوی از V' می‌باشد، لم اثبات می‌شود. □

اکنون با ترکیب سه ابزار توصیف شده در لم‌های فوق، الگوریتم ۴ برای انتشار در یک گراف طراحی می‌شود.

الگوریتم ۴

۱) تقسیم گرههای V به دو مجموعه از خوشه‌های A و B به کمک الگوریتم ۳.

۲) انتخاب یک گره نمایندهٔ دلخواه (v_C) برای هر خوشه در A و تعریف $R = \{v_C \mid C \in A\}$.

۳) ارسال پیام از $v_\circ$ به تمامی گرههای R با ایجاد یک $SPT(v_\circ, R)$ دلخواه و سپس استفاده از OT برای انتشار در آن.

۴) برای هر $C \in A$ یک درخت پوشای دلخواه با ریشه v_C ایجاد کرده و سپس به کمک OT به طور موازی در هر خوشهٔ A، عمل انتشار انجام می‌گیرد.

۵) ایجاد گراف کنترل $D_{V_\circ, G}$ که $V_\circ = (\cup A) \cup \{v_\circ\}$ و محاسبهٔ تابع کنترل کمینهٔ F بر روی آن به کمک الگوریتم ۲. فرض کنید که گره v'، کارگزار خوشه‌های $C_1, \ldots, C_k \in B$ باشد. در آن صورت برای هر C_i، یک گره $v_i \in C_i$ که مجاور v' است انتخاب کرده و سپس از v' به $v_1, \ldots, v_k$ (به ترتیب دلخواه) پیام ارسال می‌شود. این کار می‌تواند به صورت موازی برای تمام گرههای کارگزار $V_\circ$ انجام شود.

۶) ایجاد یک درخت پوشای دلخواه برای هر خوشه در B به گونه‌ای که ریشهٔ آن یک گره کارگزار باشد. سپس انتشار پیام به صورت موازی در هر خوشه از B با کمک OT انجام می‌گیرد.

قضیهٔ ۱. زمان انتشار الگوریتم ۴ در گراف G حداکثر برابر $3\sqrt{n} + Diam(v_\circ) + b(v_\circ)$ واحد زمانی است که $v_\circ$ گره آغازکنندهٔ عمل انتشار می‌باشد.

اثبات. مطابق دو لم ۲ و ۴، زمان لازم برای انجام مرحلهٔ ۱) حداکثر برابر $\sqrt{n} - 1 + Diam(v_\circ)$ واحد زمانی است. از آنجا که هر خوشه در A دقیقاً $\lceil \sqrt{n} \rceil$ گره دارد، اجرای مرحله ۳) به بیش از $\sqrt{n}$ واحد زمانی نیاز ندارد. بر اساس لم ۳، $W(F) \le b((\cup A) \cup \{v_\circ\}) \le b(v_\circ)$. بنابراین مرحلهٔ ۴) بیشتر از $b(v_\circ)$ واحد زمانی برای اجرا

صرف نمی‌کند. در نهایت چون اندازهٔ خوشه‌های موجود در B حداکثر برابر $\sqrt{n}$ هستند، اجرای مرحلهٔ ۵) حداکثر به $\sqrt{n} - ۱$ واحد زمانی نیاز دارد. $\square$

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله به مسألهٔ انتشار در کمترین زمان، در شبکه‌های با مدل ارتباطی تلفنی پرداخته شد. پس از تعریف دقیق مسأله و مرور بر روشهای بکار رفته در طراحی الگوریتمهای تقریبی برای حل آن، الگوریتم جدیدی به کمک شارهٔ بیشینه ارائه شده که جواب حاصل از آن نسبت به جواب بهینه، حداکثر به میزان $O(\sqrt{n})$ بیشتر می‌باشد. بنابراین هرگاه زمان انتشار در یک شبکه $\Omega(\sqrt{n})$ باشد، الگوریتم ۴ تبدیل به الگوریتمی با ضریب تقریب عدد ثابت می‌گردد. برای مثال، در شبکه‌ای که قطر آن حداقل $\sqrt{n}$ است، ضریب تقریب این الگوریتم، ۵ خواهد بود. ولی از آنجا که در حالت کلی، معمولاً زمان انتشار بهینه در یک گراف، نزدیک به $\lceil \log n \rceil$ است پس در حالت کلی این الگوریتم دارای ضریب تقریب $(۳\sqrt{n}/\lceil \sqrt{n} \rceil + ۲)$ یا $O(\sqrt{n}/Diam(G))$ است. در نتیجه این الگوریتم برای شبکه‌های با قطر کوچک دارای ضریب تقریب خوبی نیست. اخیرترین الگوریتم تقریبی ارائه شده برای مسألهٔ MBT دارای ضریب تقریب $O(\log^۲ n/\log\log n)$ است. این الگوریتم بنابر قضیهٔ ۱ برای گرافهایی که زمان انتشار آنها $O(\sqrt{n}\log\log n/\log^۲ n)$ یا کمتر است، مناسبتر می‌باشد. بنابراین برای گرافهای با زمان انتشار بیشتر، الگوریتم جدید ارائه شده بهتر عمل می‌کند.

مراجع

[1] J. Cohen, P. Fraigniand, and M. Mitjana, *Scheduling calls for multicasting in tree networks,* In 10th ACM-SIAM Symposium On Discrete Algorithms (SODA '99), pages 881-882, 1999.

[2] P. Fraigniand, *Minimum-time broadcast under the edge-disjoint paths mode,* In 2ed Int. Conference on Fun with Algorithms (Fun '01), Carleton Scientific, 2001.

[3] M. R. Garey and D. S. Johnson, Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness, W. H. Freeman and Company, San Francisco, CA, 1979.

[4] G. Kortsarz and D. Peleg, *Approximation algorithms for minimum time broadcast,* SIAM Journal on Discrete Mathematics, 8(3): 401-427, 1995.

[5] G. Miller, *Finding small simple cycle separators for 2-connected planar graphs*, Journal of Computer Systems and Science, 32: 265-279, 1986.

[6] C. Schindlhauer, *On the inapproximability of broadcasting time,* In 3rd Int. Workshop on Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization Problems (APPROX), LNCS 1913, Springer-Verlog, 2000.