فصل ۱ – معرفی روش‌های بهینه‌یابی

مقدمه

این جزوه در باب روش‌هایی برای یافتن مقدار بهینه (بیشترین یا کمترین) یا تابع بهینه با n متغیر حقیقی نگاشته شده‌است . شاید به‌جرأت بتوان گفت که بهینه‌سازی یا بهینه‌یابی یعنی تعیین بهترین حالت بدون تکرار و ارزیابی تمام حالات ممکن. گسترهٔ نسبتاً وسیعی از مسائل طراحی، ساخت، عملیات و تحلیل کمّی مبتلابه در علوم مهندسی، کاربردی و حتی محض با روش‌های بهینه‌سازی درگیر می‌شوند. شاید اوّلین دانشمندی که به فرمولاسیون یک مسئله بهینه‌سازی پرداخت، اقلیدس(Euclid) در ۳۰۰ سال قبل میلاد باشد. مسئلهٔ مرتبط او یافتن کوتاه‌ترین مسیر (مسافت) یک نقطه تا خط بوده‌است. در سال 1657 ، فرما (Fermat) موفّق به یافتن قانون ضریب شکست نور شد، بطوریکه مسئلهٔ و نکتهٔ اصلی در این مسئلهٔ بهینه‌سازی بود که نور مسیر کوتاهترین زمان را طی می‌کند. در سال 1875، گیبس(Gibbs) قانونی را بیان کرد که اساس تعادلات فازی و ترمودینامیک مخلوط‌ها می‌باشد. این قانون می‌گوید برای یک سیستم در حال تعادل فیزیکوشیمیایی، انرژی آزاد مینیمم است. در سال 1940، الگوریتم زیمپلکس (Simplex) توسط یک افسر وظیفه آلمانی‌تبار به‌نام دانتزیگ (Dantzig) ابداع شد و در طول جنگ جهانی در مسائل لجستیکی و ترابری بهینه به‌کار گرفته‌شد. در زمینه بهینه‌سازی دینامیکی (یافتن تابع بهینه) نیز به‌طور عندالمثال می‌توان به مسئله مینیمم دراگ (Shape Drag) اجسام نوک‌تیز توسط رائو اشاره کرد. تا قبل از حل این مسئله، دماغه کشتی‌ها و موشک‌های برگشتی دارای ساختار نوک‌تیز و مخروطی بودند ولی رائو(Rao) به‌طور تحلیلی اثبات کرد که شکل بهینه آن به‌جای مخروط باید شلجمی (مقطع سهموی) باشد. اختلاف شکل آپولو 10 (Apollo 10) و آپولو 11 (Apollo 11) حامل سرنشین ناشی از این امر می‌باشد.

بعد از پیشرفت سخت‌افزاری کامپیوترهای سریع‌المحاسب و به‌موازات نیاز روزافزون صنعت در زمینه طراحی، ساخت و بهره‌برداری، مصرف و همچنین ارتباط تنگاتنگ صنعت و صرفه اقتصادی، روش‌های مختلف و متنوّعی برای حل مسائل متکثّر بهینه‌یابی ابداع و به‌کار گرفته شده‌اند.

بهینه‌یابی در مقابل بهسازی

یک نکته مهم در ابتدای امر تعریف یا به‌کارگیری یک مسئله بهینه‌سازی، تشخیص ضرورت کار، سطح پیچیدگی، امکان وجود راه‌حل‌های زیربهینه (Suboptimal) و صراحت مسئله بهینه‌سازی می‌باشد. با چند مثال به ابعاد این مفهوم ضروری و اساسی پرداخته می‌شود.

در یخچال‌های امروزی، پنکه کمپرسور در بالای دستگاه نصب شده و به‌جای پره‌های خنک‌کن از مبدل‌های حرارتی (رادیاتورهای) صفحه‌ای یا ورقی استفاده می‌شود. این یک تصمیم بهسازی است و نه بهینه‌سازی، بدین معنی که نیازی به نوشتن فرمولاسیون ریاضی و استفاده از بسته‌های نرم‌افزاری نمی‌باشد! علت انتخاب نصب پنکه در بالای یخچال، حضور پریزهای برق در ارتفاعی بسیار بالاتر از قدیم (به‌خاطر رعایت مسائل ایمنی به‌ویژه برای کودکان) بوده‌است. از طرفی توصیه به نصب محافظ الکتریکی در بالای یخچال و مصرف طول کابل کمتر نیز منجر به این توفیق اجباری شده‌است. علّت نصب رادیاتورهای صفحه‌ای نیز شکیل‌بودن، حفظ ایمنی و تمیزکردن راحت‌تر و سهولت در حمل و نقل بوده‌است.

سطح پیچیدگی، مقیاس و اندازه مسئله نیز مهم است. یک ستون تقطیر ساده (غیرواکنشی) را درنظر بگیرید که دارای هفت مرحله (effect) تعادلی باشد و به‌دنبال فقط سینی خوراک بهینه هستیم. اگر کندانسور و ریبویلر را کنار بگذاریم، عملاً پنج سینی برای انتخاب باقی می‌ماند. سینی بالایی معمولاً برای رفلاکس خارجی نامزد می‌شود و سینی بالای ریبویلر نیز به‌عنوان سینی خوراک لااقل رایج نیست، لذا می‌ماند فقط سه سینی(!). انتخاب سینی خوراک بهینه با امتحان کردن (enumeration) هرکدام از

سه سینی آلترناتیو توسط سیمولاتورهای رایج صنعتی به‌راحتی امکان‌پذیر بوده و نیازی به این همه آفتابه و لگن بهینه‌سازی (هفت دست!) برای این شام و نهار ناچیز نیست!

به‌عنوان مثال آخر، تعیین تعداد بهینه مراحل یک تبخیرکننده صنعتی را درنظر بگیرید. با فرض وجود پارامترهای دقیق، قطعی و دردسترس‌بودن یک مدل جامع و دقیق و همچنین مطالعات اوّلیه مربوطه و تعقیب روال‌های آنالیز حساسیت اعم از متغیّرها و پارامترها، اگر بتوانیم یک تابع هدف مناسب و مقتضی یافته و سپس مسئله بهینه‌سازی را با یک روش کارآ به‌طور موفّقیّت‌آمیز حل کرده و با روش‌های مقتضی فرابهینه‌سازی آن را تحلیل کنیم آنگاه توانسته‌ایم عملاً مصداق «کوه موش زایید» را بازآفرینی کرده‌باشیم! چراکه از نظر عملی، تعداد مراحل یک تبخیرکننده به‌ندرت از پنج واحد تجاوز می‌کند. این کار یعنی تعیین تعداد مراحل بهینه را می‌توانستیم با چند اجرای سیمولاتور(enumeration) و مقایسه مقادیر تابع هدف انجام دهیم.

این بدان معنیست که تقریبا تمام روالهای طراحی (برپایه حالت یکنواخت) اعم از طراحی پایه و تفصیلی در مهندسی فرآیند، ذاتاً دارای نوعی بهینگی هستند و در چارچوب قیود عملیاتی و مواد سازنده، طرح و تدوین شده‌اند و قبلا امتحان خودرا پس داده‌اند، لذا باید قبل از تعریف مسئله بهینه‌سازی (فرآیند) و پرداختن به روش حل صرفا ریاضی، به تعبیر و تحلیل فیزیکی – مهندسی، تعداد متغیّرها، تعامل واحدهای عملیاتی، چندهدفی‌بودن و به‌طور خلاصه به قد و قواره مسئله توجه کافی داشت.

منظور از صراحت مسئله، نقش و جایگاه روش‌های بهینه‌سازی در مسئله می‌باشد. ممکنست مسئله موردنظر، اصالتاً یک مسئله بهینه‌سازی باشد نظیر حداقل‌کردن ضایعات، سیکل‌های بهینه عملیاتی یک فرآیند ناپیوسته، بهینه‌کردن همزمان عملکرد و کنترل یک فرآیند. یعنی مورد مسئله ابتدائاً، اصالتاً و صراحتاً یک مسئله بهینه‌سازی باشد. در مقابل، مسائلی وجود دارند که از بهینه‌سازی به‌شکلی ابزارگونه، غیرمستقیم و ضمنی استفاده می‌کنند. مسائلی چون حل دستگاه معادلات جبری غیرخطی، کنترل بهینه خطای یک حل‌کننده دستگاه ODE، حل‌کننده‌های المان محدود برپایه Rayleigh-Ritz، رگرسیون غیرخطی، تخمین پارامترها یا حالات دینامیکی و نظایر آنها از جمله مواردی هستند که خود روش‌های بهینه‌سازی در مقام اهمیّت ثانویه قرار دارند و به‌زعمی کاربردهای روش‌های بهینه‌سازی محسوب می‌شوند. از این نوع مسائل، شکل تابع هدف و قیود احتمالی به‌شکلی نسبتاً مدون و جاافتاده طرح شده‌اند و محور اصلی بحث یا انتخاب روش بهینه‌سازی شامل بار محاسباتی کمتر، تضمین همگرایی و وجود جواب مطلق می‌باشد.

ریاضی پشتیبان (تعاریف و قضایا)

ریاضی پشتیبان و **تحلیلی** مسائل بهینه‌سازی به‌طور موازی با **طراحی** وکاربردهای بهینه‌سازی رشد و پیشرفت داشته‌اند. در یک تقسیم‌بندی کلّی، مسائلی که جواب بهینه‌سازی به‌صورت یک نقطه n بعدی یافته می‌شوند، موسوم به «بهینه‌سازی *استاتیکی*» (یا جبری، یا پایا) بوده و ریاضی آنها از طرف آنالیز کلاسیک پشتیبانی می‌شوند. در حالی‌که از آن‌طرف، مسائلی که جواب بهینه، خود یک متغیّر تابع از یک یا چند متغیّر مستقل باشد، موسوم به «بهینه‌سازی *دینامیکی*» (یا پویا) می‌باشند. قضایای تحلیلی و پشتیبانی‌کنندهٔ این مسایل از طرف آنالیز مدرن، یعنی حساب تغییرات (Variational Calculus) پشتیبانی می‌شوند.

مسائل مهندسی نوعاً به دو نحو از دانش و علوم ریاضی بهره می‌جویند. یکی روش‌های مبتنی بر «تعریف» و دیگر روش‌های مبتنی بر «قضیه». روش‌های مبتنی بر تعریف، عموماً با سعی و خطا و حجم محاسباتی بالا همراه بوده و بسیار سرراست و قابل فهم هستند. به همین خاطر توسعهٔ این روش‌های حلّ تا ظهور کامپیوترهای دیجیتال و پرسرعت به کندی پیشرفت کرده است. در اصطلاح و ترمینولوژی بهینه‌یابی، روش‌های مبتنی بر تعریف به روش‌های مستقیم معروفند. در روش‌های مبتنی بر قضیه، سعی بر این است که مسئلهٔ بهینه‌سازی به مسئله‌ای *تحویل* شود که بحث تحلیلی آن قبلاً در حیطهٔ دانش بشری به شکلی کاملاً مدوّن و جاافتاده مطرح شده‌است. به‌طور مثال در بهینه‌سازی استاتیکی، شرط لازم مینیمم یا ماگزیمم بودن یک تابع به‌صورت یک قضیهٔ ریاضی طرح می‌شود که از خاصیت مشتق (مشتقات) مرتبهٔ اوّل متغیّر تابع استفاده می‌کند. به بیانی دقیق‌تر ریشه‌های مشتقّات مرتبهٔ اوّل همان جواب بهینه‌سازی می‌باشد. همان‌طور که معلوم‌است برای یافتن ماگزیمم یا مینیمم یک متغیّر تابع کافیست یک

دستگاه معادلهٔ جبری را حلّ کنیم، یعنی حلّ یک مسئله بهینه‌سازی تحویل شد، تقلیل یافت یا تبدیل شد به حلّ یک مسئلهٔ مأنوس و مسبوق به سابقهٔ ریاضی. روش‌های بهینه‌سازی که به‌صورت تحویلی کار می‌کنند موسوم به روش‌های غیرمستقیم، تحلیلی، ریاضی و به‌طور کلّی برنامه‌ریزی ریاضی (Mathematical Programming) می‌باشند. لازم به ذکرست که در روش‌های مبتنی بر تعریف نیز یک تقسیم‌بندی روش‌ها به دو حالت مستقیم و غیرمستقیم مرسومست و نباید با تقسیم‌بندی فوق‌المذکور اشتباه شود.

ادبیات، ترمینولوژی و مبادی تصور

هرشاخهٔ علمی یا کار تخصصی محتاج یک لسان و قاموس خاصی می‌باشد تا دست‌اندرکاران مسائل مرتبط با آن زمینه به‌راحتی و باسهولت بتوانند با همدیگر ارتباط برقرار کرده و سر از معماری، مقدمّات، مسلّمات، بدیهیات، معلومات و مجهولات آن رشته درآورند. به‌طور مثال، اسکیموها که با برف و در یخ زندگی می‌کنند، برای کلمه "برف" (snow) 45 معادل و مترادف مصطلح دارند! مسائل و روش‌های بهینه‌سازی نیز از این امر مستثنی نیستند. مبادی تصوّر و اصطلاحات موضوعه حول حداقل ۱۰ مؤلفه زیر دور می‌زنند:

۱ . تابع هدف (Objective Function) – جوهر و فلز هر مسئله بهینه‌یابی، یک هدف یا آبجکتیو موضوعه به بیانی کمّی می‌باشد که باید نمایانگر و خط‌کش کاربرد و کارآیی سیستم تحت مطالعه باشد. این آبجکتیو می‌تواند سود حاصل از فروش، زمان عملیات انجام کار، انرژی پتانسیل، انتروپی (!) یا هر ترکیب از مقادیر عددی و مهندسی باشد که منجر به یک عدد (اسکالر) شود. به‌بیان خلاصه، منظور از (متغیر) تابع هدف، ترکیب یا عبارت و یا تابعی می‌باشد که دنبال مقدار بهینهٔ (حداقل / حداکثر) آن هستیم. اگر تابع هدف به‌صورت جبری باشد، بهینه‌سازی استاتیکی و اگر شامل انتگرال باشد، به‌صورت دینامیکی خواهد بود. در رشته‌های مختلف علوم مهندسی، به‌اقتضای زمینهٔ کاری، تابع هدف اسامی گوناگونی به خود می‌گیرد. عبارات مدل اقتصادی(Economic Model) ، تابع سود (Profit Function) و تابع هزینه (Cost Function) نوعا" در مهندسی صنایع و ارزیابی‌های اقتصادی (اقتصاد مهندسی) به‌جای تابع هدف مصطلح هستند، در حالی‌که شاخص عملکرد (Performance Index) در مهندسی کنترل و مهندسی سیستم‌ها، تابع برگشت (Return Function) در زمان‌بندی عملیات (Scheduling) و برنامه‌ریزی پویا (Dynamic Programming)، و سطح پاسخ (Response Surface) در علوم ریاضی و توپولوژی به‌کار می‌روند. در یک مواجههٔ عمومی نیز اصطلاحات معیار(Criterion)، میزان مؤثّربودن (Effectiveness) و تابع انتفاع (Benefit Function) متداول می‌باشند.

ساختار تابع هدف در انتخاب روش حلّ مؤثّر است. به‌طور مثال برای بهینه‌سازی استاتیکی اگر فرم تابع هدف خطی(Linear) باشد از یک فامیلی روش‌ها و اگر مجذوری(Quadratic) باشد از دسته دیگر روش‌ها استفاده می‌کنیم.

اگر در صورت مسئله یا هدف بهینه‌یابی، حلّ هم‌زمان (اکسترمم‌سازی) چند تابع هدف مدّنظر باشد، مسئله بهینه‌یابی، یک مسئله چندهدفی (Multi-objective Optimization)– موسوم به مسائل بهینه‌یابی برداری (Vector Optimization)- خواهد بود که قطعاً حلّ و بررسی آن پیچیده‌تر از مسائل تک‌هدفی می‌باشد.

۲- مجهولات یا متغیرهای مستقل - تابع هدف عملا متغیّر تابعی از یک یا چند متغیر مستقل می‌باشد. این متغیرهای مستقل یا مجهولات به‌طور تاریخی موسوم به متغیرهای تصمیم‌گیری (Decision Variables) هستند. اگر این متغیرهای مستقل، خود نیز تابعی از متغیرهای مستقل دیگر باشد، آنگاه از نظر ریاضی مواجه با تئوری فانکشنال‌ها (Functionals) یعنی توابعِ تابع هستیم. این نوع متغیرها در بهینه‌سازی دینامیکی طرح می‌شوند.

۳ – مسئلهٔ قیود و محدودیت‌های مسئله – معمولاً هر مسئلهٔ بهینه‌سازی عملی و واقعی حداقل محدود به یک قید یا دستهٔ قیود می‌باشد. این نوع قیود اگر به‌صورت تحلیلی باشند، به‌صورت معادلات جبری (یا دیفرانسیلی) موسوم به قیود تساوی(Equality Constraints) یا به‌صورت نامعادلات جبری موسوم به قیود نامساوی (Inequality Constraints) هستند. منظور از قیود مساوی معادلات جبری و یا دیفرانسیلی هستند که رابطه‌ی آنها به صورت یک رابطه‌ی تساوی ظاهر می‌شود در حالی که قیود نامساوی به صورت نامعادلات جبری می‌باشند. قیود نامساوی در فرایندهای مهندسی به دلایل مختلفی همچون محدودیتهای عملیاتی، ملاحظات ایمنی و یا مواد اولیه در دسترس بسیار ظاهر می‌شوند. برای نمونه می‌توان به استاندارد انتشار آلاینده‌ها از صنایع و یا دمای بیشینه‌ی مجاز برای عملکرد مطلوب کاتالیست اشاره نمود. حلّ مسائل با قیود مساوی سخت‌تر از مسائل نامقیّد و حلّ مسائل با قیود نامساوی سخت‌تر از مسائل مقیّد به قیود فقط تساوی می‌باشد.

اگر قیود دارای عدم‌قطعیت (Uncertainty) باشند، اگرچه می‌توان آنها را به‌صورت قیود نامساوی بیان کرد ولی چون مسئله همراه با قید نامساوی عملا حل تحلیلی جدّی ندارد و پیچیده‌تر از سایر مسائل بهینه‌یابی است، رویکرد آلترناتیوی وجود دارد به‌نام مسائل بهینه‌یابی غیرقطعی که روش‌های حل تجربی (Heuristics Programming) و بهینه‌یابی فازی (Fuzzy Optimization) از جمله روش‌های حلّ و مواجهه با آنها می‌باشد.

۴ – جنس متغیرها – اگر برخی از متغیّرهای مستقل مسئله یا همهٔ آنها به‌صورت عدد صحیح باشند، ممکنست مسئلهٔ بهینه‌سازی یک حالت ترکیبی (Combinatorial) و نمایی (exponential) از نظر پیچیدگی و زمان حل (Complexity Function) پیدا کند. در صورت بزرگ‌بودن ابعاد متغیّرها (معمولاً ۲۰ به بالا) حلّ این نوع مسائل بسیار سخت می‌باشد. مسائل آمیخته (Mixed Integer Programming) که برخی متغیّرها به‌طور سنتّی غیرصحیح و برخی دیگر عدد صحیح هستند در مسائل طراحی فرآیند و مسائل آمیخته دینامیکی (Mixed Integer Dynamic Optimization - MIDO) نیز در مسائل کنترل‌پذیری فرآیند از عناوین و مطالب مهمّ تحقیقاتی و مفهومی عصر حاضر می‌باشند.

۵ – روش حلّ – نکته مهمّی که باید به آن توجّه داشت، عدم وجود یک راه‌حلّ کلّی و همه‌کاره برای مسائل مختلف بهینه‌سازیست. به‌همان دلیلی که برای هر غذا از ابزار پخت‌وپزیا تناول آن متناسب با آن خوراک استفاده می‌کنیم، باید برای هر مسئله بهینه‌سازی نیز متناسب با تابع هدف، قیود و جنس متغیرها روش مناسب را به‌کار بگیریم. در ادامه، لیست کوچکی از روش‌های مختلف حلّ مسائل بهگزینی به‌منظور آشنایی اوّلیه آورده شده است: «برنامه‌ریزی خطی»، «برنامه‌ریزی هندسی»، «برنامه‌ریزی مجذوری»، «برنامه‌ریزی پویا»، «برنامه‌ریزی عدد صحیح»، ...

۶ – فانکشن(تابع) و فانکشنال (تابعِ تابع) – انتخاب ابزار ریاضی مناسب و پشتیبان برای حل مسائل بهینه‌سازی، یک امر راهبردی و اساسی می‌باشد. اینکه به‌دنبال یافتن شرایط بهینه عملیاتی، سایز مناسب دستگاه و به‌بیان ریاضی، در جستجوی نقطه بهینه هستیم یا ساختار (تابع) بهینه، عملاً تعیین‌کننده راهبردی مباحث ریاضی درگیر می‌باشد.

درصورتی‌که مسئله مطرح به‌صورت تحلیلی یک تابع هدف چندمتغیّره باشد، آنگاه از قضایای آنالیز کلاسیک استفاده می‌کنیم ولی اگر تابع هدف، تابع متغیّرهایی باشد که خود نیز تابع متغیّرهای دیگری باشند آنگاه از قضایای آنالیز (مدرن) فانکشنال‌ها (توابع تابع) یا همان حساب جامع تغییرات استفاده می‌کنیم. اگر حلّ مسئله به‌صورت مستقیم (مبتنی بر تعریف) مدّ نظر باشد – که معمولاً برای مسائل سایز بزرگ و و دارای قیود نامساوی مصداق دارد – آن‌گاه ممکنست که حتّی مسئله بهینه‌یابی دینامیکی به یک مسئله بهینه‌یابی استاتیکی تحویل شود، چرا که روش‌های (ماشین‌های) حلّ مستقیمِ مسائلِ بهینه‌یابی جبری جاافتاده‌تر، قوی‌تر و

قابل فهم‌تر هستند. به‌هرحال باید این نکته را اضافه کرد که برای مسائل امروزی و واقعی عملاً با ترکیبی از روش‌های مبتنی بر قضیه و مبتنی بر تعریف کار می‌کنیم. برنامه‌ریزی مجذوری یک شاهد وثیق و گویای این نوع امتزاج روش‌ها و انتزاع حل می‌باشد.

۷ – مدل‌سازی (Modeling)، **فرمولاسیون** (Formulation) **یا پیش‌بهینه‌سازی** (Pre-Optimization) **–** حلّ هر مسئلهٔ بهینه‌سازی جدّی، با اندازه متوسّط به‌بالا و صریح (مستقیم) به‌طور سیستماتیک و کلّی شامل سه مرحلهٔ مقدماتی یا فرمولاسیون، حلّ مسئلهٔ بهینه‌سازی و نهایتاً تحلیل جواب می‌باشد. در اوّلین گام، باید مسئلهٔ واقعی و تحت قیود عملی را پردازش و تحلیل کرده و به‌صورت کمّی، بسته و فرم تحلیلی (مناسب برای ابزار ریاضی مهندسی) فرموله یا مدل کرد. اینکه فرم تابع هدف و قیود خطّی است یا غیرخطّی و جواب مسئله یک نقطهٔ بهینه است یا یک تابع بهینه، در مرحلهٔ بعدی که حلّ مسئله می‌باشد، بسیار مؤثر و راهگشاست.

۸ – تحلیل جواب یا فرابهینه‌سازی (Post-Optimization) **–** در مواجهه با مسائل واقعی و تعریف پارامتریک توابع هدف یک مسئله بهینه‌سازی، همیشه با عدم‌قطعیت مقادیر روبرو هستیم، لذا سئوال درباره حسّاسیت جواب و میزان تأثیر مقادیر متغیّرها بر جواب بهینه، متین، مهمّ و کاربردیست. اصطلاحات آنالیز حساسیت (Sensitivity Analysis) (به لسان ریاضی) ، چه‌طور مگر؟ (What-If Analysis) (به لسان مهندسی صنایع)، عملاً ناشی از فعّالیّت‌های فرابهینه‌سازی و مطالعات بعدی می‌باشد. لازم به ذکرست اگر آنالیز حساسیت روی نوع و تعداد «متغیرهای تصمیم‌گیری» باشد عملاً متعلّق به فعّالیّتها و مطالعات پیش‌بهینه‌یابی می‌باشد ولی اگر آنالیز حسّاسیّت روی دامنه و تغییرات متغیّرهای تصمیم‌گیری یا مقادیر «پارامترهای» تابع هدف و/یا قیود مسئله باشد، آن گاه دخیل در مطالعات پسابهینه‌یابی خواهند بود.

۹ – اکسترمم محلی و عمومی – یک بحث مهمّ و به‌ویژه در بخش ارزیابی اکسترمم، مسئله تکرّر و تنوّع جواب می‌باشد. بنا به تعریف، اکسترمم (مینیمم یا ماگزیمم) ممکن است در یک همسایگی معلوم از نقطه بهینه مشمول تعریف ماگزیمم یا مینیمم شود. در حالی‌که همین تعریف در نواحی دیگری از تابع هدف نیز صادق باشد، در این حالت با اکسترمم محلی روبرو هستیم. اگر در میان مجموعه اکسترمم‌های محلی نقطه‌ای یافت شود که تعریف اکسترمم مطلقاً صادق باشد آنگاه با یک اکسترمم مطلق یا جامع روبرو هستیم. قضایای بهینه‌یابی کلاسیک (اعمّ از لازم و کافی) نوعاً دربرگیرنده اکسترمم‌های محلی می‌باشند.

۱۰ – توابع نمونه(Test functions)، **کارگاه حل**(Benchmarks) **–** برای محکّ ایده‌ها و اطمینان از صحت و کارآیی روش‌ها و همچنین انتقال مفهوم ایده پایه و اساسی هر الگوریتم، از یک سری توابع هدف استاندارد و نمونه استفاده می‌شود. هرکدام از توابع مزبور، قبلاً به‌طور مفصل تحلیل شده و کاملاً شناخته‌شده می‌باشند. دقّت شود در بخش تحلیل کارآیی و عملکرد الگوریتم از این توابع هدف که نوعاً پیچیده یا دارای نقطه اولّیه خیلی بد هستند با یک نگرش ریاضی عددی دیده می‌شوند، در حالی‌که برای محکّ آنها در مسائل عملی از کاربردهای مطالعاتی نمونه(Case studies) و سازمان‌یافته نظیر چرخش پروتئین، برپایی چادر سیرک، مسئله مینیمم دراگ، تنفّس و خنک‌سازی خشت یا کوزه گلی، مسئله فروشنده دوره‌گرد، فرآیند Amoco، فرآیند Tennessee-Eastman، و امثالهم استفاده می‌شود. این توابع در فصول مقتضی و طی مثال‌ها و مسائل بحث می‌شوند و لذا در ادامه به همان موارد اول، یعنی توابع نمونه پرداخته می‌شود.

توابع نمونه استاندارد غالباً به‌فرم مجذوری و حداقل مربّعات خطا (Least-Squares) نوشته می‌شوند:

$$f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{m} f_i^2(\underline{x}) \qquad (۱)$$

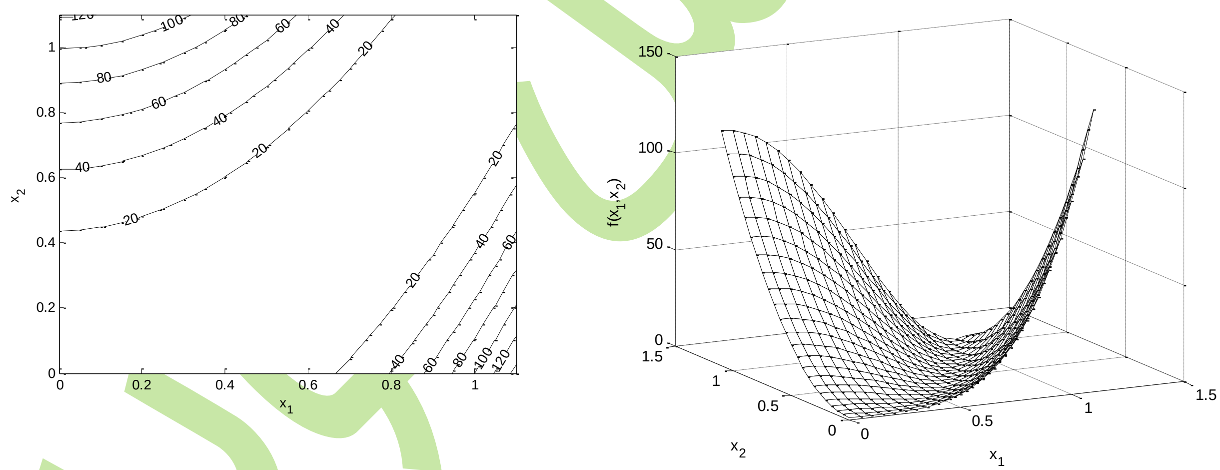
توابع مذکور روی تابع هدف (و نه قیود) تمرکز داشته و راندمان هر الگوریتم بهینه‌یابی توسط شاخص تعداد فراخوانی(recall) تابع هدف ارزیابی می‌شود، یعنی هرچه کمتر، بهتر. لذا بهره‌گیری از این توابع غالباً در زمینه بهینه‌یابی نامقید می‌باشد.

- **چاله یا درّه سهموی روزنبروک**(Rosenbrock's parabolic valley): تابع روزنبرک اولین بار در سال ۱۹۶۰ توسط هوارد روزنبروک به منظور آزمایش و تحلیل کارآیی الگوریتمهای بهینه‌یابی معرفی شد [1]. نقطه‌ی کمینه‌ی مطلق این تابع بر روی یک دره‌ی سهمی شکل مسطح قرار داشته و از این رو این تابع به نام دره‌ی سهموی روزنبرک معرفی می‌شود. رفتار تابع بر روی این دره به گونه‌ایست که همگرایی به سمت نقطه‌ی بهینه را دشوار می‌نماید. شکل (۱) تابع هدف نمونه‌ی روزنبرک و منحنی‌های تراز آن را نشان می‌دهد.

$$f(x_1,x_2)=100(x_1^2-x_2)^2+(1-x_1)^2 \quad \underline{x}^{\circ}=\begin{bmatrix}-1.2\\1.0\end{bmatrix} \quad , \quad \underline{x}^{opt.}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \tag{۲}$$

$$f^{\circ}=24.0 \quad , \quad f^{opt.}=0.0$$

در شکل (۱)، رفتار تابع نشان داده شده‌است.



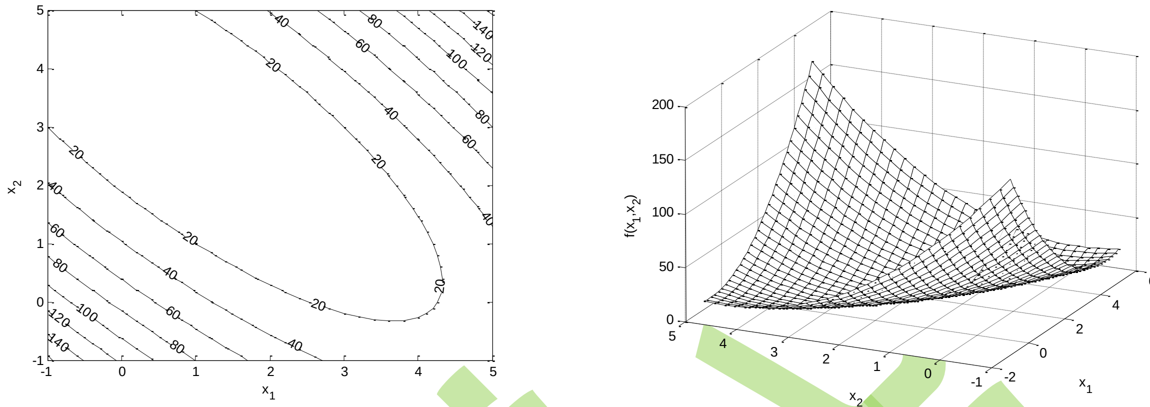
شکل ۱. تابع هدف روزنبروک، رویه (راست) و منحنیهای تراز (چپ).

- **یک تابع هدف نمونه به فرم مجذوری**:

$$f(x_1,x_2)=(x_1+2x_2-7)^2+(2x_1+x_2-5)^2 \quad \underline{x}^{\circ}=\begin{bmatrix}0.0\\0.0\end{bmatrix} \quad , \quad \underline{x}^{opt.}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} \tag{۳}$$

$$f^{\circ}=74.0 \quad , \quad f^{opt.}=0.0$$

در شکل (۲)، رفتار تابع نشان داده شده‌است.



شکل ۲. تابع هدف مجذوری نمونه، رویه (راست) و منحنیهای تراز (چپ).

- **تابع هدف مجذوری پاول** (Powell's quadratic function)[2]:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+10x_2)^2+5(x_3-x_4)^2+(x_2-2x_3)^4+10(x_1-x_4)^4 \tag{۴}$$

$$\underline{x}^{\circ}=\begin{bmatrix}3\\-1\\0\\1\end{bmatrix} \quad , \quad \underline{x}^{opt.}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$f^{\circ}=215.0 \quad , \quad f^{opt.}=0.0$$

- **تابع هدف فلچر و پاول** (چاله مارپیچ – Fletcher and Powell's helical valley)[3]:

$$f(x_1,x_2,x_3)=100\left\{[x_3-10\theta]^2+[\sqrt{x_1^2+x_2^2}-1]^2\right\}+x_3^2 \tag{۵}$$

$$where \quad 2\pi\theta\,(x_1,x_2)=\begin{cases}Arc\tan(\frac{x_2}{x_1}) & if\ \ x_1\succ 0\\ \pi+Arc\tan(\frac{x_2}{x_1}) & if\ \ x_1\prec 0\end{cases}$$

$$\underline{x}^{\circ}=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix} \quad , \quad \underline{x}^{opt.}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$f^{\circ}=25000.0 \quad , \quad f^{opt.}=0.0$$

- **یک تابع هدف غیرخطی نمونه**[2] :

$$f(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{1+(x_1-x_2)^2}+\sin\left(\frac{\pi}{2}x_2x_3\right)+\exp\left[-\left(\frac{x_1+x_3}{x_2}-2\right)^2\right] \qquad (۶)$$

$$\underline{x}^{\circ}=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} \quad , \quad \underline{x}^{opt.}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

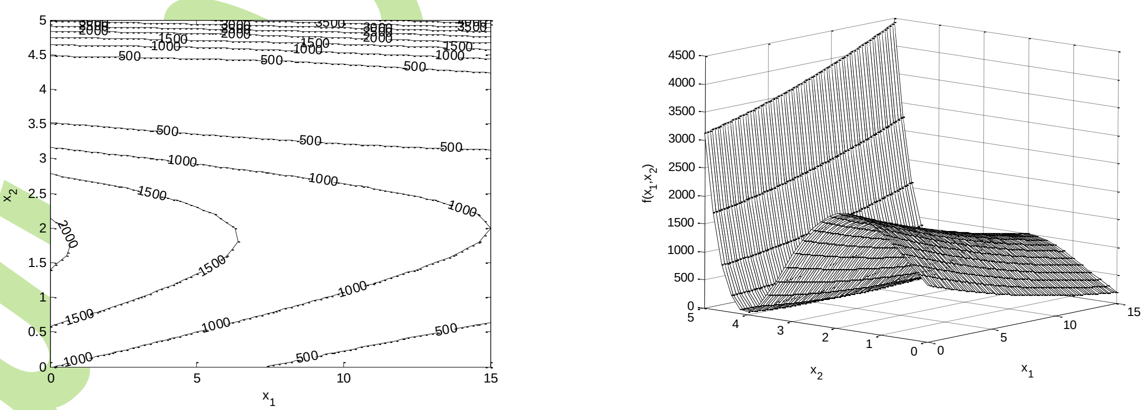
$$f^{\circ}=1.5 \quad , \quad f^{opt.}=3.0$$

– **تابع هدف فروِنشتاین و رات** (Freudenstein and Roth Function)[4] : یکی دیگر از توابع هدف استاندارد و نمونه، تابع هدف فرودنشتاین و رات (رابطه‌ی ۷) می‌باشد. شکل (۳) رویه‌ی این تابع هدف و منحنیهای تراز آن را نشان می‌دهد. منحنی‌های تراز به خوبی رفتار تابع را حول نقطه‌ی بهینه‌ی این تابع نشان می‌دهد.

$$f(x_1,x_2)=\{-13+x_1+[(5-x_2)x_2-2]x_2\}^2+\{-29+x_1+[(x_2+1)x_2-14]x_2\}^2 \qquad (۷)$$

$$\underline{x}^{\circ}=\begin{bmatrix}0.5\\-2\end{bmatrix} \quad , \quad \underline{x}^{opt.}=\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix} \quad , \quad \cdots \quad f^{\circ}=400.5 \quad , \quad f^{opt.}=0.0 \quad , \quad \cdots$$

در شکل (۳)، رفتار تابع نشان داده شده‌است.



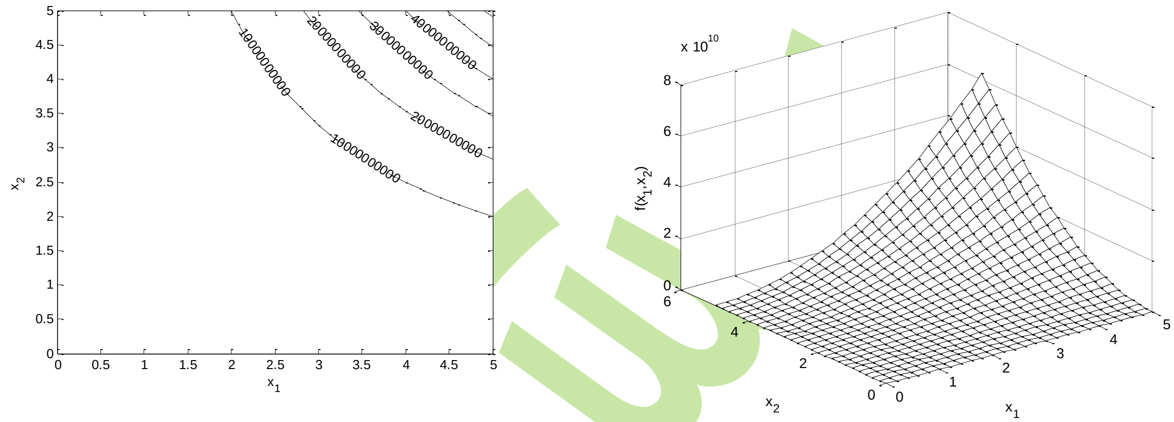
شکل ۳. تابع هدف فرونشتاین و رات، رویه (راست) و منحنیهای تراز (چپ).

– **تابع هدف بدمقیاس پاول** (Powell's badly scaled function)[5] : تابع هدف بدمقیاس پاول (رابطه‌ی ۸)، یکی دیگر از توابع هدف استاندارد و نمونه می‌باشد که جهت آزمایش و تحلیل کارایی الگوریتمهای بهینه‌یابی پیشنهاد به کار می‌رود. شکل (۴) رویه‌ی این تابع هدف و منحنی‌های تراز آن را نشان می‌دهد. منحنی‌های تراز به خوبی رفتار تابع را حول نقطه‌ی بهینه‌ی این تابع نشان می‌دهد. همان گونه که در شکل (۴) مشاهده می‌شود، رفتار این تابع به گونه‌ایست که تغییرات کوچکی در مقدار متغیرهای ورودی باعث تغییرات شدیدی در مقدار تابع می‌شود.

$$f(x_1,x_2)=(10000x_1x_2-1)^2+[\exp(-x_1)+\exp(-x_2)-1.0001]^2 \qquad (۸)$$

$$\underline{x}^{\circ}=\begin{bmatrix}0.0\\1.0\end{bmatrix} \quad , \quad \underline{x}^{opt.}=\begin{bmatrix}1.098\times10^{-5}\\9.106\end{bmatrix} \quad f^{\circ}=1.1354 \quad , \quad f^{opt.}=0.0$$

.

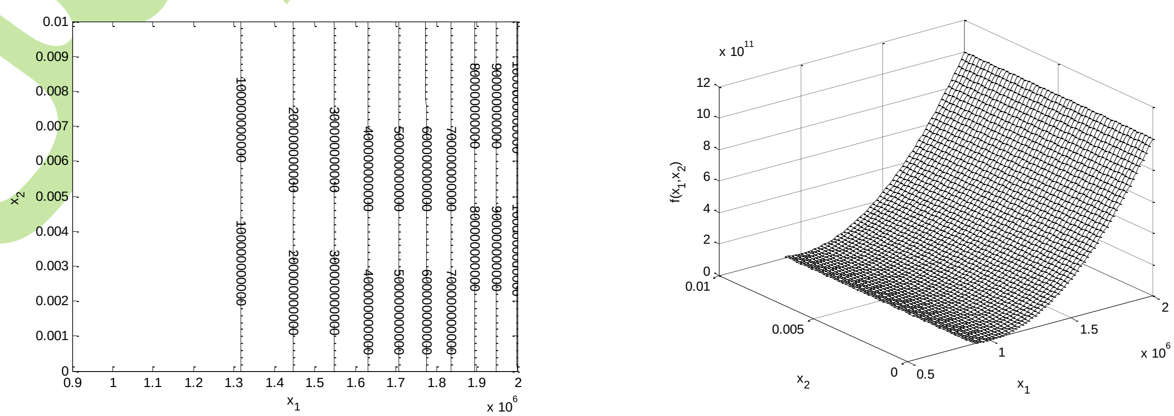


شکل ۴. تابع هدف بدمقیاس پاول، رویه (راست) و منحنیهای تراز (چپ).

– **تابع هدف بدمقیاس براون** (Brown's badly scaled function)[6] : تابع هدف بدمقیاس براون (رابطه‌ی ۹) نیز همچون تابع هدف بدمقیاس پاول، یکی دیگر از توابع هدف استاندارد و نمونه جهت آزمایش و تحلیل کارایی الگوریتم‌های بهینه‌یابی می‌باشد. شکل (۵) رویه‌ی این تابع هدف و منحنیهای تراز آن را نشان می‌دهد. منحنیهای تراز به خوبی رفتار تابع را حول نقطه‌ی بهینه‌ی این تابع نشان می‌دهد. مختصات نقطه‌ی بهینه و تفاوت معنی‌دار مقیاس دو متغیر در آن، به خوبی رفتار فریب‌کارانه‌ی این تابع و امکان انحراف و عدم همگرایی الگوریتم‌های بهینه‌یابی را در اطراف نقطه‌ی بهینه نشان می‌دهد.

$$f(x_1,x_2)=(x_1-10^6)^2+(x_2-2\times10^{-6})^2+(x_1x_2-2)^2 \qquad (۹)$$

$$\underline{x}^{\circ}=\begin{bmatrix}1.0\\1.0\end{bmatrix} \quad , \quad \underline{x}^{opt.}=\begin{bmatrix}10^6\\2\times10^{-6}\end{bmatrix} \quad f^{\circ}=10^{12} \quad , \quad f^{opt.}=0.0$$



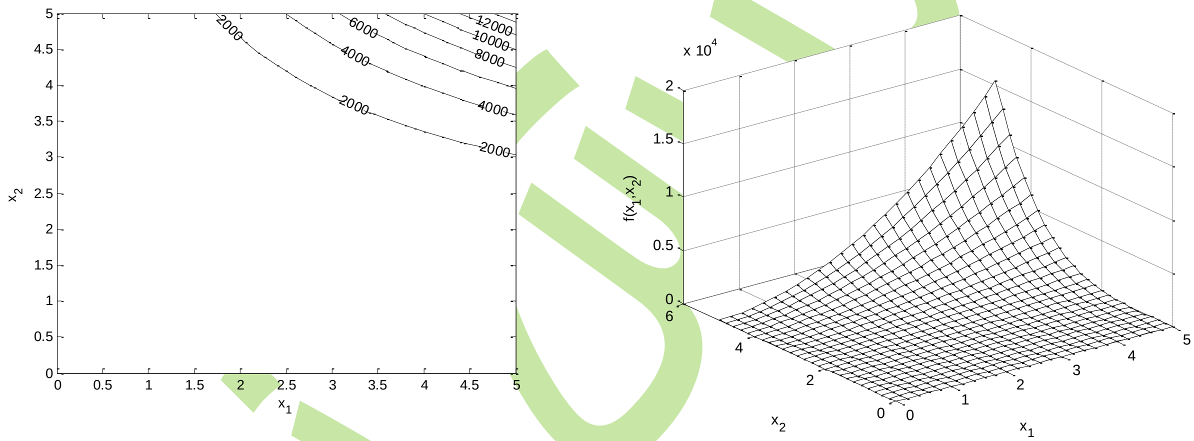
شکل ۵. تابع هدف بدمقیاس براون، رویه (راست) و منحنیهای تراز (چپ).

– تابع هدف پیشنهادی بییله (Beale's function)[6] :

$$f(x_1,x_2)=[1.5-x_1(1-x_2)^2]^2+[2.25-x_1(1-x_2^2)]^2+[2.625-x_1(1-x_2^3)]^2 \qquad (۱۰)$$

$$\underline{x}^{\circ}=\begin{bmatrix}1.0\\1.0\end{bmatrix} \quad , \quad \underline{x}^{opt.}=\begin{bmatrix}3\\0.5\end{bmatrix} \quad f^{\circ}=14.203125 \quad , \quad f^{opt.}=0.0$$

در شکل (۶)، رفتار تابع نشان داده شده‌است.



شکل ۶. تابع هدف بییله، رویه (راست) و منحنیهای تراز (چپ).

– تابع هدف وود (Wood's function) [7] :

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=100(x_1^2-x_2)^2+(1-x_1)^2+90(x_4-x_3^2)^2+(1-x_3)^2+ \\ 10(x_2+x_4-2)^2+0.1(x_2-x_4) \qquad (۱۱)$$

$$\underline{x}^{\circ}=\begin{bmatrix}-3\\-1\\-3\\-1\end{bmatrix} \quad , \quad \underline{x}^{opt.}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

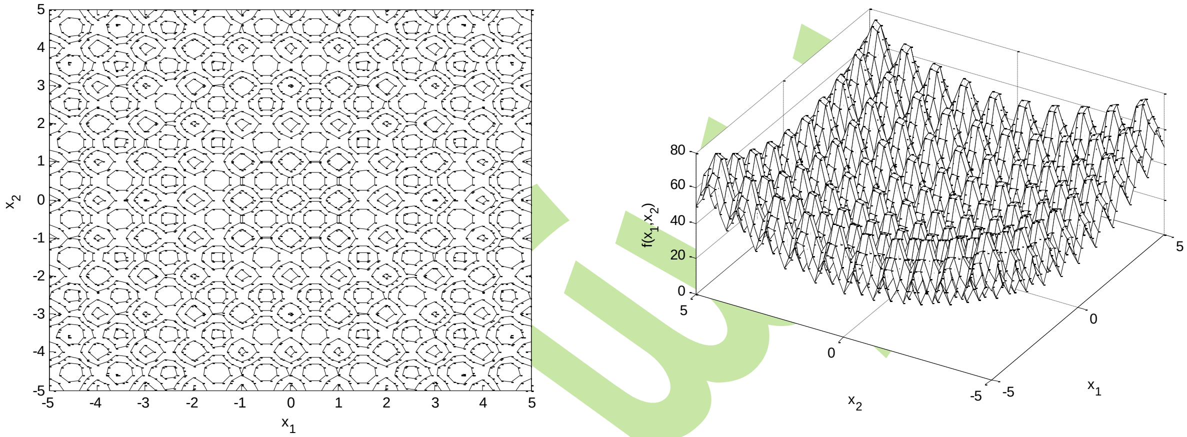
$$f^{\circ}=19192.0 \quad , \quad f^{opt.}=0.0$$

– تابع هدف رستریجین(Rastrigin's function)[8] : یکی از جالب‌ترین توابع هدف نمونه جهت آزمایش کارایی الگوریتم‌های بهینه‌یابی، تابع هدف رستریجین (رابطه‌ی ۱۲) می‌باشد. شکل (۷) رویه‌ی این تابع هدف و منحنی‌های تراز آن را نشان می‌دهد. همان گونه که در شکل مشاهده می‌شود، تابع رستریجین در عین وجود نقطه‌ی کمینه‌ی مطلق، دارای تعداد زیادی نقاط بیشینه و کمینه‌ی محلّی است. چنین رفتاری برای آزمایش الگوریتم‌های بهینه‌یابی بسیار کاربردی بوده و می‌توان احتمال به دام افتادن فرایندهای جستجو را در تله‌ی نقاط بهینه‌ی محلی بررسی نمود.

$$f(x_1, x_2) = 20 + x_1^2 + x_1^2 - 10(\cos(2\pi\, x_1) + \cos(2\pi\, x_2)) \qquad (۱۲)$$

$$\underline{x}^{\circ} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{x}^{opt.}(global) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f^{\circ} = \dots \quad , \quad f^{opt.}(global) = 0.0$$



شکل ۷. تابع هدف رستریجین، رویه (راست) و منحنیهای تراز (چپ).

مراجع

[1]. H. H. Rosenbrock, *An Automatic Method for Finding the greatest or Least Value of a Function*, Computer Journal, Vol. 3, No.3, pp. 175-184, **1960**.

[2]. M. J. D. Powell, *An Efficient Method for Finding the Minimum of a Function of Several Variables without calculating Derivatives*, Computer Journal, Vol. 7, No. 4, pp. 303-307, **1964**.

[3]. R. Fletcher, and M. J. D. Powell, *A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization*, Computer Journal, Vol. 6, No. 2, pp. 163-168, **1963**.

[4]. F. Freudenstein and B. Roth, *Numerical Solution of Systems of Nonlinear Equations*, Journal of ACM, Vol. 10, No. 4, pp. 550-556, **1963**.

[5]. M. J. D. Powell, *A Hybrid Method for Nonlinear Equations*, pp. 87-114, in Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations, P. Robinowitz, Ed. Gordon & Breach, New York, **1970**.

[6]. J. J. More, B. S. Garbow, and K. E. Hillstorm, *Testing unconstrained Optimization Software*, ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 7, No. 1, pp. 17-41, **1981**.

[7]. S. S. Rao, *Engineering Optimization, Theory and Practice*, 3d Ed. New Age Int. (reprint), **2002**.

[8]. MATLAB v.7.Genetics Algorithm and Pattern Search Toolbox, MathWorks,