فصل ۳ – برنامه‌ریزی هندسی

تاریخچه – در سال 1961 آقای Zener کارمند شرکت وستینگهاوس یک روش جدید بهینه‌سازی برای مسایل بهینه‌سازی ترانسفورمرها ابداع نمود و به‌صورت مقالات علمی منتشر نمود. دو سال بعد، موضوع مورد توجه پروفسور Wilde (از دانشگاه استانفورد) قرار گرفت. اساس کار روی استفاده از قضیهٔ جبری- هندسی کوشی (Cauchy's Inequality) قرار داشت. این قضیه می‌گوید که متوسط جبری چند جمله یا عبارت ریاضی همیشه بزرگتر یا مساوی متوسط هندسی آنها می‌باشد. با استفاده از این قضیه، دکتر Zener موفق شده بود که یک تابع هدف غیرخطی خاص را تبدیل به حلّ یک دستگاه جبری خطی نماید. به‌دلیل استفاده از این قضیه نام "هندسی" به آن تعلق گرفت. تقریباً دو تلاش موازی و نسبتاً مستقل برای توسعهٔ این روش صورت گرفته است. یکی کار دکتر Zener و دکتر Wilde بوده است و دیگری یک تیم آکادمیک در دانشگاه Carnegie Mellon . هر دو تیم موفق شدند کاربردهای زیادی برای این روش پیدا کرده، روش را تعمیم داده و نهایتاً مقالات و کتب خوبی در این زمینه منتشر کنند [1,2].

در این مختصر سعی می‌شود روش برنامه‌ریزی هندسی به‌طور نسبتاً کامل و از روی نسخهٔ اساسی و اصلی آن توضیح داده شود ولی برای حفظ یکپارچگی و یکنواختی برخی قضایا و مسائل آن در قالب شرایط لازم و کافی ذکر شده در فصول قبلی گفته می‌شود. این در حالیست که کار اوّلیه از آن قضایا استفاده نکرده‌اند.

بهینه‌سازی بسجمله‌ای مثبت(Posynomial)

برای شروع، به مباحث بهینه‌سازی توابع هدفی که بسجمله‌ای مثبت – چندجمله‌ای‌هایی که تک‌تک ترمها مثبت باشند می‌پردازیم. در حالت کلّی و به‌زبان ریاضی یک چندجمله‌ای مثبت را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$y(\underline{x}) = \sum_{p=1}^{P} c_p \prod_{n=1}^{N} x_n^{a_{pn}} \quad , \quad \underline{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T \tag{۱}$$

به‌طوریکه c_pها، ضرایب مثبت بسجمله‌ای، x_n متغیرهای مستقل (متغیرهای تصمیم‌گیری) و مثبت، a_{pn}، توان به‌صورت عدد حقیقی، N، تعداد متغیرهای مستقل و P تعداد جملات در تابع هدف می‌باشند.

در حالت کلی و به‌زبان مهندسی، خانواده‌ای از مسائل بهگزینی- به‌ویژه در بهینه‌سازی هزینه دستگاه‌های فرآیندی- را می‌توان به‌صورت جمع چندجمله (و در حالت کلی جمع جبری وزن‌داده‌شده) نوشت:

$$y(\underline{x}) = \sum_{p=1}^{P} c_p U_p = c_1 U_1(\underline{x}) + c_2 U_2(\underline{x}) + \cdots c_P U_P(\underline{x}) \tag{۲}$$

به‌طوریکه هر $U_j(\underline{x})$ به‌صورت حاصلضرب توانی متغیرهای مستقل بیان می‌شود:

$$U_j(\underline{x}) \triangleq x_1^{a_{1j}} \times x_2^{a_{2j}} \times \cdots x_n^{a_{nj}}$$

نکته – مسائلی که فرمولاسیون آنها منجر به شکل کلّی بالا (روابط ۱ و ۲) می‌شود، تأکید روی مرتبه عددی و اندازه جملات نسبت به یکدیگر است تا مقادیر متغیرهای مستقل، فافهم و اغتنم!

مثال ۱- تابع بسجمله‌ای مثبت زیر را در نظر بگیرید:

$$y = 1000x_1 + 4\times10^9 x_1^{-1} x_2^{-1} + 2.5\times10^5 x_2$$

در این مثال $P=3$ و $N=2$ می باشد وضرایب و توانها به شکل زیر هستند:

$$c_1=1000 \qquad c_2=4\times10^9 \qquad c_3=2.5\times10^5$$

$$\begin{cases}a_{11}=1\\a_{12}=0\end{cases} \qquad \begin{cases}a_{21}=-1\\a_{22}=-1\end{cases} \qquad \begin{cases}a_{31}=0\\a_{32}=1\end{cases}$$

نکته - مجدداً همان بحث هوشمندی و جابه‌جاکردن صورت مسئله برقرار است. برای این کلاس خاص از توابع هدف، سعی شده‌است با یک شگرد مسئلهٔ بهینه سازی تبدیل به یک مسئله‌ای شود که حل آن ساده‌تر، مطمئن‌تر شده یا شرایط لازم و کافی را بتوان کاربردی‌تر ارائه نمود.

گام اول – شرط لازم (پیدا کردن اکسترمم) : باید مشتقّات مرتبهٔ اوّل (نسبت به متغیرهای مستقل) معادل صفر قرار داده شوند.

$$\frac{\partial y(\underline{x})}{\partial x_i}=\sum_{p=1}^{P}c_p a_{pi}x_i^{a_{pi}-1}\prod_{n=1}^{N}x_n^{\ a_{pn}}=\underline{0} \quad , \quad i=1,\cdots,N \tag{۳}$$

دو طرف را در x_i ضرب می‌کنیم تا شکل بسته‌تری به‌دست آید (با فرم تابع هدف، رابطه (۱) مقایسه شود):

$$\sum_{p=1}^{P}c_p a_{pi}\prod_{n=1}^{N}x_n^{\ a_{pn}}=\underline{0} \quad , \quad i=1,\cdots,N \tag{۴}$$

دستگاه (۴)، یک دستگاه جبری غیرخطی (از نوع بسجمله‌ای) می‌باشد که حلّ آن منجر به یافتن نقاط اکسترمم ($\underline{x}^*$) می‌شود.

گام دوم – بازآرایی دستگاه : نکتهٔ هوشمندانهٔ روش در اینجاست، چون دستگاه جبری غیرخطی (۴) دارای تضمین همگرایی نیست، یعنی معلوم نیست بتوان همهٔ ریشه‌ها (به‌زبان جبری یا همهٔ $\underline{x}^*$های محتمل بهینه) را به‌دست آورد، شگرد زیر توسط مبدعان روش اتخاذ شده است.

ابتدا دو طرف رابطه (۱)، یعنی تعریف تابع هدف (به‌صورت بسجمله‌ای مثبت) را تقسیم بر y (مقدار تابع هدف) کنید:

$$1=\sum_{p=1}^{P}\left[c_p\prod_{n=1}^{N}\left(x_n^{\ a_{pn}}\Big/y\right)\right] \tag{۵}$$

عبارت داخل کروشه را بصورت وزن‌های[1] تصمیم‌گیری در نظرگرفته و می‌گوییم حلّ بهینه، شامل حلّ محاسبهٔ وزن‌های بهینه می‌شود، یعنی اگر بجای $\underline{x}^*$، w_p^* (یا $\underline{w}^*$) را بیابیم، انگار $\underline{x}^*$ را محاسبه کرده‌ایم:

$$w_p \triangleq c_p\prod_{n=1}^{N}\left(x_n^{\ a_{pn}}\Big/y\right) \triangleq c_p\frac{U_p(\underline{x})}{y}$$

و تعریف تابع هدف (رابطه ۵) به شکل زیر می‌شود:

$$\sum_{p=1}^{P}w_p=1 \tag{۶}$$

[1] Weights

دقّت شود که تعداد متغیرهای تصمیم‌گیری N می‌باشد، در حالی‌که تعداد متغیرهای جدید معادل P می‌باشد و الزاما" مساوی نیستند.

گام سوم – بازنویسی شرط لازم : تابع هدف رابطه(۶) را مشتق نمی‌گیریم، بلکه همان شرط یا دستگاه(۴) را با تعریف $\underline{w}$ بازترکیب می‌کنیم که نهایتا" منجر به رابطهٔ زیر می‌شود:

$$\sum_{p=1}^{P} a_{pn} w_p = 0 \quad , \quad n = 1, \cdots, N \tag{۷}$$

بدین ترتیب برای محاسبهٔ اکسترمم Nبُعدی و مقدار تابع هدف (مجموعا $N+1$ مجهول) نیاز به $N+1$ معادله داریم:

$$\sum_{p=1}^{P} w_p = 1 \tag{۶}$$

(شرط نرمال[2])
(به‌دست‌آمده از تعریف تابع هدف)

$$\sum_{p=1}^{P} a_{pn} w_p = \underline{0} \quad , \quad n = 1, \cdots, N \tag{۷}$$

(شرایط تعامد[3])
(به‌دست‌آمده از قضیه اکستریما)

پس به‌طور خلاصه، شرط لازم همان N (تعداد متغیرهای مستقل) معادله جبری است که در اینجا و به برکت تعریف هوشمندانه متغیرهای مستقل جدید (w_p) به شکل خطی ظاهر شده‌اند. وجه تسمیه شرط تعامد نیز به‌خاطر چهره معروف ترکیب خطی است که برابری با صفر آن تداعی‌کننده شرط تعامد دو بردار $\underline{w}$ و $\underline{a}_n$ در قاموس جبر خطی می‌باشد. هزینه این کار نیز اضافه‌شدن یک معادله یعنی شرط نرمال (برخاسته از تعریف تابع هدف) می‌باشد.

نکته – با کمی بازآرایی و بازترکیب روابط می‌توان مقدار y را برحسب $\underline{w}$ بدست آورد، به‌طور مثال، y را بصورت زیر بنویسید:

$$y = y^1 = y^{\sum w_p} = \prod_{p=1}^{P} y^{w_p}$$

اگر از تعریف w_p استفاده کنیم:

$$y = \prod_{p=1}^{P} \left[c_p \prod_{n=1}^{N} x_n^{a_{pn}} / w_p \right]^{w_p} = \prod_{p=1}^{P} \left(c_p / w_p \right)^{w_p} \prod_{p=1}^{P} \prod_{n=1}^{N} x_n^{a_{pn} w_p}$$

عبارت ضرب دوبله را می‌توان ساده‌تر کرد:

$$\prod_{p=1}^{P} \prod_{n=1}^{N} x_n^{a_{pn} w_n} = \prod_{n=1}^{N} x_n \left(\sum_{p=1}^{P} a_{pn}^{w_p} \right) = \prod_{n=1}^{N} x_n^0 = 1$$

فلذا، y برحسب $\underline{w}$ بدست می‌آید:

$$y = \prod_{p=1}^{P} \left(c_p / w_p \right)^{w_p}$$

مثال۲- تابع هدف اخیر را برحسب روش هندسی بهینه کنید.

$$y = 1000 x_1 + 4 \times 10^9 x_1^{-1} x_2^{-1} + 2.5 \times 10^5 x_2$$

حلّ: شرایط نرمال و تعامد را می‌نویسیم:

---
[2] Normality Condition
[3] Orthogonality Condition

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1 \quad \text{(شرط نرمال)}$$

$$\begin{cases} w_1 - w_2 = 0 \\ -w_2 + w_3 = 0 \end{cases} \quad \text{(شرایط تعامد)}$$

پس از حل دستگاه خواهیم داشت:

$$w_1 = 1/3 \,,\, w_2 = 1/3 \,,\, w_3 = 1/3$$

با جاگذاری در تابع هدف (محاسبه y با استفاده از $\underline{w}$)

$$y^* = 3 \times 10^6$$

محاسبهٔ نقاط اکسترمم:

$$w_1 = (1000x_1/3) \times 10^{-6} = 1/3 \quad \rightarrow \quad x_1 = 1000$$
$$w_2 = \left(4 \times 10^9 (x_1 x_2)^{-1}/3\right) \times 10^{-6} = 1/3 \quad \rightarrow \quad x_2 = 4$$
$$w_3 = 2.5 \times 10^5 x_2 / 3 \times 10^{-6} = 1/3 \quad \rightarrow \quad x_2 = 4$$

نکته: وجه ممیّزه مسائل برنامه‌ریزی هندسی با بقیه مسائل بهگزینی در اینست که ابتدا مقدار بهینه تابع هدف را به‌دست می‌آورند، سپس مقادیر بهینه متغیرهای مستقل! شاید مسئله اصلی و اوولی، محاسبه فقط همان مقدار تابع هدف باشد، یعنی یک توفیق اجباری!

سوال: معادله سوم در مثال اخیر اضافی بود، اصولاً برای حالاتی که تعداد جملات تابع هدف یکی بیشتر از تعداد متغیّرهای مستقل باشد جواب یگانه است و یک معادله اضافی دارد. به عبارت دیگر، دستگاه حل‌ّکننده wها استقلال خطی ندارند، چرا؟

نکته: در این مثال، تعداد جملات تابع هدف (یعنی P) یکی بیشتر از تعداد متغیرهای مسئله (یعنی N) بود. مسیر کار نیز این‌طور بود که با استفاده از شرایط نرمال و تعامد، ابتدا $\underline{w}$ را به‌دست آورده و سپس از روی $\underline{w}$، $\underline{X}^*$ به‌طور یگانه به‌دست آمد. پس، می‌توانیم این حکم کلی را بیان کنیم که اگر $P = N + 1$ باشد، آنگاه مسئلهٔ برنامه‌ریزی هندسی یک مسئلهٔ بهگزینی مقید به شکل زیر می‌شود:

$$\textit{maximize} \quad y(\underline{w}) = \prod_{p=1}^{P} \left(c_p / w_p\right)^{w_p}$$

$$\textit{subject to}: \quad \sum_{p=1}^{P} w_p = 1$$

$$\sum_{p=1}^{P} a_{pn} w_p = 0 \qquad \textit{for} \quad n = 1,2,\cdots,N \quad , \quad w_p \succ 0$$

به این نکته یا مسئله می‌گویند مسئله معادل[4]، چرا که از روی تابع هدف اصلی (مسئله مینیمم‌سازی) ساخته شده‌است.

مثال۳-۳. همان مثال قبلی را در نظر بگیرید، ولی فرض کنید یک جمله مثل هزینه خالص‌سازی نیز به آن اضافه شده‌است:

$$y = 1000x_1 + 4 \times 10^9 x_1^{-1} x_2^{-1} + 2.5 \times 10^5 x_2 + 9000 x_1 x_2$$

حل: شرایط نرمال و تعامد را می‌نویسیم:

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1$$
$$w_1 - w_2 + \qquad w_4 = 0$$
$$-w_2 + w_3 + w_4 = 0$$

دقت شود تعداد معادلات کم است. مسئله معادل را در نظر می‌گیریم:

$$y = (c_1/w_1)^{w_1} (c_2/w_2)^{w_2} (c_3/w_3)^{w_3} (c_4/w_4)^{w_4}$$

[4] Dual Problem

لذا باید از تکنیک‌های بهگزینی مقید استفاده کنیم، یعنی باید y را ماگزیمم کنیم (تحت قیود شرایط نرمال و تعامد)، فرض کنید از روش جایگزینی مستقیم می‌خواهیم مسئله را حل کنیم:

جایگزینی در تابع هدف $\Rightarrow$

$$\begin{cases} w_1 = (1-2w_4)/3 \\ w_2 = (1+w_4)/3 \\ w_3 = (1-2w_4)/3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ پس از حل w_1، w_2 و w_3 بر حسب w_4

$$y = [3000/(1-2w_4)]^{(1-2w_4)/3} \times [2\times10^9/(1+w_4)]^{(1+w_4)/3} \times [7.5\times10^5/(1-2w_4)]^{(1-2w_4)/3} \times [9000/w_4]^{w_4}$$

حال باید نسبت به w_4 مشتق بگیریم! همانطورکه معلومست این مشتق‌گیری بسیار سخت می‌باشد و اصلا" بهتراست برگردیم به مسئلهٔ اصلی که بهینه‌سازی نامقید است، تا مسئلهٔ معادل که مقید است.

به این مسئله، یعنی P دو واحد از N بزرگترست می‌گویند مسئله معادل دارای سختی[5] ۱ می‌باشد. اصولا" اختلاف بین P و $N+1$ را به‌عنوان یک تقسیم‌بندی در نظر می‌گیرند، برای این مثال (چهار جمله، دو متغیر مستقل):

$$P-(N+1)=4-(2+1)=1$$

ولی برای مثال قبل‌تر (سه جمله و دو متغیر مستقل)، مسئله دارای سختی صفر است:

$$P-(N+1)=3-(2+1)=0$$

پس به‌طور کلی، مسائل با سختی صفر، منجر به حل پایدار و یگانهٔ یک دستگاه جبری (برحسب $\underline{w}$) می‌شود ولی اگر سختی بزرگتراز صفر باشد، آنگاه مسئلهٔ معادل، یک مسئلهٔ بهگزینی مقید می‌شود، در حالی‌که مسئلهٔ اصلی، نامقیدست. دقت شود اگر مسئلهٔ اصلی، مینیمم‌سازی باشد، آنگاه مسئلهٔ معادل، ماگزیمم‌سازی است و بالعکس.

نکته – اگر سختی مسئلهٔ معادل منفی باشد، چه‌کنیم؟ در حالت کلی این تیپ مسائل را نمی‌توان با روش برنامه‌ریزی هندسی حل کرد. گرچه روش‌هایی پیشنهاد شده‌است، مثلا" برخی از متغیرهای مستقل را فیکس بگیریم (یعنی N را کوچک کنیم) تا سختی مسئله معادل صفر شود و به یک تخمینی از جواب برسیم.

به‌طور خلاصه:

در صورتیکه تعداد جملات تابع هدف، یکی بیشتر از تعداد متغیرهای مستقل باشد، آنگاه می‌توان مسئلهٔ معادل را حل کرد و بطور یگانه $\underline{w}$ را بدست آورد. اگر P بزرگتر از $N+1$ باشد، شاید بهتر باشد روش دیگری غیر از برنامه‌ریزی هندسی اتخاذ کنیم و اگر P کوچکتر از $N+1$ باشد، آنگاه می‌توان فقط تخمینی از جواب[6] را بدست آورد.

بهینه‌سازی چندجمله‌ای‌ها

ایده، همانست که در بهینه‌سازی Posynomial ها دیدیم. تنها تفاوتی که دارد اینست که جواب اکسترمم است و باید از شرایط کافی گفته‌شده در فصل قبلی به ارزیابی جواب (مینیمم، ماگزیمم و نقطهٔ عطف) پرداخت. نکته کار نیز در جداکردن عبارات بصورت مثبت و منفی می‌باشد(تفاضل دوposynomial):

$$y(\underline{x}) = \sum_{p=1}^{k} c_p \prod_{n=1}^{N} x_n^{a_{pn}} - \sum_{p=k}^{P} c_p \prod_{n=1}^{N} x_n^{a_{pn}} \quad , \quad \underline{x} = [x_1\ x_2 \cdots x_n]^T \tag{۳-۸}$$

بعد از بازآرایی و بازترکیب روابط:

[5] Difficulty
[6] Suboptimal

مسئله اصلی:

$$Optimize:$$
$$y(\underline{x})=\sum_{p=1}^{k}c_p\prod_{n=1}^{N}x_n^{a_{pn}}-\sum_{p=k}^{P}c_p\prod_{n=1}^{N}x_n^{a_{pn}} \quad ,$$
$$Subject\ to:\ c_p\succ 0 \quad , \quad x_n\succ 0$$

مسئله معادل:

$$Optimize:$$
$$y(\underline{w})=\prod_{p=1}^{k}\left(c_p/w_p\right)^{w_p}\Big/\prod_{p=k+1}^{P}\left(c_p/w_p\right)^{w_p} \quad ,$$
$$Subject\ to:\ \begin{cases}\sum_{p=1}^{k}w_p-\sum_{p=k+1}^{N}w_p=1\\ \sum_{p=1}^{k}a_{pn}w_p-\sum_{p=k+1}^{N}a_{pn}w_p=0\end{cases} \quad , \ for \quad n=1,2,\cdots,N \quad , \ w_p\succ 0$$

مثال۴-۳. مطلوبست حلّ بهینه‌سازی تابع هدف زیر (با روش برنامه‌ریزی هندسی)

$$y=3x_1^{0.25}-3x_1^{1.1}x_2^{0.6}-115(x_2x_3)^{-1}-2x_3$$

حل: با توجه به فرم مسئله:

$$c_1=3 \quad , \quad c_2=3 \quad , \quad c_3=115 \quad , \quad c_4=2$$
$$\begin{bmatrix}a_{11}=0.25 & a_{21}=1.10 & a_{31}=0.00 & a_{41}=0.00\\ a_{12}=0.00 & a_{22}=0.60 & a_{32}=-1.0 & a_{42}=0.00\\ a_{13}=0.00 & a_{23}=0.00 & a_{33}=-1.0 & a_{43}=1.00\end{bmatrix}$$

شرایط نرمال و تعامد:

$$\begin{cases}w_1-w_2-w_3-w_4=1\\ 0.25w_1-1.1w_2=0\\ -0.6w_2+w_3=0\\ w_3-w_4=0\end{cases} \Rightarrow \text{(پس از حل دستگاه)} \Rightarrow \begin{cases}w_1=2\\ w_2=5/11\\ w_3=3/11\\ w_4=3/11\end{cases}$$

مقدار بهینه (در اینجا ماگزیمم):

$$y^*=(3/2)^2\Big/\left[(3\times 11/5)^{5/11}(115\times 11/3)^{3/11}(2\times 11/3)^{3/11}\right]=0.1067$$

مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم‌گیری از روی تعریف و حل مناسب w_p ها بدست می‌آیند:

$$\begin{cases}\dfrac{3x_1^{0.25}}{0.1067}=2\\ \dfrac{3x_1^{1.1}x_2^{0.6}}{0.1067}=\dfrac{5}{11}\\ \dfrac{115x_2^{-1}x_3^{-1}}{0.1067}=\dfrac{3}{11}\\ \dfrac{2x_3}{0.1067}=\dfrac{3}{11}\end{cases} \quad \text{(پس ازحل)} \Rightarrow \quad \begin{cases}x_1^*=2.56\times 10^{-5}\\ x_2^*=2.716\times 10^{5}\\ x_3^*=1.455\times 10^{-2}\end{cases}$$

$\Rightarrow$

نکته: به ساختار $y(\underline{w})$ دقت کنید، همیشه مثبت به‌دست می‌آید، در صورتی‌که به مشکل برخوردید (به‌طور مثال، مقدار مینیمم منفی باشد)، آنگاه مسئله ماگزیمم‌سازی را با یک منفی به تابع هدف، به مسئله مینیمم‌سازی تبدیل کنید و بالعکس.

مراجع

1. Duffin, R.J.; Peterson, E.L.; Zener, C.M., "Geometric Programming", John Wiley & Sons, Inc., NY (1967).
2. Beightler, C.S.; Philips, D.T.; "Applied Geometric Programming", John Wiley & Sons, Inc., NY, (1976).