فصل ٤ – برنامه‌ریزی خطی

مفاهیم اساسی، مبادی تصور:

۱– تابع هدف و قیود به شکل یک ترکیب خطی ظاهر می‌شوند.

۲– اگر مدل‌سازی به فرم یک مسئله ماکروسکوپیک باشد آنگاه قیود (معمولاً) به صورت بیلان جرم و انرژی ظاهر می‌شوند.

۳– مقدار مینیمم یا ماگزیمم در مرزها اتفاق می‌افتد (مثل $f(\underline{x}) = x_1 + x_2$).

۴– قیود زیر به طور ضمنی ظاهر می‌شوند ($x_i \succ 0$).

۵– برنامه‌ریزی به مفهوم Planning است، نه کد نویسی.

۶– قیود مساوی نداریم (حذف با جایگزینی) ولی در الگوریتم جامع می‌توان آن‌ها را گنجاند.

۷– فرمولاسیون باید منجر به یک مسئله به نهاد[1] تبدیل شود.

۸– آنالیز و تحلیل فرا بهینه‌سازی[2]

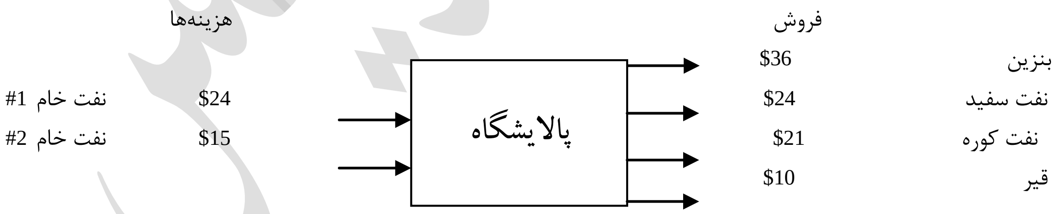
۹– تحت شرایط خاص، می‌توان هم مینیمم و هم ماگزیمم را تعیین نمود.

۱۰– دو روش Simplex و Karmarkar برای LP وجود دارند که در اینجا بـه اوّلـی و آن هـم بـه خـاطر بـار تحلیلـی آن می‌پردازیم.

نقشه، قصد و چگونگی آموزش:

ابتدا، یک مثال دو متغیره طرح می‌کنیم، با حل دستی - گرافیکی ایده را به طور شهودی مطرح کرده و در ضمن آن، تنگناها و نکات مربوطه را یادآور می‌شویم، سپس حل دستی (هندسی) را به حل کامپیوتری برای مسائل چند متغیره (جبری) تعمیم می‌دهیم.

مثال (پایه)۱- (مسئله اختلاط در پالایشگاه) فرمولاسیون مسئله شامل تعریف تابع هدف بـر حسـب متغیرهـای تصـمیم‌گیـری: (مبنـای حجم: ۱ بشکه)



	درصد پردازش (پالایش) #1	#2	ماگزیمم ظرفیت پالایش (بشکه در روز)
بنزین	80	44	24000
نفت سفید	5	10	2000
نفت کوره	10	36	6000
قیر	5	10	
هزینه تولید و پالایش ($)	0.5	1.00	

نکته: به ظرافت‌های فرمولاسیون یا پیش بهینه‌سازی نظیر نگاه کلان به پالایشگاه، ظرفیت و درصد پردازش، الزامات تعریـف تابع هدف و قیود توجه کنید.

[1] Well-posed
[2] Post-optimization

اولین چیزی که به ذهن می‌رسد این است که در فرمولاسیون (شکل بالا) هرچه متغیر می‌بینیم تعریف کنیم (**تعریف متغیّرهای تصمیم‌گیری**):

x_1	بشکه در روز، فلوی نفت خام #1	x_4	فلوی (ظرفیت) تولید نفت سفید
x_2	بشکه در روز، فلوی نفت خام #2	x_5	فلوی (ظرفیت) تولید کوره
x_3	فلوی (ظرفیت) تولید بنزین	x_6	فلوی (ظرفیت) تولید قیر

نکته: در مسائل اختلاط (Blending/Pooling) نوعاً دبی‌ها متغیر تصمیم‌گیری می‌شوند.

تابع هدف: هزینه تولید - هزینه مواد خام - درآمد (عایدی) = سود = $Maximize \quad f(\underline{x})$

درآمد $\equiv 36x_3 + 24x_4 + 21x_5 + 10x_6$

هزینه مواد $\equiv 24x_1 + 15x_2$

هزینه تولید $\equiv 0.5x_1 + x_2$

قیود: قیود مساوی (روابط) که همان بیلان جرم است:

بنزین : $0.80x_1 + 0.44x_2 = x_3$

نفت سفید : $0.05x_1 + 0.10x_2 = x_4$

نفت کوره : $0.10x_1 + 0.36x_2 = x_5$

قیر (باقیمانده) : $0.05x_1 + 0.10x_2 = x_6$

نکته: در مسائل اختلاط و به مفهوم وسیع کلمه در مسئله شبکه‌ها نظیر مدل‌سازی شبکه حفره‌ها (در محیط متخلخل)، توزیع و انتقال قدرت یا لوله‌کشی و توزیع/انتقال گاز، برای تعریف قیود مساوی ابتدا سراغ گره‌ها می‌رویم، فأفهم و أغتنم.

قیود نامساوی:

$x_3 \le 24000$

$x_4 \le 2000$

$x_5 \le 6000$

قیود نامساوی (lower bounds): $x_1 \ge 0\,,\ x_2 \ge 0$

(چرا بقیه را نمی‌نویسیم، در ادامه خواهیم گفت)

نهایتاً با جایگزینی مستقیم (یا حل دستگاه)، قیود مساوی را حذف می‌کنیم:

به طوری که $\underline{x} = [x_1 \quad x_2]^T$

تابع هدف (ماگزیمم سازی) : $Maximize \ f(\underline{x}) = 8.1x_1 + 10.8x_2$ یا

تابع هدف (مینیمم سازی) : $Minimize \quad f(\underline{x}) = -8.1x_1 - 10.8x_2$

قیود :

$$\begin{cases} 0.80x_1 + 0.44x_2 \le 24000 & \text{(A)} \\ 0.05x_1 + 0.10x_2 \le 2000 & \text{(B)} \\ 0.10x_1 + 0.36x_2 \le 6000 & \text{(C)} \end{cases}$$

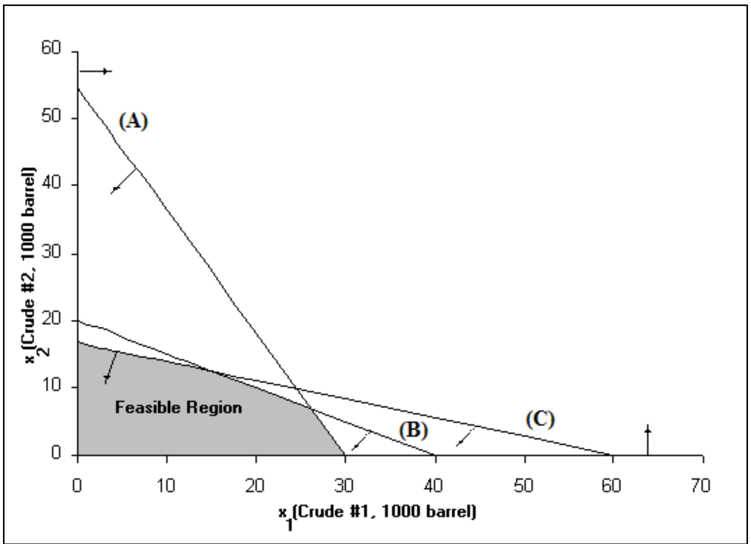
(A) بنزین
(B) نفت سفید
(C) نفت کوره

سئوال: قیر را ننوشتیم، چرا؟

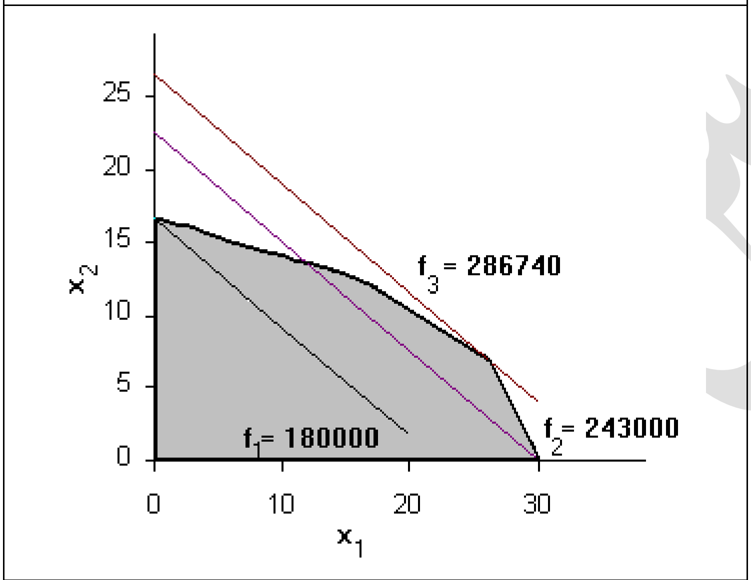
نکته: استثنائاً در این مسئله ابتدایی و ساده قیود مساوی را و آن هم محض سهولت فهم حذف می‌کنیم وگرنه در الگوریتم جامع (در انتهای فصل بحث می‌شود) یا بسته‌های نرم‌افزاری تجاری امکان درج قیود مساوی برقرار است.

سئوال: آیا برای تبدیل مسئله مینیمم سازی به ماگزیمم سازی (و بالعکس) می‌توان همیشه از ضرب 1- در تابع هدف استفاده کرد؟

مسئله را به صورت تحلیلی (برنامه‌ریزی ریاضی $\partial f/\partial x_i = 0$) نمی‌توان حل کرد، پس به طور گرافیکی ببینیم چه اتّفاقی دارد می‌افتد.



در این شکل فقط قیود را رسم کرده‌ایم. رسم دقیق، مقدار اسکالر تابع هدف را نیز شامل می‌شود که عمود بر صفحه بوده و مکان آن یک صفحه است، در شکل پایین‌تر، کنتورها یا مقادیر تابع هدف نیز رسم شده است.



نکته: تصاویر را حرکت دهید، می‌بینید مقدار ماگزیمم در نقاط تقاطع اتفاق می‌اُفتد.

نکته: مکان تصاویر به صورت خط راست است:

$$f=8.1x_1+10.8x_2 \quad \rightarrow \quad x_2=\frac{f-8.1x_1}{10.8}$$

یعنی خطی با شیب معادل $-\dfrac{8.1}{10.8}$ و عرض از مبدأ برابر با $\dfrac{f}{10.8}$(متناسب با f).

پس به طور شهودی (حرکت با شیب بلا تغییر خط تابع هدف) فهمیدیم که ماگزیمم در محل تقاطع قیود A و B اتفاق می‌اُفتد:

$$\begin{cases}(A) & 0.80x_1+0.44x_2=24000\\ (B) & 0.05x_1+0.10x_2=2000\end{cases} \rightarrow \quad \text{پس از حل} \quad \rightarrow x_1^*=26200\,,\, x_2^*=6900 \Rightarrow f(\underline{x}^*)=8.1x_1^*+10.8x_2^*=286740 \quad \$$$

بد نیست در بقیه گوشه‌ها نیز مقدار تابع هدف را بیابیم:

تقاطع C با محور قائم ($x_1=0$) $\quad (0\,,16667) \quad f=180000 \quad \$$

تقاطع B با C $\quad (15000\,,12500) \quad f=256500 \quad \$$

تقاطع A با محور افقی ($x_2=0$) $\quad (30000\,,0) \quad f=243000 \quad \$$

تعبیر فیزیکی: تقاطع A و B، یعنی ماگزیمم سود (صرفه اقتصادی) در ماگزیمم تولید بنزین و نفت سفید اتفاق می‌اُفتد (چون نقطه تقاطع هم روی خط A است و هم خط B) ولی نفت کوره نه.

نکته: مجدداً ایفای شعار به گزینی مبنی بر مینیمم زحمت، جستجو و تکرار یادآوری می‌گردد: در دو مرحله، از بی‌نهایت نقطه بهینه کاندیدا به چند نقطه محدود رسیدیم.

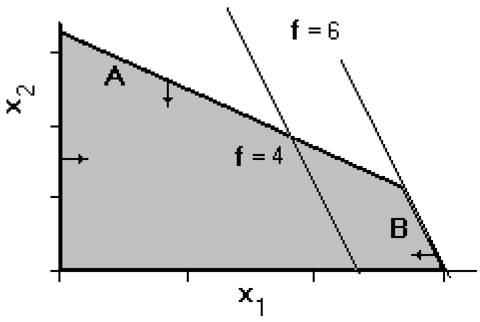
مسئله به نهاد و جواب‌های Degenerate

اگر خوب مسئله را فرموله نکنیم، به یک جواب یگانه مینیمم یا ماگزیمم نمی‌رسیم، مسائل این‌چنینی را به صورت گرافیکی - شهودی بیان می‌کنیم که در ابعاد بزرگ به راحتی قابل تمیز نیست و معمولاً یک اِشکالی در کار است.

(۱) جواب نا یکتا: مسئله و حل گرافیکی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Maximize} \quad f(\underline{x}) = 2.0x_1 + 0.5x_2$$

$$\text{Subject to} \quad \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \le 30 & (A) \\ 4x_1 + x_2 \le 12 & (B) \\ x_1 , x_2 \ge 0 \end{cases}$$

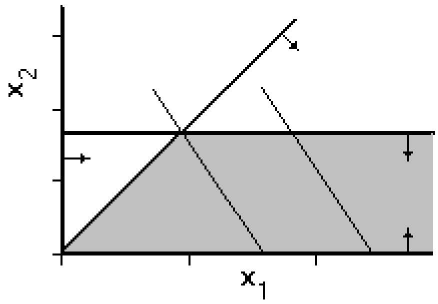


نکته: سه معادله تابع هدف و قیود استقلال خطی ندارند (شیب خط تابع هدف با شیب B یکی است، موازی است).

(۲) جواب بهینه نامحدود: مسئله و حل گرافیکی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Maximize} \quad f(\underline{x}) = -x_1 - x_2$$

$$\text{Subject to} \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 0 & (A) \\ x_2 \le 3 & (B) \\ x_1 , x_2 \ge 0 \end{cases}$$

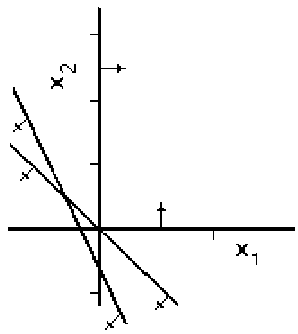


نکته: گوشه دیگری نداریم تا بگوییم بهینه در آن اتفاق می‌افتد.

(۳) منطقه جواب ممکن اصلاً نداریم: مسئله و حل گرافیکی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Maximize} \quad f(\underline{x}) = -x_1 - x_2$$

$$\text{Subject to} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \le -2 & (A) \\ x_1 + 4x_2 \le 0 & (B) \\ x_1 , x_2 \ge 0 \end{cases}$$



نکته: اشتباه در بردار ثوابت یا ضرایب.

به طور کلی، برای هر مسئله LP چهار حالت می‌توان متصوّر شد:

۱- اصلاً جواب نداشته باشد،

۲- یک جواب نامحدود (باز) داشته باشد،

۳- یک جواب یگانه بهینه داشته باشد و

۴- بی‌نهایت جواب بهینه داشته باشد.

به حال، اینکه اکسترمم مسائل LP همیشه در گوشه‌ها اتّفاق می‌اُفتد، مهم‌ترین خاصیت (اساس قضیه LP) این نوع مسائل است، چرا که ما را بی‌نیاز از جستجوی تکراری در ناحیه ممکن جواب یا مرزهای آن می‌کند. این نکته برای حالت کلی n متغیره جاری است و اساس روش سیمپلکس و شگرد نهفته در آن است. نکته‌ای که باید به آن توجّه داشت این است که برای حالت سه یا چهار متغیره به بالا، باید مفهوم رئوس و گوشه‌ها را تعمیم دهیم. این کار را با فرمولاسیون جبری به جای فرمولاسیون جغرافیایی – گرافیکی و قابل تجسّم (منحصر به حالت دوبُعدی) انجام می‌دهیم و برای سرعت بالاتر، صحیح‌تر و دقیق‌تر، باید آن را در قالب الگوریتم و روشی سامانمند انجام داد تا قابل پیاده‌سازی روی کامپیوتر باشد.

حل سامانمند (کامپیوتری، الگوریتمیک)، روش Simplex

ماشین‌ابزار Simplex برای حل مسائل LP، مبتنی بر دو نکته اصیل و متین ریاضی است. یکی قضیه مهم LP که اکسترمم در گوشه‌ها (محل تقاطع چند قید) اتّفاق می‌اُفتد و دیگری جبر پشتیبان آن یعنی جبر خطی است. از آنجایی که تعداد قیود محدود (ولی نه الزاماً اندک) هستند، کافی است با یک روش سامانمند از یک گوشه کاندیدا به گوشه دیگر برویم و کنترل کنیم آیا در مقدار تابع هدف بهبودی حاصل شده است یا خیر؛ بنابراین اصل کار و هدف اولی و علیای Simplex از یک گوشه به گوشه دیگر رفتن است. بقیه کار و سایر جزئیات الگوریتم، حاشیه‌ای، ثانوی و مصرف جنبی دارد، نظیر محاسبه اولین گوشه کاندیدا، آنالیز حساسیت، گزارش ناسازگاری (degeneracy)، تناظر و امثالهم.

نکته: این روش، با روش جستجوی چند متغیره سیمپلکس متوالی (Sequential simplex) اشتباه نشود.

نکته: بیش از ده نوع واریانت و نرم‌افزار روی حل Simplex داریم.

برای شرح الگوریتم، نیازمند نوعی نمایش یکدست، استاندارد و مشروع (Canonical) از مسائل LP هستیم. فرم استاندارد LP برای مینیمم سازی به صورت زیر است:

$Minimize:\ f(\underline{x})=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \equiv \underline{c}^{T}\underline{x}$	(۱) – تابع هدف
$S.T.\ : A_{eq}\underline{x}=\underline{b}_{eq}$	(۲) – قیود مساوی
$A'_{neq}\underline{x}\geq \underline{b}'_{neq} \quad , \quad A'_{neq}\underline{x}\leq \underline{b}'_{neq}$	(۳) – قیود نامساوی به فرم رابطه
$\underline{l}\leq \underline{x}\leq \underline{u}$	(۴) – قیود نامساوی به صورت باند

همان طور که از رابطه بالا معلوم است، تابع هدف و همچنین قیود به فرم خطی ظاهرشده‌اند. در ادامه برای شرح شگردهای Simplex (نکات سازنده و آموزنده)، از فرم خلاصه‌تر زیر استفاده می‌کنیم:

$Minimize:\ f(\underline{x})=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \equiv \underline{c}^{T}\underline{x}$	(۵) – تابع هدف
$S.T.\ :\ \sum_{j=1}^{n} a_{ji}x_i \leq b_j \quad , \quad j=1,2,\cdots,m$	(۶) – قیود نامساوی به فرم رابطه
$x_i\geq 0 \quad i=1,2,\cdots,n$	(۷) – قیود نامساوی به صورت باند

ذکر این نکته لازم است که فرمولاسیون ساده LP (یعنی روابط ۵ تا ۷) به کلیات روش Simplex خدشه‌ای وارد نمی‌سازد و فقط محض سهولت و تفهیم بهتر طرح شده است. به طور مثال قیود مساوی (رابطه ۲) حذف شده است، چرا که می‌دانیم در فاز فرمولاسیون (پیش بهینه‌سازی)، چون قیود به شکل خطی هستند، پس می‌توان دستگاه خطای را حل کرده و شبیه جایگزینی مستقیم، برخی متغیّرها را بر حسب بعض دیگر حل کرد و در تابع

هدف جایگذاری کرد، یعنی با یک تیر دو نشان زد، هم قیود مساوی از مسئله اصلی حذف می‌شود و هم سایز مسئله کوچک‌تر می‌شود. البته لازم به ذکر است که جز در حالت پردازنده‌های سمبلیک و تعداد قیود کم می‌توان از این روش بهره گرفت و اگر از نرم‌افزارهای معمولی که مجهز به روتین‌های عددی هستند استفاده کنیم، استفاده از روش‌های جایگزینی مستقیم اگر غیرممکن نباشد، به راحتی مقدور نیست. به هر حال، برای این حالت هم چاره وجود دارد. اساس و ماشین‌افزار Simplex جبر خطی یا جبر ماتریس‌ها است. همان طور که بعداً خواهیم دید، قیود نامساوی با استفاده از متغیّرهای کمبود/مازاد به قیود مساوی تبدیل می‌شوند تا تشکیل یک دستگاه جبری و خطی نا معیّن (مستطیلی، تعداد معادلات کمتر از تعداد مجهولات، Under-determined) بدهند و از اینجا به بعد، همین دستگاه جبری هست که خمیرمایه Simplex را تشکیل می‌دهد. حال کافی است کنار، زیر یا بالای این دستگاه، قیود مساوی را نیز بیاوریم، به همین سادگی (!)، فأفهم.

یک ساده‌سازی دیگر، حذف قیود نامساوی به صورت باند بالا و پایین (رابطه ۴)و جایگزینی باند پایین صفر (رابطه ۷) است. این نیز برای سهولت آمده و در بخش‌های متعاقب به حالت کلی و استاندارد نیز پرداخته می‌شود.

قبل از شروع به مبادی و مبانی روش Simplex، طی الگوریتم ساده‌شده (در بخش بعدی این فصل) لازم است به ترمینولوژی و اصطلاحات متداول زیر در Simplex که برخی از آن‌ها برگرفته از جبر خطی و برخی دیگر به قضایای LP مربوط می‌شوند، حساسیت و دقّت لازم را داشت تا موقع یکپارچه‌سازی و ارائه روش جامع (برای حل LP استاندارد) مشکل مفهومی و چرایی پیش نیاید:

۱- ماتریس پایه (Basis Matrix)
۲- حل ممکن، نقطه کاندیدا، گوشه ممکن
۳- حل پایه (Basis Solution)
۴- حل پایه ممکن (Basic Feasible Solution)
۵- متغیّر اساسی (وابسته، به دست آمده از حل دستگاه مربّعی) و متغیّر غیراساسی (غیر وابسته و فیکس)
۶- جواب سازگار (non-degenerate Solution)
۷- حل دستگاه نامعین
۸- حل یکتا و بهینه
۹- دستگاه‌های جبری معادل
۱۰- عملیات سطری
۱۱- محور گیری (Pivoting)
۱۲- تابلوی سیمپلکس (Simplex Tableu)

نکته اعظم: قیود، اقیانوس کبیر LP است و بدون آن‌ها مسئله LP اصلاً بلا موضوع می‌شود، فأفهم و روش سیمپلکس چه خوب در این دریا شنا می‌کند. اگر به تعداد m قید داشته باشیم، می‌توان ثابت کرد که روش سیمپلکس حداکثر با 2m تکرار به جواب می‌رسد و آن هم چه جوابی، جواب قابل مدیریت، قابل تعقیب و قابل تعمیم.

الگوریتم ساده Simplex برای مینیمم سازی: (الگوریتم پیشتاز)

تمام نکته این است که به طور جبری از یک گوشه به یک گوشه دیگر برویم.

گام صفر: تمامی قیود مساوی را حذف کرده و قیود نامساوی را طوری مرتب کنید تا سمت راست آن‌ها مثبت باشد.

گام اول: با استفاده از متغیرهای مازاد / کمبود، قیود نامساوی را به معادلات خط (قیود مساوی) تبدیل کنید.

گام دوم: یک حل پایه[۳] (همه متغیرها مثبت) تعریف یا انتخاب کنید (از روی یکی از رئوس یا محل‌های تقاطع خطوط قیود روی منطقه حل ممکن)

---

[۳] Basic Feasible Solution

گام سوم: متغیرهای اساسی (پایه) و غیراساسی (غیر پایه) جدید را انتخاب کنید.

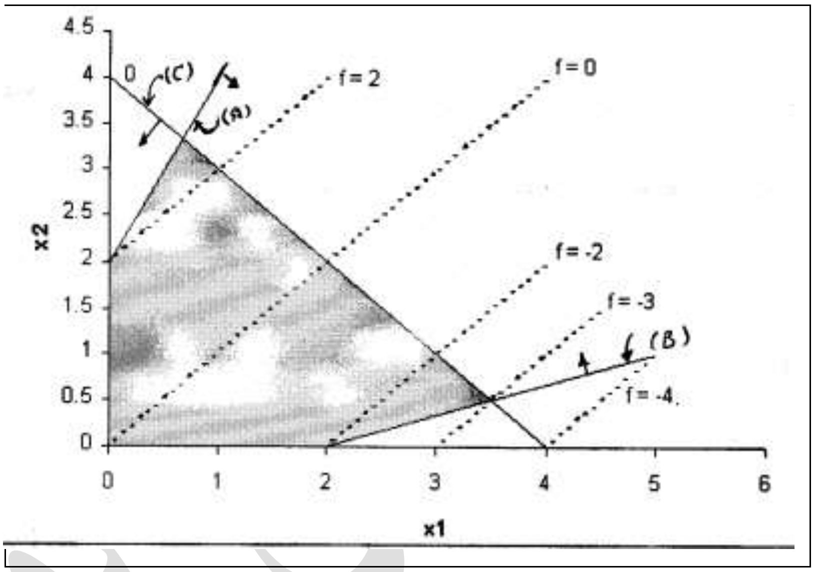
گام چهارم: معادلات را تبدیل کنید (بر حسب متغیرهای جدید)، (روش حذفی گوس، عملیات سطری)

گام پنجم: آیا تابع هدف بهبود پیدا کرد (در مینیمم سازی باید مقدار تابع کمتر شده و در ماگزیمم سازی بیشتر)؟ در صورت بهبودی به گام سوم برگشته و حلقه را تکرار کنید.

مثال ۲– همان مثال پایه را ولی با بُعد کم برای همراهی تعبیر گرافیکی یا روش دستی و مقایسه معرفت‌شناختی ادامه می‌دهیم:

$$\text{Minimize} \quad f = -x_1 + x_2$$

$$\text{Subject to} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 2 & (A) \\ -x_1 + 3x_2 \geq -2 & (B) \\ -x_1 - x_2 \geq -4 & (C) \\ x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$



گام صفر: مثبت کردن سمت راست عبارات قیود:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}$$

گام اول: تعریف متغیّرهای کمبود و یا مازاد (چون در این مثال همه نامساوی‌ها به صورت کوچک‌تر یا مساوی است، پس همه متغیرها ، کمبود هستند.)

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 & (A) \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = 2 & (B) \\ x_1 + x_2 + x_5 = 4 & (C) \end{cases}$$

فرم دستگاه معادلات:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 2 & (A) \\ x_1 - 3x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 = 2 & (B) \\ x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 4 & (C) \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

نکته: آماده شوید برای گام بعدی، همان طور که معلوم است سه معادله داریم و پنج مجهول. لذا دو درجه آزادی داریم و باید دو تا را فیکس بگیریم و دستگاه معادلات (با سایز ۳) را حل کنیم. ولی پس از حل، معلوم نیست که جواب همگی مثبت باشند، لذا با یک مسئله انتخاب آن دو متغیر (درجه آزادی) روبرو هستیم تا پس از حل، عملاً از یک گوشه به گوشه دیگر

برویم. به همین خاطر می‌گوییم ابتدا (در گام دوم) یک حل پایه[۴] انتخاب کنید. (فن‌هایی وجود دارد که این حل پایه مناسب را پیدا می‌کنند یا روش‌هایی غیر از Simplex وجود دارند که اصلاً نیازی به آن ندارند.)

گام دوم: حل پایه ممکن: به طور کلی اگر n متغیر داشته باشیم ولی m معادله (n>m)، آنگاه بی‌نهایت جواب داریم، برای به دست آوردن جواب‌ها، باید n-m تا متغیر را فیکس کنیم (مثلاً بگذاریم صفر) و دستگاه را حل کنیم، پس (اولاً) n-m تا درجه آزادی (یا متغیر غیراساسی) داریم، (ثانیاً) m تا متغیراساسی داریم. حل دستگاه مربعی مستقل خطی منجر به حل پایه می‌شود.

نکته: چرا می‌گوییم حل پایه ممکن: اول به این ادعا (از طریق مثال خودمان) توجه کنید: گوشه‌های فضای ممکن، معادل است با صفر قرار گرفتن برخی متغیّرها. به شکل مراجعه کنید.

گوشه ۱: محل تقاطع (A) و (C) است، یعنی انگار در معادله‌های (A) و (C)، x_3 و x_5 را صفر گذاشته‌ایم (دو تا از سه تا متغیّر کمبود).

گوشه ۲: محل تقاطع (B) و (C) است یعنی انگار x_4 و x_5 صفر شده‌اند (دو تا از سه متغیّر کمبود).

ولی تقاطع (A) و (B)، یعنی $x_3 = x_4 = 0$ منجر به مقادیر منفی متغیّرها می‌شود و لذا حل پایه (حل دستگاه مربعی) هست ولی ممکن نیست:

$$\begin{array}{ll} (A) & -2x_1 + x_2 = 2 \\ (B) & x_1 - 3x_2 = 2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -1.6 \\ x_2 = -1.2 \end{cases}$$

ادامه حل:چون دو متغیّر مستقل داریم (x_1 و x_2)، متغیّرهای غیراساسی را همان آن دو می‌گیریم ($x_1 = x_2 = 0$) و متغیّرهای اساسی (سه تای دیگر که در اینجا متغیّرهای کمبود هستند) را بر حسب آن‌ها به دست می‌آوریم. امیدواریم به یک حل پایه ممکن برسیم، یعنی جواب همگی مثبت باشند.

{ بعداً راجع به فن‌های اولین حل پایه ممکن خواهیم پرداخت}

$$\underset{\text{(متغیرهای غیراساسی)}}{x_1 = x_2 = 0} \quad \rightarrow \quad \underset{\text{(متغیرهای اساسی یا وابسته)}}{\begin{cases} (A) & x_3 = 2 \\ (B) & x_4 = 2 \\ (C) & x_5 = 4 \end{cases}} \quad \xrightarrow{\text{(همگی مثبت)}} \quad \underline{\text{مقدار اوّل (تابع هدف)}} \quad f + x_1 - x_2 = 0$$

گام سوم: انتخاب متغیّرهای جدید (اساسی و غیراساسی)

(برای حرکت از گوشه مبدأ به یک گوشه دیگر، به طوری که بهبودی برای f حاصل شود، یعنی f کمتر یا کوچک‌تر شود)

باید برای این حرکت یک معیار داشته باشیم، سه رویکرد موجود است:

- اگر شهودی (گرافیکی) باشد، با نگاه گوشه بعدی را انتخاب می‌کنیم (مقایسه می‌کنیم) و برای محاسبه دقیق، دو خط مزبور را قطع می‌دهیم.
- اگر سامانمند بخواهیم، باید جبری این کار را انجام دهیم.
- در غیر این صورت باید خیلی مقدار تابع را فراخوانی کنیم و این خلاف قاعده به گزینی هوشمندانه است. (اگر تعداد ابعاد، یعنی مقدار متغیّرها بسیار زیاد باشد، ترکیب و فراخوانی آن‌ها آن‌قدر زیاد است که ممکن است یک قرن طول بکشد، چون به طور نمایی زیاد می‌شود.)

فعلاً روش دوم را دنبال می‌کنیم، به فرم تابع هدف نگاه کنید: $f = -x_1 + x_2$ ، قرار است x_1 و x_2 هم مثبت باشند، پس اگر x_1 مقدار مثبتی اختیار کند، باعث شده است که f کوچک‌تر شده و چون به فرم خطی است، کافی است به ضریب متغیّرها در فرم f دقت کنیم:

---

[۴] Basic Solution

قاعده انتخاب متغیر اساسی جدید:

(اگر فرم $f=-x_1+x_2$ در نظر بگیریم) متغیّری که دارای ضریب منفی بوده و از نظر قدر مطلق، بزرگ‌ترین مقدار یا کوچک‌ترین ضریب (و البتّه منفی).

(اگر فرم خطی در نظر بگیرید: $x_1-x_2+f=0$) متغیّری که دارای بزرگ‌ترین ضریب (و البتّه مثبت) باشد.

x_1 را در زمره متغیّرهای اساسی قراردادیم ولی از آن طرف باید یکی از متغیّرهای اساسی قدیمی (یعنی x_4 یا x_5 یا x_6) را باید غیراساسی کنیم، یعنی معادل صفر قرار دهیم، ولی کدامین را؟ به مسیر استدلالی زیر توجه کنید:

قرار شد x_1 غیر صفر باشد و هر چه بزرگ‌تر باشد، بهتر، چون f را کوچک‌تر می‌کند، از طرفی در گوشه مبدأ هستیم و می‌خواهیم به سمت دیگر حرکت کنیم، اگر آرمانی نگاه کنیم، x_1 را باید $+\infty$ بگیریم ولی قیود نمی‌گذارند، مثلاً روی محور افقی (افزایش x_1) اگر حرکت کنیم، تا محل تقاطع خط (B) با محور افقی بیشتر نمی‌توانیم پیش برویم. لذا باید بفهمیم تا کجا می‌توان x_1 را زیاد کرد، شاید فرجی حاصل شد و فهمیدیم کدام متغیر x_4، x_5 یا x_6 را باید غیراساسی (معادل صفر) کرد:

یادآوری: کجا هستیم؟ از دو متغیر غیراساسی x_1 و x_2 فعلاً x_1 را اساسی کرده‌ایم ولی x_2 همچنان صفر است و دنبال این هستیم که متغیّر غیراساسی جدید کدام است.

قید (A) : (x_2 را صفر نگه‌دارید) $-2x_1+\overbrace{x_2}^{\equiv 0}+x_3=2$، برای این‌که قید معتبر باشد، با افزایش x_1، باید x_3 مثبت باقی بماند. (از روی شکل : روی محور افقی اگر حرکت کنیم خط (A) هیچ تأثیر یا مانعی برای افزایش x_1 ندارد.)

قید (B): $x_1-\overbrace{3x_2}^{\equiv 0}+x_4=2$ برای افزایش x_1، فقط مجازیم تا 2 پیش برویم، چون برای اینکه قید معتبر باشد، از آنجا به بعد x_4 منفی می‌شود. (از روی شکل معلوم است.)

قید (C): $x_1+\overbrace{x_2}^{\equiv 0}+x_5=4$ مشابه بحث قبل، x_1 حداکثر تا 4 می‌تواند برود.

نتیجه: برای اینکه همه قیدها معتبر باشند (یعنی در مرزهای ناحیه یا فضای ممکن بسر بریم)، فقط (حداکثر) می‌توانیم x_1 را تا 2 پیش ببریم، یعنی قید محدودکننده ما همان قید(B) است، پس الآن قید (B) فعّال شد. (یعنی x_4 را غیراساسی می‌کنیم.)

قاعده انتخاب سامانمند متغیّر غیراساسی جدید

استفاده از تست نسبت، یعنی نسبت ثوابت هر معادله به ضریب متغیر اساسی جدید: (در اینجا x_1 است)

$$\text{نسبت} = \frac{\text{ثابت سمت راست معادله یا قید}}{\text{ضریب متغیر اساسی جدید در قید}}$$

برای مسئله خودمان:

نسبت	متغیر محدودکننده	قید
$2/-2$	x_3	(A)
$2/1$	x_4	(B)
$4/1$	x_5	(C)

نسبت متناظر با حالتی که کوچک‌ترین نسبت مثبت را بدهد.

خلاصه گام:

x_1 را اساسی کردیم (وارد زمره متغیّرهای اساسی کردیم).

x_4 را غیراساسی کردیم (از زمره متغیّرهای اساسی خارج کردیم).

گام چهارم: (تبدیل معادلات) حال باید دستگاه جدید را بر حسب متغیّرهای اساسی جدید، یعنی x_1، x_3 و x_5 حل کنیم. به سه روش می‌توان عمل کرد:

۱) قیود A,B, C را بنویسیم و بجای x_2 و x_4 صفر بگذاریم تا دستگاه سه معادله (A,B,C)- سه مجهول (x_1، x_3 و x_5) را حل کنیم.

۲) از روی قید محدودکننده (قید B)، مقدار x_1 را بر حسب x_2 و x_4 (دو متغیر غیراساسی جدید) به دست آورده و سپس در بقیه معادلات جایگزین کنیم، بدین ترتیب توانسته‌ایم متغیّرهای اساسی جدید را بر حسب متغیّرهای غیراساسی جدید فرموله یا حل کنیم.

۳) روش سامانمند (گوس- جردن)

از روش اول، چون به راحتی و مستقیم مقدار f را نمی‌دهد، صرف‌نظر می‌کنیم، به جایش روش دوم (یعنی حل دستی) را ادامه می‌دهیم تا یک پایه تئوریک (جبری) برای روش سوم (سامانمند) به دست آید:

جایگزینی در دو قید دیگر: $\rightarrow x_1 = 2 - x_4 + 3x_2 \rightarrow$ B (قید محدودکننده)

قید A $x_3 = 2 + 2x_1 - x_2 = 6 - 2x_4 + 5x_2$ جایگزینی در تابع هدف : $f = -x_1 + x_2 = -2 + x_4 - 2x_2$

قید C $x_5 = 4 - x_1 - x_2 = 2 + x_4 - 4x_2$

دقت کنید با $x_2 = x_4 = 0$، مقدار f بهبود پیدا کرده است و از صفر به -2 تغییر کرده است.

روش سوم: با استفاده از عملیات سطری، تکنیک حذف گوس- جردن را انجام می‌دهیم:

دقّت شود تابع هدف را نیز به صورت معادله خطی یا یک معادله جدید نیز وارد کرده‌ایم تا بلافاصله و بدون عملیات جبری اضافی مقدار f را پس از محاسبه متغیّرهای اساسی، مشاهده کنیم. در تکرار اول، f معادل صفر است.

$$
\begin{array}{c}
 \\ \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} (x_1) & (x_2) & & & & \\ N & N & B & B & B & \end{array} \\
\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

حال به ماتریس (افزوده) خوب دقت کنید: (مقدار f ، همان عنصر گوشه پایین است)

$$
\left[\begin{array}{cccccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ \xleftarrow{\textit{Pivot Row}} \\ \\ \\ \end{array}
$$

$\underbrace{\uparrow}_{\textit{Pivot Column}}$

ستون محوری: ستون متناظر با متغیر اساسی جدید است (در اینجا) که از روی آنالیز (تابع هدف) یا سطرآخر به دست آمده است (یعنی بزرگ‌ترین عنصر مثبت).

سطر محوری: سطر متناظر با قید محدود کننده است (در اینجا B یا x_4) که از روی آنالیز نسبت به دست آمده است (کوچک‌ترین نسبت مثبت).

نکته: اول ستون محوری را پیدا می‌کنیم، بعد سطر محوری!

و اما در روش سوم، تعویض x_1 با x_4: از تضارب سطر و ستون محوری، عنصری به دست می‌آید که باید عناصر بالا و پایین آن با عملیات سطری صفر شوند (حذف گوسین یا حذف گوس- جردن).

عملیات سطری:

$R_1 \rightarrow R_1 - (a_{11}/1)R_2$ یا $R_1 + 2R_2$

$R_2 \rightarrow R_2/1$ این سطر فقط scale می‌شود

$$R_3 \to R_3 - (a_{31}/1)R_2 \quad \text{یا} \quad R_4 - R_2$$
$$R_4 \to R_4 - (a_{11}/1)R_2 \quad \text{یا} \quad R_1 + 2R_2$$

بدین ترتیب ماتریس افزوده به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{array}{c} \\ \\ x_3 \\ x_1 \\ x_5 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ B & N & B & N & B \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

به این ماتریس، می‌گویند Simplex Tableau (تابلوهای مفصّل‌تر دیگری توسط محققین نیز ارائه شده است). دقّت کنید مقدار f بهبود پیدا کرده است.

به هر حال، این روش (عملیات سطری – حذف گوسین) کار می‌کند و البتّه سامانمند و به برکت جادوی جبر خطی. شگرد محور گیری که از جنس جبر ماتریس‌هاست برای تعویض متغیّرهای اساسی و غیراساسی (که از جنس بهینه‌سازی است) به شکل زیر عمل می‌کند. دستگاه معادلات نا معیّن اولیه به شکل ماتریسی از این قرار بوده است:

$$\begin{array}{c} \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

دقّت شود سطر آخر شامل تابع هدف را فعلاً نمی‌نویسیم، چون نقش ضروری در حل دستگاه ندارد و فقط به درد محک اختتام یا ادامه (بهبود) می‌خورد.

اگر به فرم ماتریسی دستگاه معادلات نگاه کنیم مشاهده می‌کنیم ماتریس ضرایب به صورت اِفرازشده دو ماتریس ویژه و خاص تشکیل شده است. اوّل یک ماتریس که شامل ضرایب نامعادلات (قیود) مسئله است و دیگری یک ماتریس یکانی که علّت حضور آن نیز به خاطر تعریف متغیّرهای کمبود است:

به خاطر وجود دو درجه آزادی آمدیم و دو متغیّر اصلی سیستم را فیکس گرفتیم، یعنی آن‌ها را غیراساسی فرض کردیم، یعنی آن‌ها را بنا به اجبار در شکل‌دهی سامانمند صفر گرفتیم تا دستگاه به صورت سه معادله – سه مجهول در آید. پس از حل دستگاه، سه متغیّر محاسبه‌شده یا وابسته موسوم به متغیّرهای اساسی خواهیم داشت که در این مثال به ترتیب (اول)، (دوم) و (سوم) هستند. به همین کنار ماتریس نمادهای این متغیّرها را نیز آوردیم.

به هر حال، با فیکس‌کردن و معادل صفر انگار که افراز اصلاً وجود ندارد و حل دستگاه (محاسبه متغیّرهای اساسی، امیدوارانه همگی مثبت) یا بردار جواب عیناً همان بردار ثوابت است، چون افراز دوم دستگاه یک ماتریس یکانی است (!).

پس نکته کار در افراز بندی و شکل‌دهی ماتریس ضرایب مسئله LP است. در ادامه می‌خواهیم را با عوض کنیم، یعنی درست مشابه حالت اوّل، دو متغیّر را صفر کنیم (در حالت جدید، یعنی و) یا غیراساسی قلمداد کنیم تا دستگاه سازگار شده (سه معادله – سه مجهول) و از حل آن، متغیّرهای وابسته، محاسباتی یا اساسی را به دست آوریم که در حالت جدید عبارت‌اند از (اول)، (دوم) و (سوم). دقت شود نسبت به حالت قبل عملاً جای را با می‌خواهیم عوض کنیم، یعنی دومین عنصر بردار حل یا دومین متغیّر اساسی می‌خواهیم (به جای) باشد. برای این کار اگر بخواهیم از ماشین حل جبر خطی استفاده کنیم باید یک فرمت ماتریس یکانی را ظاهر کنیم. ستون سوم (متناظر با، یا متغیّر اساسی اول) و همچنین ستون پنجم (متناظر با یا متغیّر اساسی سوم) دارای فرمت یکانی هستند، یعنی ستون متناظر در ایندکس متناظر در بردار حل، واحد هست و در بقیه جاها، صفر است. به طور مشخص ستون سوم (متناظر با) به صورت است که در آن اِلمان اوّل آن است و بقیه صفر. دقّت شود که اِلمان اوّل آن، یعنی ایندکس اوّل آن متناظر با عنصر اول بردار حل است. به طریق مشابه، ستون پنجم (متناظر با) به صورت

است که اِلمان سوم آن واحد و بقیه صفر است. این در حالی است که عنصر سوم از بردار حل است یا اینکه بگوییم سومین مجهول دستگاه خطی است.

حال اگر بخواهیم به جای متغیّر محاسباتی یا اساسی باشد، باید ستون اوّل ماتریس ضرایب اولاً فرمت یکانی داشته باشد، ثانیاً عنصر دوم آن باید واحد و بقیه صفر باشد، یعنی به شکل باشد، چرا که مجهول دوم یا عنصر دوم بردار حل (قبلاً) مبتلا به تعویض شده است. عمل ساختن یک دستگاه معادل، به طوری که یک ستون فرمت یکانی بگیرد از طریق حذف گوس- جردن و محور گیری در جبر ماتریس‌ها امکان‌پذیر است:

دقّت کنید با صفر گذاشتن و (متغیّرهای غیراساسی جدید)، انگار ستون‌های متناظر با آن‌ها حذف‌شده‌اند و سه ستون باقیمانده اوّل، سوم و پنجم یک فرمت (البته ترکیبی – permutation) یکانی به خود گرفته‌اند. پس حل دستگاه عیناً معادل بردار ثوابت است (!).

گام پنجم: جستجو برای بهبود مجدد- همان کار دو گام قبل را تکرار می‌کنیم. از روی آنالیز f (سطر آخر ماتریس افزوده، به جز دو عنصر آخر)، معلوم است که ستون دوم (متناظر با x_2) محوری است و از روی آنالیز نسبت، سطر سوم محوری است، که به فرم زیر تبدیل می‌شوند:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f	b
x_3	0	0	1	0.75	1.25	0	8.5
x_1	1	0	0	0.25	0.75	0	3.5
x_2	0	1	0	-0.25	0.25	0	0.5
	0	0	0	-0.5	0.5	1	-3

دقت کنید که مقدار تابع هدف به 3- تنزل کرده است (یعنی بهبود پیدا کرده است)

تکرار بعدی: از روی آنالیز سطر آخر می‌فهمیم که دیگر بهبود امکان ندارد، چون ضریب مثبت نداریم. پس به انتهای کار رسیدیم و مقدار مینیمم همان 5− است و

$$\begin{cases} x_3 = 8.5 \\ x_1 = 3.5 \;\rightarrow\; x_4 = 0\,,\, x_5 = 0 \\ x_2 = 0.5 \end{cases}$$

همان مثال اختلاط را با روش سامانمند اگر حل کنیم (**مثال ۳**):

حل: تبدیل به مسئله مینیمم سازی به جای ماگزیمم سازی،

$$Minimize \quad f = -8.1x_1 - 10.8x_2$$

$$Subject\ to \begin{cases} -0.80x_1 - 0.44x_2 \geq -24000 \\ -0.05x_1 - 0.10x_2 \geq -2000 \\ -0.10x_1 - 0.36x_2 \geq -6000 \end{cases}$$

گام صفر: معادلات قیود ضربدر ۱-

گام اول: معرفی متغیرهای کمبود و مثبت سازی بردار ثوابت (عبارات سمت راست)

$$\begin{cases} 0.80x_1 + 0.44x_2 + x_3 = 24000 \\ 0.05x_1 + 0.10x_2 + x_4 = 2000 \\ 0.10x_1 + 0.36x_2 + x_5 = 6000 \\ f + 8.1x_1 + 10.8x_2 = 0 \end{cases}$$

گام دوم، سوم،....

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f	b	
x_3	0.80	0.44	1	0	0	0	24000	
x_4	0.05	0.10	0	1	0	0	2000	
x_5	0.10	0.36	0	0	1	0	6000	←
	8.10	10.80	0	0	0	1	0	
		↑						

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f	b	
x_3	0.68	0	1	0	-1.22	0	16667	
x_4	0.02	0	0	1	-0.28	0	333.3	←
x_2	0.28	1	0	0	2.78	0	16667	
	5.10	0	0	0	-30.00	1	-180000	
	↑							

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f	b	
x_3	0	0	1	-30.5	7.25	0	6500	←
x_1	1	0	0	45.0	-12.5	0	15000	
x_2	0	1	0	-12.5	6.25	0	12500	
	0	0	0	-229.5	33.75	1	-256500	
					↑			

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f	b
x_5	0	0	0.14	-4.21	1	0	896.5
x_1	1	0	1.72	-7.59	0	0	26207
x_2	0	1	-0.86	13.79	0	0	6.897
	0	0	-4.66	-87.52	0	1	-286765

به دست آوردن اولین حل ممکن

معمولاً در مسائل برنامه‌ریزی خطی، به ویژه وقتی تعداد متغیرها زیاد است و در قیودمان هم $\geq$ داریم و هم $\leq$، امکان دارد با صفر گذاشتن متغیرهای اصلی (متغیرهای مستقل) تابع هدف (یعنی اولین مجموعه متغیرهای غیراساسی)، نتوانیم یک حل ممکن پیدا کنیم (برخی متغیرهای اساسی که از حل دستگاه به دست می‌آید، منفی می‌شوند)، لذا باید تکنیکی برای آن اختیار کنیم. روش‌های Simplex (البته بهبودیافته)، نوعاً از روش‌های مختلف "متغیرهای مجازی" استفاده می‌کنند. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۴-

$$\begin{aligned} &Minimize \quad f(\underline{x}) = x_1 + 2x_2 \\ &Subject\ to \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases} \end{aligned}$$

متغیرهای کمبود / مازاد را تعریف کنید:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4 \end{cases}$$

اگر مثل قدیم متغیرهای غیراساسی را همان متغیرهای مستقل مسئله (تابع هدف) انتخاب کنیم:

$$x_1 = x_2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_3 = 5 \\ x_4 = 4 \end{cases}$$

لذا، مبدأ در منطقه حل ممکن نیست و باید یک نقطه دیگر را اختیار کنیم.

نکته: کمی صبر و تأمل: چرا این‌طور شد؟

ظاهراً به خاطر این است که x_3 با ضریب منفی ظاهر شده است، پس یک ایده این است که یک متغیر اضافی و مجازی مثل x_5 تعریف کنیم:

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_5 = 5$$

آنگاه اگر مبدأ را انتخاب کنیم و در مجموعه غیراساسی قرار دهیم، چون متغیرهای غیراساسی الآن دو تا نیستند، هم x_3 وهم x_5 می‌توانند مقادیر مثبت را اختیار کنند ولی امیدواریم در حل نهایی این x_5 ظاهر نشود، یعنی صفر بماند، چون این کار را برای شروع و حل انجام دادیم، پس اگر بخواهیم از حل Simplex استفاده کنیم، باید f را نیز عوض کنیم:

$$\overline{f} = f + Mx_5$$

پس تا اینجا چه کردیم، یک متغیر مجازی تعریف کردیم (چون یک متغیر منفی از آب درآمد)، سپس یک تابع پنالتی (بعداً توضیح خواهیم داد) به f اصلی اضافه کردیم تا مسئله را اجبار کنیم تا x_5 صفر شده. از اینجا به بعد مسئله LP داریم.

یک روش برای ادامه حل انتخاب M به اندازه کافی بزرگ است (موسوم به روش Big M) ولی معایبی دارد:

۱- انتخاب دقیق M، روشن و شفاف نیست.

۲- اگر جواب مسئله دارای متغیرهای غیر صفر باشد، به چه معنی است؟ آیا M خوب انتخاب‌نشده یا اینکه اصلاً جواب ممکن نداریم.

۳- M را به خاطر محدودیت‌های کامپیوتری خیلی هم بزرگ نمی‌توان اختیار کرد.

لذا، این روش بعداً بهبود داده شد و موسوم به Phase I/Phase II است. فرق این روش با Big M این است که برای مسائلی از LP که با نقطه غیرممکن حل شروع می‌شوند، همان متغیرهای مجازی را تعریف می‌کنیم ولی در فاز I، سعی می‌کنیم جمع متغیرهای مجازی را مینیمم کنیم، اگر جواب مینیمم سازی فاز I، صفر بود، مسئله را دنبال می‌کنیم (فاز II) و اگر نبود، یک جایی اشکال دارد (در قیود، تابع هدف،...).

خلاصه فاز Phase I/Phase II: (مینیمم سازی متغیرهای مجازی)

۱- همان گام‌های اولیه (Simplex) LP معمولی را انجام دهید (سمت راست مثبت، تعریف متغیرهای کمبود/ مازاد)

۲- به مجموعه معادلات قیود، متغیرهای مجازی را اضافه کنید:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & & & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + & x_{n+2} & & = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots & & \ddots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + & & x_{n+m} & = b_m \end{cases}$$

یک حل پایه ممکن عبارت است از همان متغیرهای اصلی مسئله و کمبود/ مازاد و حل دستگاه برای متغیرهای مجازی:

متغیرهای غیراساسی : $x_j = 0 \quad , \quad j = 1, \cdots, n$

متغیرهای اساسی : $x_{n+i} = b_i \quad , \quad i = 1, \cdots, m$

۳- حل پایه ممکن اولیه به دست آمد، پس حل را برای تابع هدف زیر (جهت مینیمم سازی مجموع متغیرهای مجازی) ادامه دهید:

$$g = x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+m}$$

نکته: اگر مینیمم سازی بالا را بر حسب Simplex می‌خواهید، باید تابع هدف را بر حسب x_1 تا x_n بنویسیم، برای این کار مجموعه معادلات را جمع می‌کنیم تا سطر آخر تابلوی Simplex را مرتب کنیم:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + \qquad x_{n+2} & = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \ddots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + \qquad\qquad x_{n+m} & = b_m \\ \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}\right)}_{d_1} x_1 + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i2}\right)}_{d_2} x_2 + \cdots + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} a_{in}\right)}_{d_n} x_n + g = \sum_{i=1}^{m} b_i & \end{cases}$$

همان طور که قبلاً نیز گفته شد، باید حل مینیمم بالا منجر به این شود که g دارای مینیمم صفر باشد، یعنی همه متغیرهای مجازی (که البته مثبت هستند) باید صفر شوند تا جمع آن‌ها صفر شود، پس با مجموعه جدید متغیرهای اساسی و غیراساسی به عنوان حل پایه ممکن ادامه می‌دهیم:

فاز II: با حذف ستون‌های دارای $d_j \le 0$ از تابلو، مسئله را ادامه می‌دهیم.

برای نمایش کار آیی روش، همین مثال را حل می‌کنیم:

مثال ۵- نمونه مسئله اخیر که دارای حل ممکن اولیه با صفر قرار دادن متغیرهای اصلی به دست نیامد (مبدأ روی منطقه ممکن نیست):

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_5 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_6 = 4 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + g = 9 \end{cases} \quad \text{(تابع هدف فاز I)}$$

واردکردن اطلاعات بالا در تابلوی Simplex:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	g	b	
x_5	3	4	-1	0	1	0	0	5	←
x_6	1	1	0	1	0	1	0	4	
	4	5	-1	1	0	0	1	9	
		↑							

x_2	0.75	1	-0.25	0	0.25	0	0	1.25	
x_6	0.25	0	0.25	1	-0.25	1	0	2.75	←
	0.25	0	0.25	1	-1.25	0	1	2.75	
			↑						

x_2	1	1	0	1	0	1	0	4	
x_3	1	0	1	4	-1	4	0	11	
	0	**0**	**0**	**0**	**-1**	**-1**	**1**	**0**	**تمام شد.**

دقت کنید، مینیمم معادل صفر شد. جواب نهایی:

متغیرهای غیراساسی : $x_1 = x_4 = \underbrace{x_5 = x_6 =}_{Artificial\ Variables} 0$

متغیرهای اساسی : $\begin{cases} x_2 = 4 \\ x_3 = 11 \end{cases}$ **(حل ممکن)**

فاز II: x_5 و x_6 را حذف می‌کنیم (ستون‌های متناظر). باید مسئله را با x_1 و x_4 مساوی صفر ادامه دهیم ولی چون آن‌دو غیراساسی هستند، باید f را بر حسب آن‌ها بنویسیم:

$$f = x_1 + 2x_2 = x_1 + \underbrace{2(-x_1 - x_4 + 4)}_{Corresonding\ row\ with\ x_2} = -x_1 - 2x_4 + 8$$

پس آخرین تابلو (از فاز I) را نگه می‌داریم، ستون‌های با ضریب منفی را حذف کرده و سطر آخر را جایگزین می‌کنیم:

	x_1	x_2	x_3	x_4	f	b	
x_2	1	1	0	1	0	4	
x_3	1	0	1	4	0	11	←
	1	0	0	2	1	8	
				↑			

ادامه می‌دهیم:

	x_1	x_2	x_3	x_4	f	b	
x_2	0.75	1	-0.25	0	0	1.25	←
x_4	0.25	0	0.25	1	0	2.75	
	0.5	0	-.05	0	1	2.5	
	↑						

x_1	1	1.33	-0.33	0	0	1.67	
x_4	0	-0.33	0.58	1	0	2.53	
	0	-0.67	-0.33	0	1	1.67	تمام شد.

از سطر آخر داریم:

$$f = 1.67$$

$x_2 = x_3 = 0$ **(متغیرهای غیراساسی)**

$x_1 = 1.67 \quad , \quad x_4 = 2.53$ **متغیرهای اساسی (جواب بهینه)**

متغیرهای بدون محدودیت[۵]:

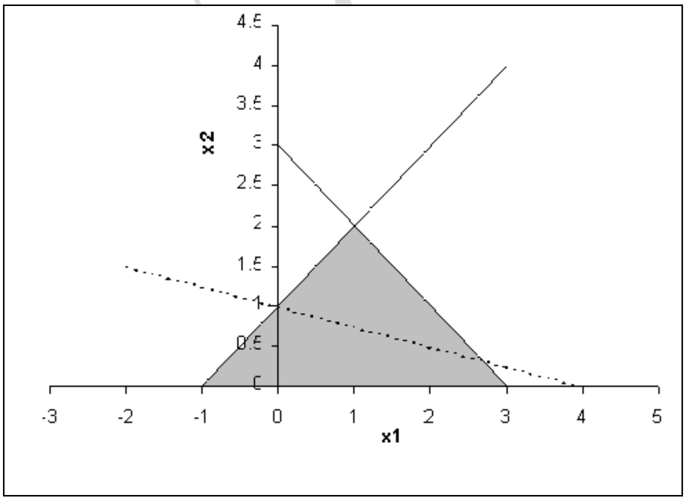
(در برخی مسائل LP، گاهی پیش می‌آید که متغیرها محدود نیستند، بلکه از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کنند، برای این‌ها چه کنیم؟

مثال ۶-

$$Minimize \quad f(\underline{x}) = x_1 + 4x_2$$

$$Subject\ to \begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ -\infty \prec x_1 \prec +\infty \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

اول شکل گرافیکی را ببینیم:



حل:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \end{cases}$$

دوبـاره متغیرهـای مجـازی، ولـی بـاکمی تفـاوت:

$$x_1 = x_5 - x_6$$

به طوری که x_5 و x_6 هردو مثبت هستند.

حال عبارت بالا را در LP اولیه جایگزین کنید:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \end{cases}$$

۵ Unrestricted

شروع حل: ($x_2 = x_5 = x_6 = 0$)

	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	f	b	
x_3	1	1	0	1	-1	0	3	
x_4	1	0	1	-1	1	0	1	←
	-4	0	0	-1	1	1	0	
					↑			

x_3	2	1	1	0	0	0	4	
x_6	1	0	1	-1	1	0	1	
	-5	0	-1	0	0	1	-1	تمام شد.

$$solution:\begin{cases} x_3 = 4 \quad , \quad x_6 = 1, \\ x_2 = x_4 = x_5 = 0 \quad , \quad f = -1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad x_1 = x_5 - x_6 = -1$$

یک راه دیگر این است که اگر می‌شود متغیرهای نامحدود را با عملیات جبری حذف کنید. مثلاً در مثال بالا، x_1 را از قید اول در آورده و در دومی جایگزین کنید.

الگوریتم جامع simplex (نسخه کلاسیک)

شکل جامع الگوریتم سیمپلکس برای حل مسئله LP تعریف‌شده در روابط (۱) تا (۴) به شرح زیر است:

فاز مقدماتی:

۱. اگر قیود نامساوی رابطه‌ای، یعنی رابطه (۳)، دارای عناصر غیر مثبت در سمت راست هستند، با ضرب علامت منفی در طرفین روابط متناظر آن‌ها را مثبت کنید. به طور خلاصه، تمامی عناصر بردارهای $\underline{b}$ و $\underline{b}'$ باید مثبت باشد. در صورت وجود قیود مساوی، همین کار را برای آن‌ها هم انجام دهید.

۲. برای تمامی باندهای محدود، رابطه (۴)، با تغییر متغیر کاری کنید که متغیرهای مسئله در محدوده $[0,+\infty)$ قرار بگیرند. یک راه حل پیشنهادی به شکل زیر است:

$$\underline{l} \le \underline{x} \le \underline{u} \;\; \Rightarrow \;\; 0 \le \underline{x} - \underline{l} \le \underline{u} - \underline{l} \;\; \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{New Variables}} \begin{cases} \underline{x}' \triangleq \underline{x} - \underline{l} \\ \underline{b}'' \triangleq \underline{u} - \underline{l} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x}' \ge 0 \\ \underline{x}' \le \underline{b}'' \end{cases}$$

تکه دوم تبدیل، یعنی $\underline{x}' \le \underline{b}''$، را مثل قیود نامساوی رابطه‌ای، شرح داده‌شده در مرحله۱، عمل کنید. باید دقت کرد بعد از تعریف $\underline{x}'$ حتماً این تغییر متغیر را در تابع هدف اعمال کنید.

۳. در صورت وجود متغیرهای بدون محدودیت، مثل شگرد ذکرشده عمل کنید.

۴. متناسب با علامات نامساوی‌ها، متغیرهای کمبود یا مازاد تعریف کرده و قیود نامساوی را به قیود مساوی تبدیل کنید.

۵. مجموعه قیود مساوی اصلی و قیود مساوی مصنوعی (اعم از قیود نامساوی تبدیل‌شده از طریق متغیرهای کمبود/مازاد و تغییر متغیرهای مصنوعی برای حذف متغیرهای بدون محدودیت) به همراه رابطه تابع هدف، تشکیل یک دستگاه جبری نامعین به شکل زیر می‌دهند:

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

به طوری که سطور A (به جز سطر آخر) معرف روابط و معادلات ریاضی مسئله (با تغییر قیود مساوی اعم از اصلی و مصنوعی) و عناصر $\underline{b}$ شامل مقادیر ثابت سمت راست قیود مساوی اصلی و قیود مساوی مصنوعی است. سطر آخر ماتریس افزوده A عبارت تابع هدف به شکل زیر است:

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 + \cdots + C_N x_N + (-1) f = 0$$

باید دقت کرد که تعداد متغیرهای مسئله (تعداد ستون‌های A)، $N+1$ است. متغیر $N+1$ام (آخرین متغیر) را همان f در نظر گرفتیم و تعمّد مربوط به علامت ^ روی متغیرهای مسئله، امکان تغییر متغیر در باندهای بعضی از متغیرهای اصلی مسئله یا وجود متغیرهای اصلی بدون محدودیت (در نتیجه احتمال تعریف متغیرهای جدید) است.

طی یک فرمول کلی، می‌توان تعداد متغیرهای مسئله simplex را به شکل زیر برشمرد (تعداد ستون‌های A):

$$N = n + m + p$$

به طوری که n، تعداد متغیرهای اصلی مسئله LP، m تعداد قیود نامساوی (به تعداد تعریف متغیرهای مازاد/کمبود)، و p تعداد متغیرهای بدون محدودیت می‌باشند.

فاز I (محاسبه نقطه شروع):

۱. متغیرهای مجازی به تعداد N تعریف کنید. به عبارتی به ماتریس A، یک ماتریس یکانی به صورت افزوده و افرازشده اضافه کنید.

۲. سطر آخر ماتریس A دارای ضرایب متفاوتی است. به عبارتی، مطابق آن چه در روش ساده‌شده گفته شد، عناصر سطر آخر از جمع عناصر ستون متناظر به دست می‌آیند.

۳. مسئله را با صفر گذاشتن N متغیر مسئله مقدماتی، با الگوریتم simplex ساده‌شده حل کنید.

۴. در صورتی که پس از حل (حل سیمپلکس فاز I) همه متغیرهای مجازی صفر نشدند، به مفهوم آن است که جواب یکتای بهینه (مینیمم) نداریم و باید حالت Degeneracy را گزارش نموده و حل مسئله یا الگوریتم را متوقف کرد.

فاز II:

۱. ماتریس افزوده را تشکیل دهید، به طوری که سطر آخر شامل تعریف تابع هدف باشد.

۲. از روی آنالیز سطر آخر، ستون محوری را معلوم کنید (کوچک‌ترین عنصر مثبت).

۳. از روی آنالیز نسبت، سطر محوری را معلوم کنید (کوچک‌ترین نسبت مثبت).

۴. با استفاده از عنصر محوری، عملیات حذفی گوس- جردن را انجام دهید.

۵. عنصر آخر ماتریس افزوده، مقدار f بهبودیافته را نشان می‌دهد.

الگوریتم جامع simplex (نسخه مینیمم سازی کانونیکال- نسخه فرمال)

یک وارمیته مدرن‌تر که در اکثر مراجع جدید از آن استفاده می‌شود، به شرح زیر است. دقت شود بار جبر خطی در این نسخه‌ها بیشتر از وزن تعبیر خود مسئله LP است.

۱. (تشکیل فرم مشروع) همان چهار مرحله مقدماتی اول الگوریتم کلاسیک را انجام می‌دهیم تا مسئله LP شکل زیر را به خود بگیرد:

$$\textit{Minimize} \quad f = C^T \underline{x} \qquad (۸)$$

$$S.T. \quad A\underline{x} = \underline{b} \qquad (۹)$$

$$\underline{x} \geq 0 \qquad (۱۰)$$

دقت شود بردار $\underline{x}$ شامل متغیرهای اصلی می‌شود نه خود آن، فأفهم!

۲. فرض کنید، m ستون اول سیستم خطی (۹) تشکیل یک ماتریس پایه (Basis Matrix) دهد، به طوری که m تعداد سطور قیود مساوی اعم از اصلی، تغییر داده‌شده، یا تبدیل‌شده از قیود نامساوی باشد. منظور از ماتریس پایه، ماتریس غیر تکین مربعی است ($m\times m$، تعداد مجهولات مساوی تعداد معادلات) که به شورت ماتریس ضرایب دستگاه زیر ظاهر می‌شود:

$$B\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}=B^{-1}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ماتریس B، یک ماتریس پایه نامیده می‌شود، چون حل مجهولات آن، منجر به معلوم شدن متغیرهای اساسی (یا وابسته یا محاسباتی) می‌شود. در صورتی که B تکین باشد، بدین معنی است که یا به حالت ناسازگار (Degeneracy) برخورده‌ایم یا این‌که متغیرهای غیراساسی را خوب یا مقتضی انتخاب نکرده‌ایم، لذا باید فاز I را برای استارت حل فعال نمود. به هر حال، با ضرب B^{-1} در طرفین (از سمت چپ) رابطه (۹)، به فرم ماتریس LP از نوع مشروع (Canonical) می‌رسیم:

ثوابت	متغیرهای غیراساسی (غیر وابسته، فیکس)	تغیرهای اساسی (محاسباتی)
$=\bar{b}_1$ $=\bar{b}_2$ $\vdots$ $=\bar{b}_m$	$+\bar{a}_{1,m+1}x_{m+1}+\bar{a}_{1,m+2}x_{m+2}+\cdots+\bar{a}_{1,N}x_N$ $+\bar{a}_{2,m+1}x_{m+1}+\bar{a}_{2,m+2}x_{m+2}+\cdots+\bar{a}_{2,N}x_N$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $+\bar{a}_{m,m+1}x_{m+1}+\bar{a}_{m,m+2}x_{m+2}+\cdots+\bar{a}_{m,N}x_N$	$\begin{matrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_m \end{matrix}$

یا به فرم ماتریسی:

$$B^{-1}A\underline{x}=B^{-1}\underline{b} \;\Rightarrow\; \boxed{\left[I_{m\times m} \;\vdots\; \bar{A}_{m\times(N-m)}\right]\underline{x}_N=\underline{\bar{b}}}$$

همان طور که معلوم است، با صفر قرار دادن متغیرهای غیراساسی (x_{m+1} تا x_N)، جواب دستگاه به شکل محاسبه متغیرهای اساسی، یعنی به فرم زیر ظاهر می‌شوند:

$$x_1=\bar{b}_1,\quad x_2=\bar{b}_2,\quad \cdots,\quad x_m=\bar{b}_m,$$
$$x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_N=0$$

اگر همه $\bar{b}_i;\quad i=1,2,\cdots,m$ ها مثبت باشند، آنگاه انتخاب متغیرهای غیراساسی درست بوده، چرا که متغیرهای اساسی (محاسباتی) همگی ممکن از آب درآمده‌اند. اگر یکی از $\bar{b}_i$ ها منفی درآید، آنگاه جواب ممکن ما عملاً Degenerate است.

به هر حال، اکثر وارمیته‌های مدرن سیمپلکس از این فرم مشروع (فرمال) شروع می‌کنند و برای دستیابی به این فرم، یا B^{-1} را محاسبه و سپس ضرب می‌کنند یا این‌که با عملیات گوس- جردن و محور گیری به فرم مربوطه می‌رسند. الگوریتم استاندارد و جامع سیمپلکس همراه با تست بهینگی و گزارش ناسازگاری یک روال دو فازی برای حل مسئله LP است. در فازI، همیشه یک حل پایه ممکن اولیه، در صورت وجود، پیدا یا محاسبه می‌شود و حامل اطلاعات سازگاری یا ناسازگاری است؛ یعنی اگر حل پایه ممکن اولیه پیدا نشود، نشان از ناسازگاری قیود است و در همین مرحله حل LP متوقف می‌شود. فازII سیمپلکس با حل پایه ممکن اولیه (اولین کاندیدای مینیمم یا فراگوشه (hypervertex) اول) شروع می‌کند و سعی در حرکت به گوشه دیگر به امید (یا به شرط) بهبودی در f می‌رود. به هر حال، روتین‌های مدرن دارای بار اطلاعاتی زیاد در این فاز هستند. مثلاً ممکن است گزارش کند که به حل یکتای بهینه رسیده است، یا این‌که مسئله دارای بی‌نهایت جواب بهینه (جواب بهینه نامحدود، نوع دیگری از ناسازگاری) است. ممکن است روتین مربوط مجهز به رویت قیود، یعنی اضافه کردن یا کم کردن برخی از قیود باشد. لذا همیشه امکان ناسازگاری قیود از نوع جواب نامحدود وجود دارد. به هر حال هر دو فاز سیمپلکس فرمال از الگوریتم استاندارد سیمپلکس که در ادامه می‌آید استفاده می‌کنند.

فرم افزوده سیمپلکس را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$
\begin{array}{l}
x_1 \qquad\qquad + \bar{a}_{1,m+1}x_{m+1} + \bar{a}_{1,m+2}x_{m+2} + \cdots + \bar{a}_{1,N}x_N = b_1 \\
\quad x_2 \qquad\quad + \bar{a}_{2,m+1}x_{m+1} + \bar{a}_{2,m+2}x_{m+2} + \cdots + \bar{a}_{2,N}x_N = b_2 \\
\qquad \ddots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\
\qquad\qquad x_m + \bar{a}_{m,m+1}x_{m+1} + \bar{a}_{m,m+2}x_{m+2} + \cdots + \bar{a}_{m,N}x_N = b_m \\
\qquad\quad (-f) + \bar{C}_{m+1}x_{m+1} + \cdots + \bar{C}_N x_N = -\bar{f}
\end{array}
$$

در تشکیل فرم مشروع بالا، دو نکته وجود دارد. اول این‌که تابع هدف را به شکل یک معادله به دستگاه معادلات اضافه کرده‌ایم:

$$f = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_Nx_N \quad \Rightarrow (-f) + C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_Nx_N = 0$$

دوم این‌که با عملیات سطری یا ضرب B^{-1}، به فرم اساسی فوق رسیده‌ایم. فقط باید دقت شود، ستون‌های ماتریس دستگاه یا ایندکس متغیرها را طوری عوض کرده‌ایم که همیشه m متغیر اول، اساسی یا محاسباتی محسوب شوند و به صورت فرمال ظاهر شوند و لذا عنصر $-\bar{f}$ ظاهر شده است.

حل دستگاه فرمال، منجر به حل پایه زیر می‌شود:

مقدار تابع هدف	$f = \bar{f}$
حل دستگاه (متغیرهای اساسی)	$\bar{x}_1 = \bar{b}_1, \cdots, \bar{x}_m = \bar{b}_m$
متغیرهای فیکس شده (غیراساسی)	$x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_N = 0$

فعلاً فرض می‌کنیم متغیرهای اساسی همگی مثبت هستند، یعنی:

$$\bar{b}_1 \geq 0, \quad \bar{b}_2 \geq 0, \quad \cdots, \quad \bar{b}_m \geq 0$$

هر دو فاز سیمپلکس گارانتی می‌کنند که این ضرایب (ضرایب پردازش‌شده یا b_iهای بعد از محور گیری یا عملیات سطری یا ستون آخر ماتریس افزوده بعد از ضرب B^{-1}) همیشه مثبت باشند. در صورتی که حتی فقط یکی از آن‌ها منفی باشد، به حالت ناسازگاری (Degeneracy) برخورده‌ایم.

<u>**تست بهینگی**</u>- اگر مسئله به صورت مشروع و ممکن باشد، عملاً با یک گوشه کاندیدای بهینگی مواجه هستیم (از طریق حل دستگاه و محاسبه m متغیر اساسی). به سطر آخر فرم مشروع توجه کنید و ضرایب $\bar{C}_{m+1}$، $\bar{C}_{m+2}$، تا $\bar{C}_N$ را در نظر بگیرید. با بررسی ضرایب می‌توان فهمید که آیا به نقطه بهینه رسیده‌ایم یا این‌که باید الگوریتم را ادامه دهیم. به ادعای زیر توجه کنید:

یک حل پایه ممکن، موقعی بهینه است که ضرایب $\bar{C}_i$ (برای $i = m+1, \cdots, N$) موسوم به هزینه‌های تقلیل یافته (Reduced Costs) همگی مثبت باشند. اثبات این قضیه ساده است، کافی است معادله آخر را به شکل زیر بنویسیم:

$$f = \bar{f} + \bar{C}_{m+1}x_{m+1} + + \bar{C}_N x_N$$

در حال حاضر، متغیرهای x_{m+1} تا x_N غیراساسی هستند و فعلاً صفر هستند، بنابراین تغییر آن‌ها ممکن نیست، مگر این‌که در پاس بعدی مقدار بگیرند که آن هم قطعاً مثبت هستند و لذا تنها راه افزایش آن‌ها از طریق $\bar{C}_i$ است. لذا اگر $\bar{C}_i$ای وجود داشته باشد که منفی باشد، احتمال این وجود دارد که f از $\bar{f}$ باز هم کمتر شود. ولی اگر هیچ‌کدام منفی نباشند، به آخرین حد کاهش f، یعنی مقدار $\bar{f}$ رسیده‌ایم.

نکته جالب دیگری که در ارتباط با $\bar{C}_i$ها است، آشکارسازی تکرّر نقطه بهینه است. بدین معنی که اگر یکی از $\bar{C}_i$ها صفر باشد، درحالی‌که بقیه همگی اکیداً مثبت باشند، آنگاه چند نقطه بهینه داریم. اثبات این نکته نیز ساده است و لذا فقط به تست بهینگی و یگانه بودن جواب به شکل زیر اکتفا می‌کنیم:

یک حل پایه ممکن دستگاه مشروع، بهینه یگانه است، اگر همگی $\bar{C}_i$ها اکیداً مثبت باشند.

اگر حتی یکی از $\bar{C}_i$ها منفی باشد، بدین معنی است که جواب فعلی غیر بهینه است؛ و باید f را بهبود ببخشیم یا به بیانی مشابه یک حرکت دیگر (به سمت یک گوشه پایه ممکن) باید انجام دهیم. در الگوریتم کلاسیک، این‌کار را با آنالیز سطر آخر (ستون محوری) و تست نسبت (سطر محوری) انجام دادیم؛ یا با تناظر، یک متغیر غیراساسی را اساسی کردیم (با آنالیز f) و یک متغیر اساسی را غیراساسی کردیم (با تست نسبت). نحوی حرکت به گوشه دیگر برای بهبود f در فرم مشروع نیز خیلی شبیه الگوریتم کلاسیک است. به هر حال، نحوه کار طی جراحی یک مثال شرح می‌شود.

مسئله مینیمم سازی f را با معادلات زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 = 20 \\ &x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 = 8 \\ &x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 + 5x_5 - f = 0 \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

$$x_i \ge 0, \quad i = 1,2,\cdots,5 \qquad (۱۲)$$

فرض کنید حل ممکن و پایه اولیه را می‌دانیم، یعنی x_5، x_1، و $-f$ را به عنوان متغیر اساسی انتخاب می‌کنیم و در نتیجه دستگاه معادلات (۱۱) را به فرم مشروع زیر درمی‌آوریم (محور گیری و عملیات حذفی گوس- جردن):

$$\begin{aligned} &x_5 - 0.25x_2 + 3x_3 - 0.75x_4 = 5 \\ &x_1 - 0.75x_2 + 2x_3 - 0.25x_4 = 3 \\ &-f + 8x_2 - 24x_3 + 5x_4 = -28 \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

حل پایه ممکن به صورت زیر درمی‌آید:

$x_5 = 5, \quad x_1 = 3$ (اساسی)

$x_2 = x_3 = x_4 = 0$ (غیراساسی)

$f = 28$

حال به سطر آخر ($\bar{C}_i$ ها) توجه کنید. یکی از ضرایب، $\bar{C}_3$، منفی شده است ($\bar{C}_3 = -24$). در نتیجه تست بهینگی نقض می‌شود و جواب در دست، جواب بهینه نیست و این به علت رابطه f با x_3 (متغیر متناظر با $\bar{C}_3$) است:

$$f = 28 - 24x_3$$

یعنی x_3 در حرکت بعدی (x_3 اساسی یا مثبت شود) می‌تواند f را از 28 هم کمتر کند.

به طور مشابه با سیمپلکس کلاسیک، یعنی پیدا کردن قید محدودکننده، می‌توان فهمید که حد بالای افزایش x_3 (در صورت اساسی شدن) معادل 1.5 می‌شود، بدین صورت که x_2 و x_4 غیراساسی هستند ($x_2 = x_4 = 0$) و لذا رابطه x_5 و x_1 با x_3 به شکل زیر است:

$$x_5 = 5 - 3x_3$$
$$x_1 = 3 - 2x_3$$

پس با افزایش x_3، x_1 و x_5 کاهش پیدا می‌کنند و حد مجاز کاهش آن‌ها تا مقدار صفر است. پس قید محدودکننده رابطه بین x_1 و x_3 است، چرا که x_3 اگر تا 1.5 پیش برود، x_1 اول صفر می‌شود. در نتیجه:

$$x_5 = 0.5, \quad (x_3 = 1.5)$$
$$x_1 = 0, \quad (x_2 = x_4 = 0) \Rightarrow f = -8$$

پس f بهبود جدی پیدا کرد (از مقدار 28+ به مقدار 8− کاهش یافت). حال برای این‌که تست کنیم آیا این جواب بهینه است، باید پس از عوض کردن متغیر x_3 و x_1 در فرم مشروع، مجدداً تست بهینگی $\bar{C}_i$ را امتحان کنیم. حال به جای عوض کردن و تعقیب تغییر ایندکس‌ها، از عملیات محور گیری و سپس عملیات سطری بهره می‌گیریم. دقت کنید ستون محوری از آنالیز یا تست بهینگی (پیدا کردن $\bar{C}_3$) به دست آمد و سطر محوری از آنالیز نسبت، در نتیجه عنصر محور گیری همان است که در معادلات (۱۳) با علامت مستطیل دور آن مشخص شده است. با عملیات سطری، فرم معادلات به شکل زیر درمی‌آید (جای x_1 و x_3 عوض شده است):

$$\begin{aligned} &x_5 - 1.5x_1 + \boxed{0.875x_2} - 0.375x_4 = 0.5 \\ &x_3 + 0.5x_1 - 0.375x_2 - 0.125x_4 = 1.5 \qquad (۱۵) \\ &-f + 12x_1 - x_2 + 2x_4 = 8 \end{aligned}$$

مجدداً مشاهده می‌کنیم که $\bar{C}_2$ منفی شده است؛ لذا به طریق بالا، عنصر محور گیری مشخص‌شده و با عملیات سطری به فرم مشروع زیر می‌رسیم (جای x_2 و x_5 عوض شده است):

$$\begin{aligned} &x_2 - 1.714x_1 - 0.429x_4 + 1.142x_3 = 0.571 \\ &x_3 - 0.143x_1 - 10.286x_4 + 0.429x_5 = 1.714 \qquad (۱۶) \\ &-f + 10.286x_1 + 1.571x_4 + 1.143x_5 = 8.571 \end{aligned}$$

همان طور که معلوم است تمامی $\bar{C}_i$ها اکیداً مثبت هستند، در نتیجه به جواب یکتای بهینه رسیده‌ایم:

$x_2 = 0.571, \quad x_3 = 1.714$ (متغیرهای اساسی)

$x_1 = x_4 = x_5 = 0$ (متغیرهای غیراساسی)

$f = f^* = -8.571$ (جواب بهینه)

<u>**فاز I:**</u> در این فاز، یک حل پایه ممکن پیدا می‌شود. ایده و اساس آن شبیه همانی است که قبلاً در طرح کلاسیک سیمپلکس گفته شد، با این تفاوت که در حالت مشروع، قیود را کلی در نظر می‌گیرند:

$\underline{L} \le \underline{x} \le \underline{U}$

در فازI، اگر حدس اولیه متغیرهای غیراساسی (معمولاً متغیرهای اصلی را صفر در نظر می‌گیرند، یا به طور کلی $N-m$ متغیر اول در بردار مجهولات را فیکس در نظر می‌گیرند) منجر به حل غیرممکن (یا نقض برخی از قیود) شود، آنگاه مسئله زیر را ابتدا حل می‌کنند:

$$S_{\inf} = \sum_{i \in \bar{L}} (l_i - x_i) + \sum_{i \in \bar{U}} (x_i - u_i)$$

عبارت تابع هدف بالا، جمع مواردی است که قیود نقض شده‌اند. دقت کنید در حالت فرمال، همه ترم‌ها مثبت هستند:

$x_i < l_j, \quad i \in \bar{L}$ (متغیرهای اساسی)

$x_i > u_j, \quad i \in \bar{U}$ (متغیرهای اساسی)

به هر حال، اگر متغیرهای اساسی درست انتخاب‌شده باشند، باید مینیمم سازی بالا منجر به $S_{\inf} = 0$ شود. در صورتی که این‌طور نباشد، مسئله LP ناسازگار است.

آنالیز حساسیت[۶]

نکته جالبی که در LP وجود دارد این است که بدون حل مجدد مسئله، می‌توان آنالیز حساسیت کرد، با مثال ببینیم:

مثال ۷- همان مثال اختلاط را در نظر گرفته و آخرین تابلوی سیمپلکس را می‌بینیم:

$$\begin{cases} x_5 + 0.14x_3 - 4.21x_4 = 896.5 \\ x_1 + 1.72x_3 - 7.59x_4 = 26207 \\ x_2 - 0.86x_3 + 13.79x_4 = 6897 \\ f = 4.66x_3 + 87.52x_4 - 286765 \end{cases}$$

نکته ۱: به سطر آخر توجه کنید؛ معلوم است که $\Delta f \ (\left|_{x_4\, const} = 4.66\Delta x_3 , \right|_{x_3\, const} = 87.52\Delta x_4)$ به x_4 که متغیر کمبود است، بسیار حساس‌تر است، یعنی اگر یک بشکه تولید نفت سفید را زیاد کنیم، باید x_4 یک واحد کمتر شود، به همین خاطر ضرایب سطر آخر، نشان‌دهنده میزان حساسیت سودآوری به ظرفیت است و معروف به قیمت پنهان[۷] هستند.

نکته ۲: متغیر کمبود متناظر با نفت کوره صفر نشد، یعنی قید فعالی نبود، لذا تأثیری ندارد.

نکته ۳: میزان تغییرات باید خیلی ناچیز باشد (مسئله طیف تغییرات[۸]) تا متغیرهای اساسی، اساسی بمانند و غیر اساسی‌ها نیز غیراساسی بمانند.

نکته ۴: تغییر در هزینه مواد خام نیز معمولاً مورد توجه قرار می‌گیرد، تغییر ضریب x_1 و یا x_2 می‌تواند گوشه بهینه را حتی عوض کند.

نکته ۵: نرم‌افزارهای مدرن موجود، در خروجی برنامه، آنالیز حساسیت را در سه مورد طیف تغییرات، قیمت پنهان و ضرایب قیود ظرفیت‌ها، گزارش می‌کنند، فقط باید مواظب بود که مسئله از چه نوع است، مینیمم یا ماگزیمم.

تناظر[۹] در برنامه‌ریزی خطی

با مثال ادامه می‌دهیم، همان مسئله اختلاط را در نظر بگیرید، دیدیم که (از روی آنالیز حساسیت) ظرفیت بنزین به ازای هر بشکه 4.66 $ می‌ارزد و همچنین نفت سفید 87.52 $ و نفت کوره اصلاً شرکت نمی‌کند (صفر دلار به ازای هر بشکه)، حال این قیمت‌های سایه (پنهان) را در ظرفیتشان ضرب کرده و جمع کنید: $4.66 \times (24000) + 87.52 \times (2000) \cong 286765$

---

[۶] Sensitivity (What-If) Analysis, Postoptimality Study

[7] Shadow price

[۸] Ranging

[۹] Duality

یعنی به همان مقدار بهینه سود رسیدیم! یعنی متناظراً می‌توان مسئله را حل کرد: به مسئله اصلی می‌گویند Primal Problem و به مسئله متناظر می‌گویند Dual Problem:

مسئله Primal:

$$Minimize \quad f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{r} c_i x_i \equiv \underline{c}^T \underline{x}$$

$$Subject\ to \begin{cases} x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1,2,\cdots,r \\ \sum_{i=1}^{r} a_{ji} x_i = b_j \quad , \quad j = 1,2,\cdots,m \\ \sum_{i=1}^{r} a_{ji} x_i \geq b_j \quad , \quad j = m+1,\cdots,p \end{cases}$$

مسئله Dual:

$$Maximize \quad f^{\otimes}(\underline{y}) = \sum_{i=1}^{q} b_i y_i \equiv \underline{b}^T \underline{y}$$

$$Subject\ to \begin{cases} y_i \geq 0 \quad , \quad i = 1,2,\cdots,q \\ \sum_{i=1}^{q} a_{ji} y_i \geq c_j \quad , \quad j = 1,\cdots,p \end{cases}$$

$$where \quad q = p - m$$

- y_iها معروف به متغیرهای Dual هستند و تمام نکته تناظر، تناظر بین تعداد متغیرهای اصلی و تعداد قیود نامساوی است، یعنی اگر مسئله دارای قیود نامساوی زیاد بود ولی بُعد آن کم بود، بهتر است مسئله Dual را حل کنیم. نکته‌های دیگری هم دارد که در طی مثال به آن‌ها می‌پردازیم.
- مقایسه کنید: ضرایب تابع هدف Primal شده بردار ثوابت (اعداد سمت راست نامساوی‌ها) مسئله Dual، همچنین ماتریس A^T در مسئله Dual و جهت نامساوی‌ها هم عوض شده است و مسئله از مینیمم سازی به ماگزیمم سازی تبدیل شده است.
- اثبات ریاضی این موضوع (مسئله تناظر) نشأت‌گرفته از ضرایب لاگرانژ است.
- برای هر متغیر Primal یک قید Dual داریم و برعکس و جواب بهینه Dual، یعنی y_i^* (ضریب لاگرانژ)، مساوی است با قیمت‌های پنهان (البته قدر مطلق‌هایشان) مسئله Primal.

مثال ۸–

$$Minimize \quad f = 3x_1 + 5x_2$$

$$Subject\ to \begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 10 \\ 2x_1 - x_2 \geq 4 \\ -x_1 + 4x_2 \geq -2 \\ -x_1 - x_2 \geq -20 \\ x_1 \, , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

تبدیل به فرم استاندارد (تعریف متغیرهای کمبود / مازاد)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 10 \\ 2x_1 - x_2 - x_4 = 4 \\ x_1 - 4x_2 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_6 = 20 \end{cases}$$

دقت کنید $x_1 = x_2 = 0$، منجر به حل پایه ممکن نمی‌شود، چرا که x_3 و x_4 منفی از آب در می‌آیند و لذا با روش Big M یا Phase I/II باید مسئله را شروع کرد.

حالا به مسئله Dual توجه کنید:

$$\begin{aligned} &\text{Maximize} \quad f^{\otimes} = 10y_1 + 4y_2 - 2y_3 - 20y_4 \\ &\text{Subject to} \quad \begin{cases} y_1 + 2x_2 - y_3 - y_4 \le 3 \\ 3y_1 - y_2 + 4y_3 - y_4 \le 5 \\ y_1\ , y_2\ , y_3\ , y_4 \ge 0 \end{cases} \end{aligned}$$

حالا می‌توان مثلاً متغیرهای کمبود y_5 و y_6 را تعریف کرد:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 - y_4 + y_5 = 3 \\ 3y_1 - y_2 + 4y_3 - y_4 + y_6 = 5 \end{cases}$$

دقت کنید اولین حل پایه ممکن با انتخاب متغیرهای اصلی مساوی و صفر به راحتی به دست می‌آید: $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$ (متغیرهای غیراساسی).