فصل دهم- بهینه سازی مقید، توابع چند متغیره، روش های جستجوی مستقیم و متوالی (برنامه‌ریزی غیر خطی)

دوره روش ها: به طور کلی، شش روش جستجوی مستقیم برای حل مسائل بهینه سازی مقید وجود دارد. ایده اصلی و پشتیبان این روش ها، از دو مفهوم کلی برخوردار است. یک مفهوم آن، استفاده از دانسته ها و قضایای به دست آمده در مطالعات بهینه سازی نامقید است، (معروف به روش های متوالی *Successive, Seguential*) و مفهوم دیگر استفاده خام از تعریف بهینه سازی و قیود مربوطه می باشد (معروف به روش های منطقی یا قیاسی *Comparison Logical, Funchion*).

سه روش متداول برنامه ریزی غیر خطی که از نوع متوالی هستند عبارتند از:

برنامه ریزی خطی متوالی (*Successive Linear Programming – SLP*)،

برنامه ریزی مجذوری متوالی (*Successive Quadratic Programming– SQP*) و

روش گرادیان تقلیلی تعمیم یافته (*Generalized Reduced Gradient- GRG*).

سه روش دیگر که با استقبال خوبی مواجه نشده اند (لااقل برای مسائل با سایز بزرگ، مثلاً ۲۰ متغیره به بالا) عبارتند از روش های تمانعی (داخلی) – Interior Points یا Barrier Functions ، روش های جریمه ای (خارجی) – Exterior Points یا ، توابع لاگرانژ افزوده و روش های جهت های ممکن یا تصویری یا حر کت محدود *Projection Methods, Feasible Directions* یا *Restricted Movement*.

برنامه ریزی خطی متوالی

این روش اولین بار توسط گریفیت[1] و استوارت[2] پیشنهاد شد و روی بهینه سازی یک پالایشگاه تست شد[1]. نام قبلی این روش، برنامه ریزی تقریبی[3] بوده و همانطور که از هر دو اسم پیداست، روش از تقریب خطی برای جستجو استفاده می کند. روش با یک حدس اولیه شروع می شود. بعد از تقریب تابع هدف و قیود به صورت خطی و حول نقطه حدس قبلی، مسأله تبدیل به یک برنامه ریزی خطی *(LP)* می شود و با استفاده از روش سیمپلکس یا واریانت های آن، به یک حل تقریبی از نقطه بهینه می رسیم. سپس با یک سری حرکت های محدود روش ادامه داده شده و با یک محک اختتام، به پایان می رسد.

اگر مسأله اصلی بهینه سازی به صورت کلی زیر باشد:

$$
\begin{aligned}
&\text{Optimize} \quad y(\underline{x})\\
&\text{Subject to} \ : \quad f_i(\underline{x}) \le b_i; \qquad , i = 1,2,\dots,m\\
&\qquad\qquad\qquad l_j \le x_j \le u_j \qquad , j = 1,2,\dots,n
\end{aligned}
$$

حال اگر تابع هدف $y(\underline{x})$ و قیود نامساوی $f_i(\underline{x})$ را حول نقطه $\underline{x}^{(k)}$ تقریب خطی بزنیم، آنگاه مسأله بر حسب متغیرهای انحراف $\underline{\Delta x}$، به یک مسأله برنامه ریزی خطی فرموله می شود:

$$
\text{Optimize} \qquad c^T \underline{\Delta x} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j \Delta x_j}_{Algebra \ \ form} = y(\underline{x}) - y(\underline{x}^{(K)})
$$

$$Subject\ \ to\ \ :\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta x_j \le b_i - f_i(x^{(k)}) \qquad ,i=1,2,\dots,m$$

$$(A\underline{\Delta x} \le \underline{b} - \underline{f}(\underline{x}^{(k)}))$$

$$l_j - x_j^{(k)} \le \Delta x_j \le u_j - x_j^{(k)} \qquad , j=1,2,\dots,n$$

با توجه به فرمولاسیون بالا، متغیرهای تصمیم گیری مسأله ($\underline{\Delta x}$)، می توانند هم مثبت و هم منفی باشند. لذا، اگر از روش سیمپلکس برای حل آن استفاده می کنیم ، باید فکری به حال منفی شدن متغیرها بکنیم.

خود مدربمین ترین روش (گریفیت و استوارت) پیشنهاد زیر را داده اند تا متغیرها مثبت بمانند:

$$\Delta x_j = x_j^{+} - \Delta x_j^{-}$$

$$\Delta x_j^{+} \underline{\underline{\Delta}} \begin{cases} if \quad \Delta x_j \ge 0 \quad , & \Delta x_j \\ else & 0 \end{cases}$$

$$\Delta x_j^{-} \underline{\underline{\Delta}} \begin{cases} if \quad \Delta x_j \le 0 \quad , & -\Delta x_j \\ else & 0 \end{cases}$$

با جایگزینی تغییر متغیر فوق مسأله بهگزینی تبدیل به شکل زیر می شود:

$$Optimize \qquad \underline{c}^T\,\underline{\Delta x}^{+} - \underline{c}^T\,\underline{\Delta x}^{-} = y - y(\underline{x}^{(K)})$$

$$Subject\ to: \quad A\underline{\Delta x}^{+} - A\underline{\Delta x}^{-} \le \underline{b} - \underline{f}(\underline{x}^{(k)})$$

$$\underline{\Delta x}^{+} - \underline{\Delta x}^{-} \le \underline{u} - \underline{x}^{(K)}$$

$$\underline{\Delta x}^{+} - \underline{\Delta x}^{-} \le \underline{u} - \underline{x}^{(K)}$$

فرمول تکرار، یعنی نقطه بعدی پس از حل برنامه ریزی خطی به دست می آید:

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} + \underline{\Delta x}^{+} - \underline{\Delta x}^{-}$$

مثال ۱. مطلوبست حل مسأله غیر خطی زیر با روش SLP (نقطه اولیه را $\underline{x}^{(0)} = [1 \quad 1]^T$ در نظر بگیرید)

$$Maximize \qquad y(\underline{x}) = 2x_1 + x_2$$

$$Subject\ to\ : \quad x_1^2 + x_2^2 \le 25$$

$$x_1^2 - x_2^2 \le 7$$

(و قید نامساوی و غیر خطی مسأله در شکل نمایش داده شده است. (شکل -۱)

شکل ۱

حل: خطی سازی، سپس تبدیل به مسأله LP

$$Maximize \qquad 2\Delta x_1^{+} + \Delta x_2^{+} - 2\Delta x_1^{-} - \Delta x_2^{-} = y - (2x_1^{(k)} - x_2^{(k)})$$

$$Subject\ to\ : \quad 2x_1^{(k)}\Delta x_1^{+} + 2x_2^{(k)}\Delta x_2^{+} - 2x_1^{(k)}\Delta x_1^{-} - 2x_2^{(k)}\Delta x_2^{-} \le 25 - (x_1^{(k)2} + x_2^{(k)2})$$

$$2x_1^{(k)}\Delta x_1^+ - 2x_2^{(k)}\Delta x_2^+ - 2x_1^{(k)}\Delta x_1^- + x_2^{(k)}\Delta x_2^- \le 7-(x_1^{(k)2}-x_2^{(k)2})$$
$$\Delta x_1^+ \quad - \Delta x_1^- \le 1$$
$$\Delta x_2^+ \quad - \Delta x_2^- \le 1$$
$$-\Delta x_1^+ \quad + \Delta x_1^- \le 1$$
$$-\Delta x_2^+ \quad + \Delta x_2^- \le 1$$

با جاگذاری $\underline{x}^{(0)} = [1 \quad 1]^T$ در مسأله بالا، با فرمولاسیون LP و متغیرهای تصمیم گیری $\Delta x_1^+, \Delta x_1^-, \Delta x_2^+, \Delta x_2^-$:

$$\text{Maximize} \qquad 2\Delta x_1^+ + \Delta x_2^+ - 2\Delta x_1^- - \Delta x_2^- = y-3$$
$$: \qquad 2\Delta x_1^+ - 2\Delta x_2^+ - 2\Delta x_1^- + 2\Delta x_2^- \le 23$$

Subject to

$$2\Delta x_1^+ - 2\Delta x_2^+ - 2\Delta x_1^- + 2\Delta x_2^- \le 7$$
$$\Delta x_1^+ - \Delta x_1^- \le 1$$
$$\Delta x_2^+ - \Delta x_2^- \le 1$$
$$-\Delta x_1^+ + \Delta x_1^- \le 1$$
$$-\Delta x_2^+ + \Delta x_2^- \le 1$$

با حل سیمپلکس، به جواب زیر می رسیم: $\Delta x_1^+ = 1 \quad , \Delta x_2^+ = 1 \quad , \Delta x_1^- = 0 \quad , \Delta x_2^- = 0$

نقطه بعدی از رابطه زیر به دست می آید:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + \Delta x_1^+ - \Delta x_1^- = 1+1-0 = 2 \\ \\ x_2^{(1)} = x_2^{(0)} + \Delta x_2^+ - \Delta x_2^- = 1+1-0 = 2 \end{cases} \rightarrow \quad \underline{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , y(\underline{x}^{(1)}) = 6$$

مجددا با خطی سازی مسأله حول $\underline{x}^{(1)}$ خواهیم داشت:

$$\text{Maximize} \qquad 2\Delta x_1^+ + \Delta x_2^+ - 2\Delta x_1^- - \Delta x_2^- = y-6$$
$$: \qquad 4\Delta x_1^+ + 4\Delta x_2^+ - 4\Delta x_1^- - 4\Delta x_2^- \le 17$$

Subject to

$$4\Delta x_1^+ - 4\Delta x_2^+ - 2\Delta x_1^- + 4\Delta x_2^- \le 7$$
$$\Delta x_1^+ - \Delta x_1^- \le 1$$
$$\Delta x_2^+ - \Delta x_2^- \le 1$$
$$-\Delta x_1^+ + \Delta x_1^- \le 1$$
$$-\Delta x_2^+ + \Delta x_2^- \le 1$$

با حل سیمپلکس ، جواب زیر به دست می آید :

$$\Delta x_1^+ = 1 \quad , \Delta x_1^- = 0 \quad , \Delta x_2^+ = 1/6 \quad , \Delta x_2^- = 0$$

و حدس بعدی:

$$\underline{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 4.0 \\ 3\frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad , y(\underline{x}^{(3)}) = 11\frac{1}{6}$$

با خطی سازی مجدد ولی حول $\underline{x}^{(3)}$ و حل سیمپلکس و بهبود جواب ، به $\underline{x}^{(4)}$ می رسیم.

$$\underline{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} 4.0 \\ 3.0044 \end{bmatrix} \quad , y(\underline{x}^{(4)}) = 11.00$$

و حل سیمپلکس آن:

$$\Delta x_1^+ = 0.0 \quad , \Delta x_1^- = 0.0 \quad , \Delta x_2^+ = 0.0 \quad , \Delta x_2^- = 0.00438$$

نقطه بعدی که جواب بهینه است به دست می آید:

$$\underline{x}^* = \underline{x}^{(5)} = \begin{bmatrix} 4.0000 \\ 3.0000 \end{bmatrix} \quad , y(\underline{x}^{(*)}) = 11.00$$

دقت کنید که نقطه $\underline{x}^{(3)} = \left[4, 3\frac{1}{6}\right]^T$ یک نقطه غیر ممکن است و عملاً قید اول را ارضاء نمی کند ولی چون بسیار نزدیک نقطه اپتیمم است، مشکلی ایجاد نمی کند. به هر حال باید توجه داشت که به طور کلی مسائل SLP برای تضمین همگرایی حتماً باید قیود به ویژه باندها(حرکت محدود) را رعایت کنند. جهت تایید تجربی این نکته، مسأله را یکبار دیگر ولی بدون رعایت باندها حل کنیم، به سلسله نقاط زیر می رسیم:

$$\underline{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \underline{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 8.5 \\ 5.0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \underline{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12.23 \end{bmatrix}$$

حال اگر حول $\underline{x}^{(2)}$ مسأله را خطی کنیم، آنگاه به حل نامحدود $\underline{x}^{(3)}$ می رسیم که منجر به واگرایی مسأله می شود.
یک روش رفع مسأله ، محدود کردن حدس های بعدی است.

برنامه ریزی مجذوری متوالی- SQP

این روش حل نیز مانند برنامه ریزی خطی متوالی، سعی در تقریب تابع هدف با فرم مجذوری دارد ولی از نظر توالی با SLP تفاوت های عمده دارد، به طوریکه مثلاً از نقطه قبلی به نقطه بعدی نیازمند حل مینیمم سازی یک متغیره هستیم.
در SQP فرض می شود تابع هدف به فرم کوادراتیک بوده و تمامی قیود به شکل خطی ظاهر می شوند. برای این کار معمولاً تابع لاگرانژین را تشکیل داده و از شرط جامعیت قیود قضیه کوهن- تاکر به نحو مقتضی استفاده می شود.
مسأله کلی QP به شکل زیر می باشد:

$$\text{Maximize} \qquad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{jk} x_j x_k$$
$$(\equiv \underline{c}^T \underline{x} - \underline{x}^T H \underline{x})$$

$$\text{Subject to :} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad , i = 1,2,\ldots,m$$
$$(\equiv A\underline{x} \le \underline{b})$$
$$x_j \ge 0 \qquad , j = 1,2,\ldots,n$$

دقت شود برای حل مسأله کلی برنامه ریزی غیرخطی، اگر قصد حل توسط SQP داریم، باید ضرائب و پارامترهای فوق $(A,H,\underline{C})$ را به طور تحلیلی یا عددی محاسبه کنیم.

روال کار بدین صورت است که متغیرهای کمبود x_{n+i} به روابط قیود خطی اضافه می شوند و سپس تابع لاگرانژین تشکیل می شود. شایان توجه است که از x_{n+i}^2 استفاده نمی کنیم، چون متداول این است که نسخه خطی شده قیود را با روش سیمپلکس حل می کنیم و چون دز سیمپلکس قید مثبت بودن متغیرها نهفته است، لذا x_{n+i} به طور خودکار مثبت می باشند.

تشکیل تابع لاگرانژین:

$$L(\underline{x},\underline{\lambda}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{jk} x_j x_k - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} + x_{n+i} - b_i\right)$$
$$\equiv \underline{c}^T \underline{x} - \underline{x}^T H \underline{x} - \underline{\lambda}^T (A\underline{x} - \underline{b} + \underline{x}_s)$$

از آنجائیکه شرط جامعیت قضیه کوهن-تاکر محتاج λ_i مثبت می باشد، لذا ترم اضافی را به صورت منفی در نظر گرفتیم.

با صفر قرار دادن مشتقات پاره ای مرتبه اول تابع لاگرانژین(نسبت به $\underline{x}$ و $\underline{\lambda}$) به دستگاه خطی زیر با سایز $m+n$ می رسیم.

$$c_j - \sum_{k=1}^{n} h_{jk} x_k \le b_i - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\lambda_i \ge 0 \qquad , j = 1,2,\dots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} - b_i = 0 \qquad , i = 1,2,\dots,m$$

دقت شود که شرط کوهن-تاکر(رابطه بالائی) برای ارضاء $\underline{x} \ge 0$ نوشته شده است. همچنین شرط جامعیت متغیرهای کمبود نیز باید ارضاء شود، یعنی

$$\lambda_i x_{n+i} = 0 \qquad , i = 1,2,\dots,m$$

اگر $x_{n+i} = 0$ باشد، یعنی قید متناظر با آن فعال می باشد(رابطه = برقرار است) و اگر $\lambda_i = 0$ ولی $x_{n+i} \ne 0$، آنگاه قید مربوطه غیرفعال است (رابطه اکیدا آ نامساویست). دو رابطه گفته شده بالا را می توان تحت یک برنامهریزی خطی فرموله کرد. متغیرهای مازاد (s_j) به رابطه اول و متغیرهای کمبود (x_{n+i}) به رابطه دوم اضافه می شود. به هرحال نیاز به متغیرهای مجازی نیز داریم تا بتوان اولین حل پایه و ممکن را به دست آورد. اگر متغیرهای مجازی z_j را با ضرایب متناظر c_j اضافه کنیم، آنگاه شکل تبدیل شده مسئله به فرم زیر خواهد بود:

$$\text{Maximize} \qquad \sum_{j=1}^{n} z_j$$

$$\text{Subject to :} \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} h_{jk} x_k + \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i - s_j + c_j z_j = c_j & , j = 1,2,\dots,n \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i & , i = 1,2,\dots,m \end{cases}$$

حال مسأله یک شکل برنامه ریزی خطی پیدا کرد، یعنی جواب $\underline{x}$ و $\underline{\lambda}$ مسأله بالا ، همان نقطه اپتیمم مسأله است ولی نکته مهمی وجود دارد که نیازمند مراقبت و حل خاصی از LP می باشد. جواب مسأله باید شرایط $\underline{\lambda} \geq 0, \underline{x} \geq 0$ و $\lambda_i x_{n+i} = 0$ را ارضاء کند. در نتیجه روش LP (نوعا سیمپلکس) مورد استفاده باید طوری اصلاح شود که λ_i و x_{n+i} هردو غیر صفر باشند، یعنی نباید جزء متغیرهای اساسی وارد شوند. نحوه رفع این مشکل در طی مثال متعاقب گفته می شود.

مثال ۲- با استفاده از برنامه ریزی مجذوری تابع هدف زیر را ماکزیمم کنید:

$$\begin{array}{ll} Maximize & 5x_1 + x_2 - 1/2(2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + 2x_2^2) \\ Subject \quad to: & x_1 + x_2 \leq 2 \end{array}$$

حل: با توجه به تابع هدف داده شده، فرمولاسیون LP به صورت زیر در می آید:

$$\begin{array}{ll} Maximize & z_1 + z_2 \\ Subject \quad to: & \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + \lambda_1 - s_1 + 5z_1 = 5 \\ -2x_1 + 2x_2 + \lambda_1 - s_2 + z_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \end{array}$$

با حذف z_1 و z_2 از تابع هدف :

$$\begin{array}{l|l} 13/5x_1 - 13/5x_2 - 1\tfrac{1}{5}\lambda_1 + 1/5s_1 + s_2 = c - 2 & c = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + \lambda_1 - s_1 + 5z_1 = 5 & z_1 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 + \lambda_1 - s_2 + z_2 = 1 & z_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 & z_3 = 2 \\ \hline \end{array}$$

x_2 وارد متغیرهای اساسی شده و z_2 خارج می شود:

$$\begin{array}{l|l} 0x_1 - 2/5\lambda_1 + 1/5s_1 + 1/5s_2 + 4/3z_2 = c - 1\tfrac{1}{5} & c = 1\tfrac{1}{5} \\ & \\ 2\lambda_1 - s_1 - s_2 + 5z_1 + z_2 = 6 & z_1 = 6/5 \\ -x_1 + x_2 + 1/2\lambda_1 - 1/2s_2 + 1/2z_2 = 1/2 & x_2 = 1/2 \\ 2x_1 + x_3 + 1/2s_2 - 1/2z_2 = 1\tfrac{1}{2} & x_3 = 1\tfrac{1}{2} \\ \hline \end{array}$$

حال اگر روش سیمپلکس را ادامه دهیم باید λ_1 وارد مجموعه متغیرهای اساسی شود. ولی مجموعه متغیرهای اساسی شامل هم λ_1 و هم x_3 (غیر صفر) می باشد و در نتیجه شرط جامع متغیرهای کمبود، یعنی $\lambda_1 x_3 = 0$ نقض می شود. لذا ، باید متغیرهای دیگری را به عنوان متغیر اساسی (متغیری که از حل دستگاه به دست می آید) معرفی کنیم. معمولاً این کار با انتخاب متغیری که ضریب کوچکی دارد انجام می شود. برای مسأله ما، این متغیر x_1 است. در نتیجه x_1 وارد متغیرهای اساسی شده و x_3 آن را ترک می کند.

$$\begin{array}{l|l} z_1 + z_2 = c - 0 & c = 0 \\ \lambda_1 - 1/3s_1 - 1/3s_2 + 5/3z_1 + 1/3z_2 = 3 & \lambda_1 = 3 \\ x_2 + x_3 + 1/12s_1 + 1/12s_2 - 5/12z_1 - 1/6z_2 = 1/2 & x_2 = 1/2 \\ \hline \end{array}$$

$x_3 = 3/2$	$x_1 + x_3 - 1/12 s_1 + 5/12 z_1 - 1/6 z_2 = 3/2$

تمام ضرائب متغیرها مثبت هستند و لذا به جواب بهینه رسیده ایم:

$$x_1 = 3/2 \quad , x_2 = 1/2 \quad , \lambda_1 = 3 \quad , x_4 = 0$$

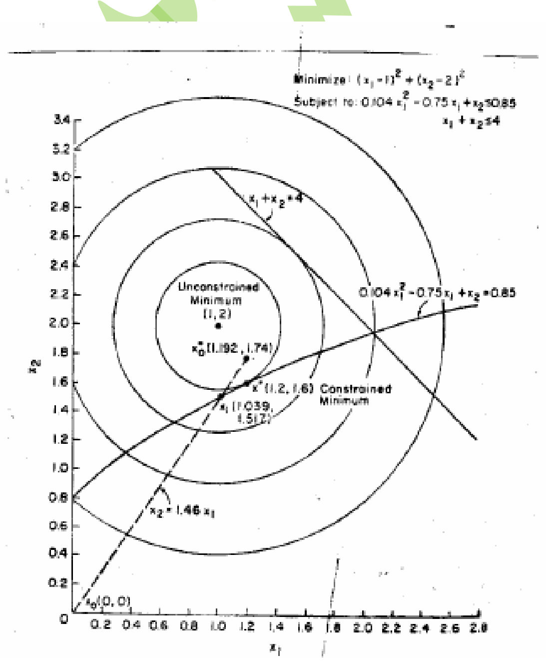
مثال ۳ : مسأله بهینه سازی زیر را با استفاده از برنامه ریزی مجذوری متوالی حل کنید. نقطه اولیه را مبداء ($\underline{x}^{(0)} = [0 \quad 0]^T$) فرض کنید.

$$Minimize \qquad (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$$

$$Subject \quad to: \quad 0.104 x_1^2 - 0.75 x_1 + x_2 \le 0.85$$

$$x_1 + x_2 \le 4.0$$

حل : منحنی های تراز به همراه قیود در شکل زیر نشان داده شده اند.



قید غیرخطی را (اولین قید) حول نقطه $\underline{x}^{(0)}$ خطی می کنیم :

$$(0.208 x_1^{(0)} - 0.75) x_1 + x_2 \le 0.85 + 0.104 x_1^{(0)2}$$

مسأله را به فرم برنامه ریزی مجذوری می نویسیم :

$$x_1 + 4x_2 - \frac{1}{2}(2x_1^{\,2} + 2x_2^{\,2}) - 5 \quad Minimize$$

$$Subject\ to: \qquad (0.208 x_1^{(0)} - 0.75) x_1 + x_2 \le 0.85 + 0.104 x_1^{(0)2}$$

$$x_1 + x_2 \le 4$$

روند کار به صورت تبدیل مسأله مجذوری به حل LP می باشد :

$$z_1 + z_2 \quad Minimize$$

$$\text{Subject to:}\quad \begin{aligned} &2x_1+(0.208x_1^{(0)}-0.75)\lambda_1+\lambda_2-s_1+2z_1=2\\ &2x_1+\lambda_1+\lambda_2-s_2+4z_2=4\\ &(0.208x_1^{(0)}-0.75)x_1+x_2+x_3=0.85+0.104x_1^{(0)2}\\ &x_1+x_2+x_3=4 \end{aligned}$$

با حل مسائل به روش سیمپلکس و $\underline{x}^{(0)}=[0 \quad 0]^T$ و همچنین رعایت شرط جامعیت به حدس بعدی می رسیم :

$x_1=1.192$ و $x_2=1.740$ و $\lambda_1=0.512$

همانطور که از شکل نیز پیداست ، این نقطه خارج از ناحیه ممکن و مجاز می باشد. لذا با یک جستجو در راستای خط مارّ بر نقاط $\underline{x}^{(0)}=[0 \quad 0]^T$ و $\underline{x}^{(0)*}=[1.192 \quad 1.74]^T$ ، به نقطه ممکن و مجاز $\underline{x}^{(1)}$ ، یعنی $\underline{x}^{(1)}=[1.039 \quad 1.517]^T$ (روی قید اول) می رسیم.

حال مسیر را دوباره تکرار می کنیم ، یعنی $\underline{x}^{(1)}$ می شود نقطه پایه برای تقریب خطی و بسط تیلور قیود و سپس مسأله برنامه ریزی مجذوری را حل می کنیم. حدس بعدی به صورت $\underline{x}^{(2)}=[1.209 \quad 1.608]^T$ بدست می آید ($\lambda_1=0.784$). مجدداً روند کار را تکرار می کنیم و به جواب $\underline{x}^{(3)}=[1.199 \quad 1.60]^T$ می رسیم که با تولرانس خوب همان جواب بهینه است ، یعنی $\underline{x}^{*}=[1.2 \quad 1.6]^T$.

◄ روش گرادیان تقلیلی تعمیم یافته

این روش عملاً تعمیم روش گرادیان تقلیلی برای حل مسائل بهینه سازی غیرخطی با قیود خطی می باشد. برای جزئیات روش ، مسأله NLP زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} && f(\underline{x})\\ &\text{Subject to:} && h_j(\underline{x})\le 0 \quad \text{و} \quad j=1,2,\dots,m\\ & && l_k(\underline{x})=0 \quad \text{و} \quad k=1,2,\dots,l\\ & && x_i^{(l)}\le x_i\le x_i^{(u)} \quad \text{و} \quad i=1,2,\dots,n \end{aligned}$$

با اضافه کردن m تا متغیر جدید کمبود ، می توان قیود نامساوی را حذف کرد :

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} \quad f(\underline{x}) \quad \text{و} \quad \underline{x}\,\underline{\underline{\Delta}}\,[x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n \quad x_{n+1} \quad \dots \quad x_{n+m}]^T\\ &h_j+x_{n+j}=0 \quad \text{و} \quad j=1,2,\dots,m\\ &l_k(\underline{x})=0 \quad \text{و} \quad k=1,2,\dots,l \end{aligned}$$

$$x_i^{(l)} \le x_i \le x_i^{(u)} \quad و \quad i = 1,2,\dots,n$$
$$x_{n+j} \ge 0 \qquad و \qquad j = 1,2,\dots,m$$

در نتیجه مسأله را می توان به شکل کلی زیر نوشت :

$$Minimize \qquad f(\underline{x})$$
$$g_j(\underline{x}) = 0 \quad و \quad j = 1,2,\dots,m+1$$
$$x_i^{(l)} \le x_i \le x_i^{(u)} \quad و \quad i = 1,2,\dots,n+m$$

روش GRG مبتنی بر ایده حذف متغیرها از طریق روابط (قیود) مساوی می باشد ، یعنی به طور نظری باید بتوان به اندازه مقدار قیود مساوی ($i \quad m+l$)، x_j را حذف کرد و تابع هدف را بر حسب $(n+m)-(m+l)$ فرموله کرد. برای این کار مجموعه متغیرها ، یعنی $\underline{x} \in R^{n+m}$ را به صورت افراز دو بردار $\underline{y}$ و $\underline{z}$ می نویسیم :

$$\underline{x} \,\underline{\Delta}\, \left[\underline{y}^T : \underline{z}^T\right]^T$$

بطوریکه $\underline{y}$ متغیرهای مستقلی باشد و $\underline{z}$ مجموعه متغیرهایی که تابع هستند ، یعنی انگار از $m+l$ رابطه (قیود) بتوان آن ها را (بطور نظری) صراحتاً بر حسب $\underline{y}$ (y_i ها) بنویسیم.

$$\underline{y} \,\underline{\Delta}\, [y_1 \; y_2 \quad \dots \quad y_{n-l}]^T$$
$$\underline{z} \,\underline{\Delta}\, [z_1 \; z_2 \quad \dots \quad z_{m+l}]^T$$

دیفرانسیل کامل تابع هدف و قیود را می نویسیم :

$$df(\underline{x}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n-l} \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i + \sum_{i=1}^{m+l} \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i}_{\text{فرم جبری}} = \underbrace{\underline{\nabla_y^T f}\, d\underline{y} + \underline{\nabla_z^T f}\, d\underline{z}}_{\text{فرم هندسی}}$$

$$dg_i(x) = \sum_{j=1}^{n-l} \frac{\partial g_i}{\partial y_j} dy_j + \sum_{j=1}^{m+l} \frac{\partial g_i}{\partial z_j} dz_j$$

یا

$$\underbrace{\underline{dg} = C d\underline{y} + D d\underline{z}}_{\text{فرم هندسی}}$$

به طوریکه

$$\underline{\nabla_y f} \triangleq \left[\frac{\partial f}{\partial y_1} \quad \frac{\partial f}{\partial y_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial y_{n-l}} \right]^T$$

$$\underline{\nabla_z f} \triangleq \left[\frac{\partial f}{\partial z_1} \quad \frac{\partial f}{\partial z_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial z_{m+l}} \right]^T$$

$$C \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_{n-l}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_{m+l}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_{m+l}}{\partial y_{n-l}} \end{bmatrix}$$

$$D \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial z_{m+l}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_{m+l}}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial g_{m+l}}{\partial z_{m+l}} \end{bmatrix}$$

حال می توان دیفرانسیل f (تابع هدف) را با حذف $d\underline{z}$ بر حسب متغیرهای $\underline{y}$ نوشت :

$$\underline{dg} = C d\underline{y} + D d\underline{z} \quad \Rightarrow \quad \underline{dz} = -D^{-1} C\, d\underline{y} \quad \Rightarrow \quad df \text{ جاگذاری در }$$

$$df = (\ \underline{\nabla_y}^T f - \underline{\nabla_z}^T f\, D^{-1} C\ ) d\underline{y} \ \Rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \text{یا} \quad \rightarrow \quad \frac{df}{d\underline{x}} = \text{تعریف گرادیان} \qquad \triangleq \ \underline{\nabla_R f}$$

در نتیجه می توان این نوع مشتق گیری از تابع اسکالر که ه نام گرادیان معروف است را به این شکل (گرادیان تعمیم یافته) نوشت :

$$\underline{\nabla_R f} = \underline{\nabla_y f} - C^T D^{-T} \underline{\nabla_z f} = \underline{\nabla_y f} - (D^{-1} C)^T \underline{\nabla_z f}$$

از نظر هندسی و تجسم فضایی ، گرادیان تقلیلی ، عملاً تصویر گرادیان n متغیره (گرادیان اصلی تابع هدف) روی فضای تقلیل یافته ($n-m$ بعدی) متشکل از متغیرهای مستقل می باشد.

می دانیم شرط لازم برای وجود اکسترمم یک تابع هدف نامقید ، صفر عناصر بردار گرادیان می باشد. می توان نشان داد متشابهاً اگر بردار گرادیان تقلیلی یک تابع هدف مقید ، صفر باشد ، آنگاه همان شرط لازم قضیه KT نیز برقرار است. لذا بقیه کار می ماند جستجوی بهینه برای محاسبه حدس بعدی ، چون جهت جستجوی بهینه همان منفی گرادیان تقلیلی می باشد و باید گام بهینه را اختیار کنیم. یک نسخه نیوتنی (شبه نیوتنی) برای الگوریتم GRG به شرح زیر است :

گام اول – ابتدا متغیرهای مستقل (متغیرهای طراحی) و متغیرهای تابع (متغیرهای حالت) را معلوم کنید.

این کار می تواند رندام انجام شود یا با حس فیزیکی مسآله. به هر حال نکات زیر ، مفید فایده هستند :

الف) متغیرهای حالت را حتی الامکان طوری انتخاب کید که از تکین بودن ماتریس D پرهیز شود.

ب) ار آنجائیکه متغیرهای حالت ($\underline{z}$) در طول پروسه تکرار ، مقدار عوض می کنند ، آنگاه هر عنصر از $\underline{x}$ که اشباع می شود (یعنی یا مقدار باند پائین خودش را می گیرد یا مقدار باند بالا)، باید در زمره متغیرهای طراح محسوب شود.

ج) ار آنجائیکه متغیرهای کمبود به صورت خطی ظاهر می شوند ، بهتر است اولین کاندیداهای متغیرهای حالت محسوب شوند ف چون صراحتاً بدست می آیند. ولی دقت شود اگر مقدار اولیه آنها ، صفر باشد ، بهتر است جزء متغیرهای طراحی محسوب شوند.

گام دوم- بردار گرادیان تقلیلی را حساب کنید. مشتق های وارد شده در تعریف $\nabla_R \underline{f}$ می توانند هم تحلیلی و هم عددی محاسبه شوند.

گام سوم- محک اختتام را امتحان کنید. در صورت برقرار بودن ، الگوریتم خاتمه یافته است و گرنه به گام بعدی بروید.

گام چهارم- جهت جستجوی بهینه را اختیار کنید. روش های تندترین شیب ، فلچر- ریوز ، DFP و $DBFGS$ ، روش های رایج هستند. به طور مثال برای روش تندترین شیب :

$$\underline{s}=\nabla_R \underline{f}$$

گام پنجم- یک جستجوی تک کتغیره در راستای $\underline{s}$ انجام دهید. گرچه از روش های متداول می توان استفاده کرد ، ولی روش ذیل مقتضی روش GRG پیشنهاد شده است :

الف) یک تخمین از λ به عنوان فاصله (دوری) از نزدیک ترین قید (بعد از تعیین متغیرهای طراحی) در نظر بگیرید :

$$\lambda_y=\begin{cases}\dfrac{y_i^{(u)}-y_i^{(prv.)}}{s_i} & if \quad s_i>0\\[2ex] \dfrac{y_i^{(l)}-y_i^{(prv.)}}{s_i} & if \quad s_i<0\end{cases}$$

به طوریکه s_i ، یک نمونه از بردار $\underline{s}$ می باشد. از طرفی ، قبلاً داشتیم :

$$\underline{dz}=-D^{-1}C\underline{dy} \qquad \text{یا} \qquad \rightarrow \qquad \underline{\Delta z}=-D^{-1}C\Delta\underline{y}$$

و چون $\Delta\underline{y}=\lambda\underline{s}$ ، آنگاه جهت جستجو برای متغیر حالت می باشد. بدین ترتیب ، گام بهینه برای فضای متغیرهای حالت به صورت زیر بدست می آید :

$$\lambda_z=\begin{cases}\dfrac{z_i^{(u)}-z_i^{(prv.)}}{t_i} & if \quad t_i>0\\[2ex] \dfrac{z_i^{(l)}-z_i^{(prv.)}}{t_i} & if \quad t_i<0\end{cases}$$

به طوریکه t_i ، یک نمونه از بردار $\underline{t}$ می باشد. یک تخمین خوب از حد بالای λ ، مینیمم گیری بین λ_y و λ_z می باشد ، یعنی

$$\lambda^{(u)}=\min(\lambda_y,\lambda_z)$$

ب) با استفاده از روش های کارآئی مثل میانیابی درجه دوم ، λ^* را بدست آورید.

ج) بردار یا حدس بعدی $\underline{x}$ را بیابید :

$$\underline{x}^{(nxt.)}=\begin{bmatrix}\underline{y}^{(prv.)}+\underline{\Delta y}\\ \underline{z}^{(prv.)}+\underline{\Delta z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underline{y}^{(prv.)}+\lambda^*\underline{s}\\ \underline{z}^{(prv.)}+\lambda^*\underline{t}\end{bmatrix}$$

مثال ٤ – مطلوبست حل مسآله بهینه سازی زیر با روش GRG (نقطه شروع را $[-2.6 \quad 2 \quad 2]^T$ فرض کنید).

$$\text{Minimize: } \begin{array}{l} f(\underline{x})=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^4, \\ \underline{x}=[x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T \quad \in R^3 \end{array}$$

$$\text{Subject to : } \begin{array}{l} g_1(\underline{x})=x_1(1+x_2{}^2)+x_3{}^4-3=0, \\ -3\le x_i \le 3 \quad , \quad i=1,2,3 \end{array}$$

حل :

گام اول : ابتدا به طور دلخواه دو متغیر طراحی و یک متغیر حالت را به شکل زیر تعریف می کنیم

$$\underline{y}=[y_1 \quad y_2]^T=[x_1 \quad x_2]^T \qquad , \underline{z}=[z_1]=[x_3]$$

سپس نقطه اولیه $\underline{x}^{(0)}=[-2.6 \quad 2 \quad 2]^T$ را انتخاب کردیم ($f(\underline{x}^{(0)})=21.16$)

گام دوم : محاسبه GRG از حدس اولیه :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=2(x_1-x_2) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=-2(x_1-x_2)+4(x_2-x_3)^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}=-4(x_2-x_3)^3 \quad , \quad \frac{\partial g_1}{\partial x_1}=1+x_2{}^2$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2}=2x_1x_2 \quad , \quad \frac{\partial g_1}{\partial x_3}=4x_3{}^3$$

$$\underline{\nabla_y f}\ \Big|_{\underline{x}^{(0)}}=\begin{bmatrix}2(-2.6-2)\\ -2(-2.6-2)+4(2-2)^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9.2\\ 9.2\end{bmatrix}$$

$$\underline{\nabla_z f}\ \Big|_{\underline{x}^{(0)}}=\left[-4(x_2-x_3)^3\right]=0$$

$$C\ \Big|_{\underline{x}^{(0)}}=[5 \quad -10.4] \quad , \quad D\ \Big|_{\underline{x}^{(0)}}=[32] \rightarrow D^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{32}\end{bmatrix}$$

$$D^{-1}C=[0.15625 \quad -0.325]$$

$$\underline{\nabla_R f}\ \Big|_{\underline{x}^{(0)}}=\begin{bmatrix}-9.2\\ 9.2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0.15625\\ -0.325\end{bmatrix}(0)=\begin{bmatrix}-9.2\\ 9.2\end{bmatrix}$$

گام سوم : عناصر GRG صفر نشده اند ، لذا $\underline{x}^{(0)}$ ، نقطه اپتیمم نیست ،

گام چهارم : انتخاب راستای بهینه برای $\underline{y}$

$$\underline{s} = -\underline{\nabla_R f} = \begin{bmatrix} 9.2 \\ -9.2 \end{bmatrix}$$

گام پنجم :

$$\text{برای} \quad \begin{cases} y_1 = x_1 & : \quad \lambda_y^{(1)} = \dfrac{3-(-2.6)}{9.2} = 0.6087 \\ y_2 = x_2 & : \quad \lambda_y^{(2)} = \dfrac{-3-(2)}{-9.2} = 0.5435 \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$\lambda_y = \min \quad (\lambda_y^{(1)}, \lambda_y^{(2)}) = 0.5435$$

انتخاب راستای بهینه برای $\underline{z}$

$$\underline{t} = -D^{-1} C \underline{s} = -[0.15625 \quad -0.325] \begin{bmatrix} 9.2 \\ -9.2 \end{bmatrix} = -4.4275$$

$$\text{برای} \quad z_1 = x_3 \quad : \quad \lambda_z = \frac{-3-(2)}{-4.4275} = 1.1293$$

$\min(\lambda_y, \lambda_z) = 0.5435$ حد بالای λ می شود

$$\underline{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} \underline{y}^{(0)} + \lambda \underline{s} \\ \underline{z}^{(0)} + \lambda \underline{t} \end{bmatrix} \rightarrow \underline{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -2.6 + 9.2\lambda \\ 2 - 9.2\lambda \\ 2 - 4.4275\lambda \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$f(\lambda) = f(\underline{x}) = \ldots = 518.7806\lambda^4 + 338.56\lambda^2 - 169.28\lambda + 21.16$$

$$\rightarrow \frac{df}{d\lambda} = 2075.1225\lambda^3 + 677.12\lambda - 169.28 = 0 \qquad \rightarrow \lambda^* = 0.22$$

$$\rightarrow x^{(nxt.)} = \begin{bmatrix} -2.6 + 9.2(0.22) \\ 2 - 9.2(0.22) \\ 2 - 4.4275(0.22) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.576 \\ -0.024 \\ 1.02595 \end{bmatrix}$$

نکته : اگربه واریاسیون متغیرهای حالت توجه شود ، یعنی

$$\underline{dz} = -D^{-1} C d\underline{y}$$

آنگاه می توان انتظار داشت که نقطه جدید بدست آمده ، غیرممکن باشد ، چون انگار فضای حالت را تقریب زده ایم (با ژاکوبین $D^{-1}C$) ، حال اگر D نزدیک به تکین باشد ، یا ستون های $D^{-1}C$ ، وابستگی خطی داشته باشند ، آنگاه ادامه کار خیلی قابل اطمینان نیست. لذا در اکثر واریانت های GRG ، پیشنهاد شده است که این حالت توسط یک آزمون مقتضی ، محک بخورد. یک محک این است که در λ^* ، مقدار $\underline{dg}$ را چک کنیم. اگر نزدیک به صفر بود ، آنگاه یک نقطه ممکن داریم وگرنه غیرممکن است.

برای مسأله خودمان :

$$g_1(\underline{x}^{(1)}) = (-0.576)\left[1 + (-0.024)^2\right] + (1.02595)^4 - 3$$
$$= \quad -2.4684 \quad \neq 0$$

یعنی قید ارضاء نمی شود ،

پس نقطه غیرممکن است.

برای درمان این قضیه ، با ثابت نگاه داشتن $\underline{y}^{(nxt.)}$ ، سعی می کنیم $\underline{z}^{(nxt.)}$ را بهبود دهیم. یک روش اصلاح نیوتنی به صورت زیر است :

$$\underline{dz} = D^{-1}\left[-\underline{g}(\underline{x}) - C\underline{dy}\right]$$

در نتیجه :

$$D = \left[4(1.02595)^3\right] = [4.319551]$$
$$g_1(\underline{x}) = [-2.4684]$$
$$C = [-1.104 \quad -3.5258]$$
$$\rightarrow \quad dz(\equiv \Delta z) = [-0.5633]$$

$$\underline{z}^{(nxt.)} = \underline{z}^{(prv.)} + \Delta\underline{z} = 2 - 0.5633 = 1.4367 \qquad \rightarrow \underline{x}^{(nxt.)} = \begin{bmatrix} -0.576 \\ -0.024 \\ 1.4367 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad g_1 = \ldots = 0.6842 \neq 0$$

$\rightarrow$ باید روش نیوتن را تکرار کنیم $\rightarrow \ldots \rightarrow \left[\underline{x}^{(nxt.)}\right]_{feasible}$

$$\left[\underline{x}^{(nxt.)}\right]_{feasible} = \begin{bmatrix} -0.576 \\ -0.024 \\ 1.2477 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad f(\underline{x}^{(nxt.)}) = 2.9201$$

دقت کنید در یک تکرار مقدار تابع تا یک مرتبه عددی (ده برابر) کم شد.

بقیه راه سرراست است و باید $\underline{x}^{(nxt.)}$ را جایگزین در GRG کنیم و چک کنیم آیا GRG نزدیک به صفر شده است یا خیر تا نهایتاً به جواب بهینه برسیم.

◄ روش های جهات ممکن (Feasible Directions)

پشتوانه و ایده اساسی این وش ها مشابه روش های جستجو برای بهگزینی مقید می باشد ، با این تفاوت که هیچ قیدی نقض نشود. به طور خیلی خام ف حرکت کلی لین روش ها به صورت جابجایی از نقطه $\underline{x}^{(k)}$ به نقطه $\underline{x}^{(k+1)}$ می باشد.

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} + \lambda \underline{s}^{(k)} \qquad (1)$$

به طوریکه $\underline{x}^{(k)}$ نقطه شروع ، $\underline{s}^{(k)}$ جهت حرکت و λ طول گام می باشد. بدیهیست که $\underline{x}^{(k+1)}$ ، نقطه ممکن بعدیست به این مفهوم که طول گام (λ) و مقدم بر آن $\underline{s}^{(k)}$ طوری انتخاب می شوند که نقطه $\underline{x}^{(k+1)}$ یک نقطه ممکن باشد ، یعنی هیچ قیدی را نقض نکند. جهت $\underline{s}^{(k)}$ باید طوری انتخاب شود که دو شرط زیر ارضاء شوند:

(۱) هر حرکت کوچک ولو دیفرانسیلی در این راستا ف هیچ قیدی را نقض نکند و

(۲) مقدار تابع هدف بهبود (در حالت مینیمم سازی ، کمتر) پیدا کند.

بعد از محاسبه $\underline{x}^{(k+1)}$ ، روند تا زمانی تکرار می شود که نتوان دو شرط بالا را ارضاء کرد. نقطه نهایی ، یک مینیمم محلی خواهد بود ، مگر اینکه مسأله محدب باشد که در آن صورت مینیمم مطلق خواهد بود. هر راستا و هر جهتی که شرط (۱) را در بالا ارضاء کند ، موسوم به یک جهت ممکن می باشد. در حالیکه دو شرط (۱) و (۲) را همزمان ارضاء کند ، آنگاه یک جهت ممکن مفید (*usable feasible direction*) می باشد. روش های مختلفی برای پیدا کردن مجموعه جهات ممکن مفید موجود است ولی معمولاً از شرط جهات ممکن (بحث شده در فصل دوم) استفاده می شود:

$$\frac{d}{d\lambda} g_j(\underline{x}^{(k)} + \lambda \underline{s}) \Big|_{\lambda=0} = \underline{s}^T \underline{\nabla g_j}(\underline{x}^{(k)}) \quad \le 0 \qquad (2)$$

به طوریکه شرط اکیداً کوچکتر (فقط علامت " کوچکتر از" برقرار باشد) موقعی برقرار است که قید مربوطه خطی یا کاو باشد. به هر حال جهت $\underline{s}$ موقعی یک جهت ممکن مفید است که در دو شرط زیر صدق کند:

$$\frac{d}{d\lambda} f(\underline{x}^{(k)} + \lambda \underline{s}) \Big|_{\lambda=0} = \underline{s}^T \underline{f}(\underline{x}^{(k)}) \quad < 0 \qquad (2)$$ (شرط (۲) در بالا)

$$\frac{d}{d\lambda} g_j(\underline{x}^{(k)} + \lambda \underline{s}) \Big|_{\lambda=0} = \underline{s}^T \underline{\nabla g_j}(\underline{x}^{(k)}) \quad \le 0 \qquad (3)$$

دو روش معروف به افتخار مبدعین آنها برای تأمین عملکرد صحیح روش جهات ممکن موسوم است. یکی روش *زوتندیچ* (*Zoutendijk's method*)
و دیگر روش تصویرساز گرادیان روزن (*Rosen's gradient projection method*)

◄ روش زوتندیچ

در این روش جهت ممکن مفید برابر با منفی یا قرینه بردار گرادیان انتخاب می شود و البته شرط اصلی آن این است که نقطه شروع در داخل (و نه روی مرز) ناحیه ممکن قرار داشته باشد. اگر نقطه شروع روی مرز باشد ، ممکن است چند قید فعال شوند ولی با رعایت دو شرط (۳) و (۴) نقطه بعدی داخل ناحیه ممکن باید قرار بگیرد. الگوریتم روش مزبور به طور خلاصه برای حالت فقط قیود نامساوی به شکل زیر می باشد.

گام اول- با یک نقطه مشخص ممکن مثل $\underline{x}^{(1)}$ و چند عدد تنظیم (برای محک همگرایی) مثل E_1 ، E_2 و E_3 شروع کرده و مقادیر $f(\underline{x}^{(1)})$ ، $g_j(\underline{x}^{(1)})$ (برای $j=1,2,...,m$) را بیابید. (کنتور تکرار را معادل ۱ قرار دهید $k=1$).

گام دوم- اگر $g_j(\underline{x}^{(k)}) \le 0$ برای تمامی j ها برقرار است ، جهت ممکن $\underline{s}^{(k)}$ را قرینه گرادیان قرار دهید:

$$\underline{s}^{(k)} = -\nabla f(\underline{x}^{(k)}) \qquad (۵)$$

جهت $\underline{s}^{(k)}$ را نرمالیزه کرده و به گام پنجم بروید. اگر حداقل یک قید به صورت مساوی درآمده است (یعنی قید فعال داریم) ، به گام سوم بروید.

گام سوم- یک جهت ممکن مثل $\underline{s}$ با حل مسأله "جهت یابی" (*direction finding*) زیر ، پیدا کنید:

$$\begin{aligned}
&\textit{Minimize}\ \ -\alpha \\
&S.T. \qquad \underline{s}^T \nabla g_j(\underline{x}^{(k)}) + \vartheta_j \alpha \le 0 \qquad j=1,2,...,p && (۶)\\
&\qquad\qquad \underline{s}^T \nabla \underline{f} + \alpha \le 0 && (۷)\\
&\qquad\qquad -1 \le s_i \le 1 \qquad i=1,2,...,n && (۸)
\end{aligned}$$

به طوریکه s_i ، معرف مؤلفه نمونه $\underline{s}$ می باشد. تعداد قیود فعال نیز با p نشان داده شده است.
مقادیر θ_j به عنوان وزن عمل می کنند و می توان همه آنها را واحد وزن فرض کرد.

گام چهارم- اگر مقدار α^* (α بهینه) محاسبه شده در گام سوم خیلی نزدیک به صفر بود (با تولرانس E_1) ، محاسبات را خاتمه دهید و مقدار $\underline{x}^*$ را معادل با $\underline{x}^{(k)}$ اعلام کنید ولی اگر این برقرار نبود ، (یعنی $\alpha^* > E_1$) آنگاه به گام پنجم بروید با $\underline{s}^{(k)} = \underline{s}$.

گام پنجم- یک طول گام مناسب مثل $\lambda^{(k)}$ در امتداد بردار $\underline{s}^{(k)}$ بیابید تا به نقطه یا حدس بعدی برسید:

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} + \lambda^{(k)} \underline{s}^{(k)} \tag{۹}$$

گام ششم- مقدار تابع هدف (یعنی $f(\underline{x}^{(k+1)})$) را فراخوانی یا محاسبه کنید.

گام هفتم – دو شرط اختتام را امتحان کنید:

$$\left| \frac{f(\underline{x}^{(k)}) - f(\underline{x}^{(k+1)})}{f(\underline{x}^{(k)})} \right| \le E_2 \quad \text{و} \quad \left\| \underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)} \right\| \le E_3 \tag{۱۰}$$

در صورت برقرار بودن دو شرط فوق ، به انتهای محاسبات رسیده ایم و نقطه اپتیمم را معادل $\underline{x}^{(k+1)}$ اعلان کنید.

گام هشتم – کنتور تکرار را یکی اضافه کرده و به گام دوم برگردید.

در الگوریتم پیشنهادی سه نکته یا فانکشن اصلی برقرار است.

اولاً) روش سیستماتیک جهت $\underline{s}$ چگونه است ؟

ثانیاً) مقدار مناسب طول گام چگونه اختیار شود ؟

و ثالثاً) تسریع همگرایی باید اعمال شود.

انتخاب جهت ممکن مفید – اگر نقطه $\underline{x}^{(k)}$ در منطقه حل ممکن قرار بگیرد (یعنی $g_j(\underline{x}^{(k)})$ برای همه j ها کوچکتر از صفر باشد) جهت ممکن مفید به صورت $-\nabla f(\underline{x}^{(k)})$ انتخاب می شود. یک حالت استثنایی این است که برخی از قیود بطور بحرانی نزدیک به صفر مقدار بگیرند. یک راه حل سیستماتیک انتخاب بهترین جهت ممکن مفید می باشد که در گام سوم روش شرح شد. انگیزه تکنیک بکار رفته در گام سوم این است که بهترین جهت ممکن مفید ، آن جهتی است که از تمام قیود مستعد به فعال شدن حتی الامکان دور شود و در عین حال در منطقه ممکن نیز قرار داشته باشد. این میزان دوری با پارامتر وزن θ_j مشخص شده است. اگر بردار $\underline{s}$ ، نرمال نشود ، امکان دارد مقدار α به سمت بی نهایت برود بدون اینکه شرایط ممکن و مفید بودن $\underline{s}$ نقض شود. برای نرمالیزاسیون $\underline{s}$ می توان یکی از شرایط زیر را انتخاب کرد:

$$\underline{s}^T \underline{s} = \sum_{i=1}^{n} s_i^{\,2} = 1 \tag{۱۱}$$

$$-1 \le s_i \le 1 \qquad i = 1,2,\dots,n \tag{۱۲}$$

$$\underline{s}^T \underline{\nabla f}(\underline{x}^{(k)}) \le 1 \tag{۱۳}$$

باید دقت کرد که خود تابع هدف و دو قید نامساوی (۶) و (۷) بر حسب متغیرهای تصمیم گیری خطی هستند و اگر دو قید نرمالیزاسیون (۱۲) و (۱۳) را در نظر بگیریم مسأله حالت LP میگیرد ولی اگر قید (۱۱) را برای نرمالیزاسیون انتخاب کنیم ، چون به فرم مجذور نیست ، لذا غیرخطی می شود. خود زوتندیچ نوعی اصلاح برای LP بکار گرفت که این شرط غیرخطی را هم بپوشاند. معذلک ، روش را برای حالت LP خالص ادامه می دهیم ، یعنی برای نرمالیزاسیون قید نامساوی (۱۲) را بکار می گیریم و مسأله بهینه سازی α را به شکل گسترده زیر مطرح می کنیم.

$$\text{Minimize } -\alpha$$

$$\begin{aligned}
\text{Subject to:}\quad & s_1\frac{\partial g_1}{\partial x_1}+s_2\frac{\partial g_1}{\partial x_2}+\dots+s_n\frac{\partial g_1}{\partial x_n}+\vartheta_1\alpha\le 0\\
& s_1\frac{\partial g_2}{\partial x_1}+s_2\frac{\partial g_2}{\partial x_2}+\dots+s_n\frac{\partial g_2}{\partial x_n}+\vartheta_2\alpha\le 0\\
& \vdots\\
& s_1\frac{\partial g_p}{\partial x_1}+s_2\frac{\partial g_p}{\partial x_2}+\dots+s_n\frac{\partial g_p}{\partial x_n}+\vartheta_p\alpha\le 0\\
& s_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+s_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\dots+s_n\frac{\partial f}{\partial x_n}+\alpha\le 0\\
& s_1-1\le 0\\
& s_2-1\le 0\\
& \vdots\\
& s_n-1\le 0\\
& -1-s_1\le 0\\
& -1-s_2\le 0\\
& \vdots\\
& -1-s_n\le 0
\end{aligned} \tag{۱۴}$$

به طوریکه p تعداد قیود فعال و تمامی مشتقات در نقطه تکرار $\underline{x}^{(k)}$ محاسبه می شوند. با یک تغییر متغیر به شکل $t_i = s_i + 1$ مسأله ساده تر می شود. و به شکل LP استاندارد در می آید: (بردار $\underline{y}$ ، بردار متغیر کمبود می باشد)

$$\text{Minimize } -\alpha$$

$$\begin{aligned}
& t_1\frac{\partial g_1}{\partial x_1}+t_2\frac{\partial g_1}{\partial x_2}+\dots+t_n\frac{\partial g_1}{\partial x_n}+\vartheta_1\alpha+y_1=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g_1}{\partial x_k}\\
& t_1\frac{\partial g_2}{\partial x_1}+t_2\frac{\partial g_2}{\partial x_2}+\dots+t_n\frac{\partial g_2}{\partial x_n}+\vartheta_2\alpha+y_2=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g_2}{\partial x_k}\\
& \vdots\\
& t_1\frac{\partial g_p}{\partial x_1}+t_2\frac{\partial g_p}{\partial x_2}+\dots+t_n\frac{\partial g_p}{\partial x_n}+\vartheta_p\alpha+y_p=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g_p}{\partial x_k}
\end{aligned} \tag{۱۵}$$

$$t_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+t_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots+t_n\frac{\partial f}{\partial x_n}+\alpha+y_{p+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}$$

$$t_1+y_{p+2}=2 \quad \text{و} \quad t_2+y_{p+3}=2 \quad \text{و} \quad \ldots \quad \text{و} \quad t_n+y_{p+n+1}=2$$

$$t_1\geq 0 \quad \text{و} \quad t_2\geq 0 \ \text{و} \ \ldots \ \text{و} \ t_n\geq 0$$

$$\alpha\geq 0$$

پس از حل:

$$\underline{s}=[s_1 \quad s_2 \quad \ldots s_n]^T$$
$$=[t_1^*-1 \quad t_2^*-1 \quad \ldots \quad t_n^*-1]$$

اگر جواب مسأله بهگزینی بالا به صورت $\alpha^*=0$ در آید، می توان نشان داد که در این حالت هم قضیه KKT در $\underline{x}^{(k)}$ صادق است و لذا می توان $\underline{x}^{(k)}$ را به عنوان جواب بهگزینی اصلی اعلان کرد.

تعیین طول گام مناسب – بعد از محاسبه جهت ممکن مفید $\underline{s}^{(k)}$، باید یک طول گام مناسب برای حرکت در مطقه ممکن پیدا کنیم. یک راه استفاده از جستجوی راستا می باشد ، یعنی محاسبه $\lambda^{(k)}$ برای اینکه تابع هدف $f(\underline{x}^{(k)}+\lambda\underline{s}^{(k)})$ مینیمم شود. روش دیگر انتخاب λ به صورت سعی و خطا (یا تصادفی) می باشد ، به طوریکه

$$\begin{cases} f(\underline{x}^{(k)}+\lambda\underline{s}^{(k)})\leq f(\underline{x}^{(k)}) \\ g_i(\underline{x}^{(k)}+\lambda\underline{s}^{(k)})\leq 0 \qquad , j=1,2,..,m \end{cases} \tag{۱۶}$$

روش جستجوی راستا – برای این کار می توان از هر روش مینیمم سازی یک متغیره استفاده کرد ولی عیب آن این است که روش های مزبور ، به صورت نامقید عمل می کنند و ممکن است پس از حل مواجه با نقطه ای شویم که خارج از ناحیه ممکن قرار گرفته باشد. جهت مقابله با این حالت باید به نحوی λ تصحیح شود. یک راه پیشنهادی این است که طول گام نصف شود و دوباره با بکارگیری تولرانس قیود ، اعتبار سنجی قیود صورت بگیرد و در صورت نیاز نصف کردن طول گام تکرار شود.

به هر حال برای انواع روش های محاسبه طول گام یا حتی تسریع الگوریتم باید به منابع مقتضی رج.ع کرد [۳و۲]

مثال– مطلوبست محاسبه مینیمم تابع هدف زیر

$$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-4x_1-4x_2+8$$
$$S.T. \qquad g_1(x_1,x_2)=x_1+2x_2-4\leq 0$$

با نقطه شروع $\underline{x}^{(1)}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ و پارامترهای همگرایی $E_1=10^{-3}$ و $E_2=10^{-3}$ و $E_3=10^{-2}$

حل :

گام اول: محاسبه f و $\underline{g}$ در نقطه تکرار صفر:

$$@\quad \underline{x}^{(1)}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\quad :\qquad f(\underline{x}^{(1)})=8\quad ,\quad g_1(\underline{x}^{(1)})=-4$$

تکرار اول: گام دوم:

چون $g_1(\underline{x}^{(1)})<0 \;\rightarrow\; \underline{s}^{(1)}$ محاسبه :

$$\underline{s}^{(1)}=-\nabla f(\underline{x}^{(1)})=-\begin{bmatrix}\partial f/\partial x_1\\ \partial f/\partial x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}$$

با نرمالیزاسیون: $\underline{s}^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

؟گام پنجم :

$$f(\underline{x}^{(k)}+\lambda\underline{s}^{(k)})=\ldots=2\lambda^2-8\lambda+8$$

$$\rightarrow\quad \frac{df}{d\lambda}=0\quad @\quad \lambda^*=2$$

نقطه جدید : $\underline{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\;\rightarrow\; g_1(\underline{x}^{(2)})=2>0$

چون قید نقض شده است ، لذا باید آن را به نحوی تصحیح کنیم:

چون $g_1|_{\lambda=0}=-4$ و $g_1|_{\lambda=2}=2$ ، لذا با میان یابی ، مقدار λ را طوری به دست می آوریم که قید مربوطه صفر شود:

$$\tilde{\lambda}=4/3\;\rightarrow\; \underline{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}4/3\\4/3\end{bmatrix}$$

گام ششم: $f(\underline{x}^{(2)})=8/9$

گام هفتم:

$$\left|\frac{f(\underline{x}^{(1)})-f(\underline{x}^{(2)})}{f(\underline{x}^{(1)})}\right|=\frac{\left|8-8/9\right|}{8}=8/9>E_2$$

$$\left\|\underline{x}^{(1)}-\underline{x}^{(2)}\right\|=((0-4/3)^2+(0-4/3)^2)^{\frac{1}{2}}=1.887>E_2$$

تکرار دوم:

گام دوم : چون g_1 در $\underline{x}^{(2)}$ صفر شده ، لذا باید الگوریتم جهت یابی را دنبال کنیم.

گام سوم:

$$f=-\alpha\qquad Minimize$$

$$S.T. \qquad t_1 + 2t_2 + \alpha + y_1 = 3$$
$$-\frac{4}{3}t_1 - \frac{4}{3}t_2 + \alpha + y_2 = -\frac{8}{3}$$
$$t_1 + y_3 = 2$$
$$t_2 + y_4 = 2$$
$$t_1 \ge 0,\;\; t_2 \ge 0,\;\; \alpha \ge 0$$

پس از حل LP (همراه با فاز I و II ، چون مبدأ جزء ناحیه ممکن نیست) :

$$\alpha^* = 4/10 \quad , \; t_1^* = 2 \;\; , \; t_2^* = 3/10$$
$$y_1^* = y_2^* = y_3^* = 0 \;\; , \;\; y_4^* = 17/10$$
$$f^* = -4/10$$
$$\rightarrow \qquad \underline{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1^* - 1 \\ t_2^* - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ -0.7 \end{bmatrix}$$

گام چهارم: چون $\alpha^* > t_1$، به گام بعدی می رویم.

گام پنجم: با استفاده از $\underline{s}$ بدست آمده ، نقطه بعدی به صورت $\underline{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.333 \\ 1.333 \end{bmatrix}$ انتخاب می شود.

طول گام مناسب را از روش جستجوی راستا بدست می آوریم:

$$f(\underline{x}^{(2)} + \lambda \underline{s}^{(2)}) = \ldots = 1.49\lambda^2 - 0.4\lambda + 8.9$$
$$\rightarrow \;\; \lambda^* = 0.134 \;\; \rightarrow \;\; \underline{x}^{(3)} = \underline{x}^{(2)} + \lambda^* \underline{s}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.467 \\ 1.239 \end{bmatrix} \;\; \rightarrow$$

$g_1(\underline{x}^{(3)}) = -0.055 < 0 \;\; \rightarrow$ گام دوم

به همین ترتیب الگوریتم را ادامه می دهیم تا به جواب بهینه زیر برسیم:

$$\underline{x}^* = \begin{bmatrix} 1.6 \\ 1.2 \end{bmatrix}, \quad f_{\min} = 0.8$$

◄ روش تصویرسازی گرادیان روزن

در این روش از زیر مسأله LP برای پیدا کردن جهت ممکن مفید هنگامی که قید (قیود) فعال داریم استفادهنمی کند، بلکه از تصویر گرادیان در فضای قید (قیود) فعال بهره می گیرد [۵ و۴]. یک مینیمم سازی با یود نامساوی خطی به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$Minimize \quad f(\underline{x}) \tag{۲۰}$$

$$S.T. \quad g_j(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i - b_j \le 0 \quad , \quad j = 1,2,\ldots,m$$

فرض کنید ایندکس قیود فعال به صورت j_1 ، j_2 تا j_p باشد. گرادیان قیود فعال به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$\nabla g_j(\underline{x}) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \quad , \quad j = j_1, j_2, \ldots, j_p$$

اگر ستون های ماتریس N را به صورت تجمیع بردارهای گرادیان فوق در نظر بگیریم:

$$N_{n\times p} = \left[\nabla g_{j1}\ \nabla g_{j2} \quad \ldots \quad \nabla g_{jp}\right]$$

آن موقع مسأله محاسبه راستای ممکن مفید به صورت مسأله مینیمم سازی می تواند پیشنهاد گردد:

$$\underset{\underline{s}}{Minimize} \qquad \underline{s}^T \nabla f(\underline{x}) \tag{۲۱}$$

$$S.T. \quad N^T \underline{s} = 0 \tag{۲۲}$$

$$\underline{s}^T \underline{s} - 1 = 0 \tag{۲۳}$$

دقت شود شرط (۲۳) ، همان شرط نرمالزاسیون $\underline{s}$ می باشد.

برای حل مسأله بهگزینی فوق ، ابتدا لاگرانژین را تشکیل می دهیم.

$$L(\underline{s},\underline{\lambda},\beta) = \underline{s}^T \nabla f(\underline{x}) + \underline{\lambda}^T N^T \underline{s} + \beta(\underline{s}^T \underline{s} - 1) \tag{۲۴}$$

به طوریکه $\underline{\lambda} = \left[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \ldots \quad \lambda_p\right]^T$

بردار ضریب لاگرانژ برای قیود (۲۲) و β ضریب لاگرانژ قید (۲۳) می باشد. شرط لازم برای مسئله مینیمم سازی به شرح زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{s}} = \nabla f(x) + N\lambda + 2\beta \underline{s} = 0 \tag{۲۵}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{\lambda}} = N^T s = 0 \tag{۲۶}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \underline{s}^T \underline{s} - 1 = 0 \tag{۲۷}$$

از معادله (۲۵) ، بردار $\underline{s}$ به شکل زیر بدست می آید:

$$\underline{s} = -\frac{1}{2\beta}(\nabla f + N\underline{\lambda}) \tag{۲۸}$$

با جاگذاری رابطه بالا در معادله (۲۶) :

$$N^T \underline{s} = -\frac{1}{2\beta}(\underline{N}^T \underline{\nabla} f + N^T N \underline{\lambda}) = 0 \quad (۲۹)$$

با رعایت معادله (۲۷) ، یعنی $\underline{s}$ نرمالیزه باشد (در نتیجه $\beta \neq 0$) ، آنگاه از معادله (۲۹) داریم:

$$\underline{N}^T \underline{\nabla} f + N^T N \underline{\lambda} = 0 \quad (۳۰)$$

در نتیجه $\underline{\lambda}$ را می توان محاسبه نمود:

$$\lambda = -(N^T N)^{-1} N^T \underline{\nabla} f \quad (۳۱)$$

و لذا با جاگذاری در معادله (۲۸) ،جهت ممکن مفید به شکل زیر در خواهد آمد:

$$\underline{s} = -\frac{1}{2\beta}(I - N(N^T N)^{-1} N^T)\underline{\nabla} f = -\frac{1}{2\beta} p\nabla f \quad (۳۲)$$

به طوریکه

$$p = I - N(N^T N)^{-1} N^T \quad (۳۳)$$

ماتریس p معروف به ماتریس تصویر (*Projection Matrix*) می باشد. اگر از فاکتور یا ضریب مقیاس 2β بگذریم ، آنگاه تفسیر $\underline{s}$ به صورت زیر درمی آید:

ماتریس تبدیل یا تصویر p ، وظیفه اش تصویر کردن بردار قرینه گرادیان تابع هدف (یعنی $-\underline{\nabla} f$) روی محل تقاطع و مکان فراصفحه های (*Hyperspaces*) عمود بر بردارهای ∇g_i (به طوریکه $j = j_1, j_2, ..., j_p$) می باشد.

دقت شود فرض کرده ایم که قیود فعال مستقل خطی اند و لذا $N^T N$ غیر تکین است و می توان از آن معکوس گرفت.

این نکته نیر قابل ذکر است که بردار $\underline{s}$ را می توان بدون محاسبه β نرمالیزه کرد:

$$\underline{s} = -\frac{p\underline{\nabla} f}{\left\| p\underline{\nabla} f \right\|} \quad (۳۴)$$

و اگر در تکرار kام هستیم:

$$\underline{s}^{(k)} = -\frac{p^{(k)} \underline{\nabla} f(\underline{x}^{(k)})}{\left\| p^{(k)} \underline{\nabla} f(\underline{x}^{(k)}) \right\|} \quad (۳۵)$$

اگر $\underline{s}^{(k)} \neq 0$ باشد، می توان نقطه بعدی (بعذ از محاسبه λ^*) را از فرمول زیر بدست آورد:

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} + \lambda^{(k)} \underline{s}^{(k)} \quad (۳۶)$$

توجه : نماد λ برای طول گام بهینه با بردار $\underline{\lambda}$ (ضرایب لاگرانژ) اشتباه نشود.

اگر $\underline{s}^{(k)} \approx 0$ باشد از معادله (۳۱) و (۳۲) داریم:

$$-\nabla f(\underline{x}^{(k)}) = N\underline{\lambda} = \lambda_1 \underline{\nabla} g_{j1} + \lambda_2 \underline{\nabla} g_{j2} + ... + \lambda_{jp} \underline{\nabla} g_{jp} \quad (۳۷)$$

به طوریکه

$$\underline{\lambda} = -(N^T N)^{-1} N^T \underline{\nabla} f(\underline{x}^{(k)}) \qquad (۳۸)$$

در این حالت ، همانطور که قبلاً نیز ذکر شد (فصل دوم ، ریاضی پشتیبان) ، در این حالت ، یعنی قرینه گرادیان ترکیب خطی از قیود فعال می باشد ، نشانه ارضاء شرط KT می باشد ، لذا به انتهای مسئله رسیده ایم و نقطه اپتیمم محاسبه شده است.

معذلک ، اگر برخی λ_j ها منفی بودند ولی $\underline{s}^{(k)} \approx 0$ رخ داد ، معادله (۳۷) بیانگر این است که برخی از ؟ قیود ∇g_j یک زاویه منفرجه با $-\underline{\nabla} f$ در نقطه $\underline{x}^{(k)}$ می سازند. این بدین معنی است که قیود g_j که λ_j متناظر آن منفی شده ، به صورت فعال شده ولی نباید در محاسبه $\underline{s}$ به عنوان بردار ممکن مفید شرکت داشته باشد (باشند). این نکته در شکل ۱ نشان داده شده است. در عمل برای محاسبه $\underline{s}$ ، از همه قیود با λ_j منفی نمی گذریم و فقط یکی از آنها را حذف می کنیم. معمولاً آن قیدی را حذف می کنیم که دارای منفی ترین λ_j باشد ، یعنی:

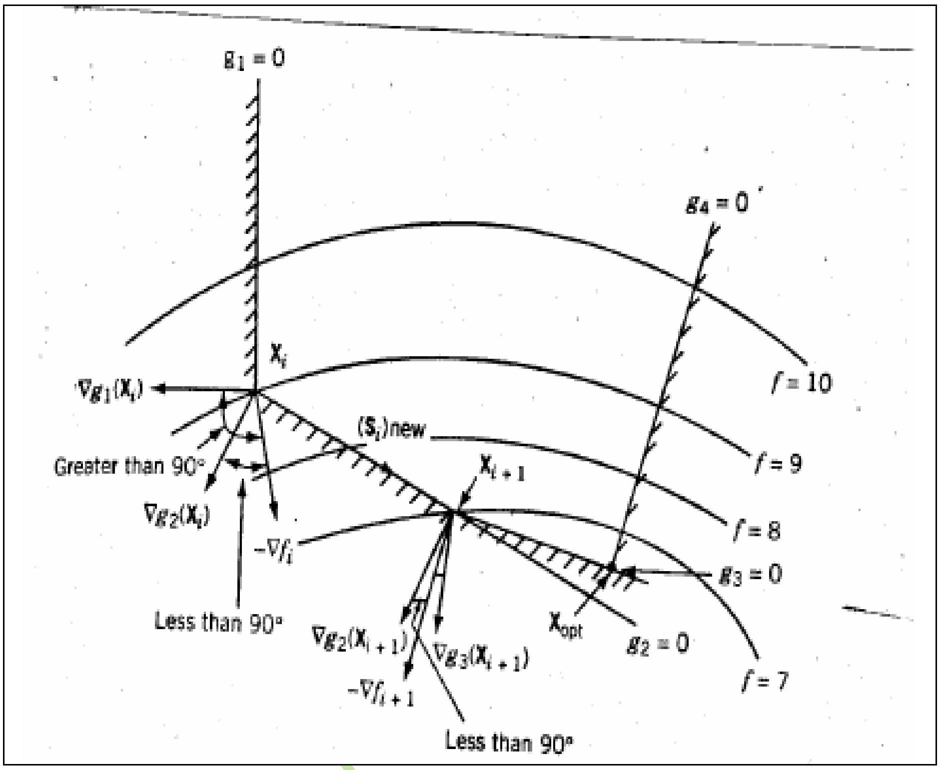
$$N_{New} = \left[\nabla g_{j1} \quad \nabla g_{j2} \quad \dots \quad \nabla g_{jq-1} \quad \nabla g_{jq+1} \quad \underline{\nabla g}_{jq+2} \quad \dots \quad \underline{\nabla g}_{jp}\right] \qquad (۳۹)$$

ماتریس تصویر نیز باید متناسب با این نکته (حذف یک ستون از N) محاسبه شود.

$$p_{New} = (I - N_{New}(N_{New}{}^T N_{New})^{-1} N_{New}{}^T) \qquad (۴۰)$$

و همچنین $\underline{s}^{(k)}$

$$\underline{s}_{New}{}^{(k)} = -\frac{p_{New}\underline{\nabla} f(\underline{x}^{(k)})}{\left\| p_{New}\underline{\nabla} f(\underline{x}^{(k)})\right\|} \qquad (۴۱)$$



شکل ۱. حالتی که $\underline{s}^{(k)} \approx 0$ ولی برخی از λ_jها منفی شده اند.

روش محاسبه طول گام بهینه – می توان به طور سنتی ، طول گام بهینه را از روش (نامقید) جستجوی راستا بدست آورد ولی چون ریسک افتادن نقطه بعدی در خارج از ناحیه ممکن می باشد ، روش زیر برای حالتی که قیود خطی هستند پیشنهاد شده است:

از آنجائیکه $g_j(\underline{x})$ به فرم خطی هستند ، لذا جستجوی راستای آن به شکل زیر درمی آید:

$$g_j(\lambda) = g_j(\underline{x}^{(k)} + \lambda \underline{s}^{(k)}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x_i + \lambda s_i) - b_j$$
$$= g_j(\underline{x}^{(k)}) + \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, s_i \qquad , j = 1,2,\ldots,m \tag{۴۲}$$

همانطور که معلومست $g_j(\lambda)$ نیز تابعی خطی از λ است. بنابراین اگر یک قید خاص (مثل g_k) در نقطه $\underline{x}^{(k)}$ غیرفعال باشد ، آن گاه می توان با یک طول گام λ_k آن را فعال کرد:

$$g_k(\lambda_k) = g_k(\underline{x}^{(k)}) + \lambda_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik} s_i = 0 \tag{۴۳}$$

در نتیجه λ_k (فاصله تا مرز) به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\lambda_k = -\frac{g_k(\underline{x}^{(k)})}{\sum_{i=1}^{n} a_{ik} s_i} \tag{۴۴}$$

چون این قید فعال نیست (یعنی $g_k < 0$) ، علامت λ_k هم علامت $\sum_{i=1}^{n} a_{ik} s_i$ می باشد.

از رابطه بالا داریم:

$$\frac{dg_k(\underline{x}^{(k)})}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} s_i \qquad (۴۵)$$

یعنی علامت تغییر g_k به λ ، نشان دهنده علامت λ خواهد بود. پس اگر تغییر g_k نسبت به λ مثبت بود ، آنگاه هر طول λ بزرگتر از λ_k اختیار کنیم ، داریم قید مربوطه را نقض می کنیم. لذا ، باید λ_M را به صورت زیر انتخاب کنیم:

$$\lambda_M = \min_{\lambda_k > 0} \ (\lambda_k)$$

باید دقت کرد که k از میان قیود غیرفعال انتخاب شود ، یعنی k هر عدد صحیحی از 1 تا m می تواند باشد بجز ایندکس های j_1 ، j_2 تا j_p که بیانگر قیود فعال هستند.

در برخی حالات ممکن است $f(\lambda)$ ، مقدار مینیمم خود را در راستای $\underline{s}^{(k)}$ ، بین $\lambda = 0$ و $\lambda = \lambda_m$ پیدا کند.

یک همچنین حالتی را می توان با محاسبه عبارت $\frac{df}{d\lambda}$ چک کرد:

$$\frac{df}{d\lambda} = \underline{s}^{(k)T} \underline{\nabla} f(\lambda) \quad @ \quad \lambda = \lambda_m$$

اگر علامت $\frac{df}{d\lambda}$ در بالا مثبت باشد ، بدین مفهومست که مینیمم مقدار λ (یعنی $\lambda^{(k)*}$) بین صفر و λ_m قرار گرفته است. در این حالت مقدار λ^* را می توان از میان یابی بدست آورد.

خلاصه الگوریتم روزن- شرح کامل الگوریتم روزن را می توان به شکل زیر خلاصه کرد:

گام اول: یک نقطه شروع ممکن مثل $\underline{x}^{(1)}$ انتخاب کنید. (یعنی قیود نقض نشوند: $g_j(\underline{x}^{(1)}) \le 0$)

گام دوم: کنتور تکرار را معادل واحد قرار دهید.

گام سوم: اگر این نقطه ($\underline{x}^{(k)}$) ، یک نقطه ممکن است ، جهت ممکن مفید را به صورت قرینه گرادیان در نظر گرفته و آن را نرمالیزه کنید:

$$\underline{s}^{(k)} = -\frac{\underline{\nabla} f(\underline{x}^{(k)})}{\left\| \underline{\nabla} f(\underline{x}^{(k)}) \right\|}$$

و سپس به گام پنجم بروید. اگر برای برخی قیود ، $j = j_1, j_2, ..., j_p$ ، $g_j(\underline{x}^{(k)}) = 0$ ، آنگاه به گام چهارم بروید.

گام چهارم: ماتریس تصویر p را بسازید:

$$p(k) = I - N_p (N_p{}^T N_p)^{-1} N_p{}^T$$

به طوریکه :

$$N_p = \left[\nabla g_{j1}(\underline{x}^{(k)}) \quad \nabla g_{j2}(\underline{x}^{(k)}) \quad \dots \quad \nabla g_{jp}(\underline{x}^{(k)})\right]$$

و سپس $\underline{s}^{(k)}$ نرمالیزه را محاسبه کنید:

$$\underline{s}^{(k)} = -\frac{p^{(k)}\underline{\nabla} f(\underline{x}^{(k)})}{\left\| p^{(k)}\underline{\nabla} f(\underline{x}^{(k)}) \right\|}$$

گام پنجم: تست کنید آیا $\underline{s}^{(k)}$ نزدیک به بردار $\underline{0}$ است یا خیر. اگر $\underline{s}^{(k)} \neq \underline{0}$ ، به مرحله ششم بروید ، در غیر این صورت ابتدا بردار ضریب لاگرانژدر $\underline{x}^{(k)}$ را بیابید:

$$\underline{\lambda} = -(N_p^T N_p)^{-1} N_p^T \underline{\nabla} f(\underline{x}^{(k)})$$

و چک کنید همه عناصر $\underline{\lambda}$ غیر منفی باشند ، در آن صورت $\underline{x}^* = \underline{x}^{(k)}$ و عملیات را خاتمه دهید. اگر برخی از عناصر $\underline{\lambda}$ ، منفی بودند ، عنصر λ_q که منفی ترین است را پیدا کرده و از ماتریس N بیرون بکشید:

$$N_p = \left[\underline{\nabla g}_{j1} \quad \underline{\nabla g}_{j2} \quad \dots \quad \underline{\nabla g}_{jq-1} \quad \underline{\nabla g}_{jq+1} \quad \underline{\nabla g}_{jq+2} \quad \dots \quad \underline{\nabla g}_{jp}\right]$$

سپس به مرحله سوم برگردید.

گام ششم: اگر $\underline{s}^{(k)} \neq \underline{0}$ ، ماکزیمم طول گام λ_M که قابل قبول است را محاسبه کنید. منظور از قابل قبول اینست که هیچ قیدی نقض نشود ، یعنی $\lambda_M = \min(\lambda_k)$ و k هر عدد صحیح (ایندکس) بین 1 تا m ، غیر از j_1 ، j_2 تا j_p باشد. همچنین مقدار حساسیت تابع هدف به λ را در λ_M محاسبه کنید:

$$\frac{df}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=\lambda_M} = \underline{s}^{(k)T} \underline{\nabla} f(\underline{x}^{(k)} + \lambda_M \underline{s}^{(k)})$$

اگر حساسیت منفی بود یا صفر بود ، آنگاه $\lambda^{(k)} = \lambda_m$ را انتخاب کنید. ولی اگر مثبت بود ، مقدار $\lambda^{(k)*}$ را از میان یابی یا هر روش مینیمم سازی یک متغیره ، پیدا کنید.

گام هفتم: نقطه جدید را محاسبه کنید:

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} + \lambda^{(k)} \underline{s}^{(k)}$$

اگر $\lambda^{(k)} = \lambda_m$ یا $\lambda_M \le \lambda^{(k)*}$ باشد ، یعنی چند قید جدید (یعنی در $\underline{x}^{(k+1)}$) فعال شده اند و باید ماتریس جدید N_p را محاسبه کرد. کنتور تکرار اصلی را یکی اضافه کرده و به گام چهارم برگردید.

اگر $\lambda^{(k)} = \lambda^{(k)*}$ و $\lambda^{(k)*} < \lambda_M$ باشد ، قید جدیدی فعال شده است و ماتریس N_p در $\underline{x}^{(k+1)}$ دست نخورده باقی میماند. آنگاه کنتور تکرار اصلی را یکی اضافه کرده و به گام سوم برگردید.

مثال: مطلوبست حل مسئله بهگزینی زیر: (شروع را $[1 \quad 1]^T$ فرض کنید)

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 \qquad Minimize$$
$$g_1(x_1, x_2) = x_1 + 4x_2 - 5 \le 0 \qquad S.T.$$

$$g_2(x_1,x_2) = 2x_1 + 3x_2 - 6 \le 0$$
$$g_3(x_1,x_2) = -x_1 \le 0$$
$$g_4(x_1,x_2) = -x_2 \le 0$$

حل: تکرار اول:

گام سوم: $g_j(\underline{x}^{(1)}) = 0, \quad j = 1 \Rightarrow p = 1. \quad j_1 = 1$

گام چهارم:

$$N^{(1)} = \left[\nabla g_1(\underline{x}^{(1)})\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \underline{s}^{(1)} = -\dfrac{1}{17} \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8/17 \\ 2/17 \end{bmatrix} \\ \underline{\nabla} f(\underline{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2 \\ 2x_2 - 4 \end{bmatrix}_{\underline{x}^{(1)}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \end{cases} \rightarrow s^{(1)}_{normalized} = \frac{\begin{bmatrix} -8/17 & 2/17 \end{bmatrix}^T}{(8/17)^2 + (2/17)^2} = \begin{bmatrix} -0.9701 \\ 0.2425 \end{bmatrix}$$

گام پنجم: چون $\underline{s}^{(1)} \ne \underline{0}$ به گام ششم می رویم.

گام ششم: محاسبه λ_M:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underline{x}^{(1)} + \lambda \underline{s}$$
$$= \begin{bmatrix} 1.0 - 0.9701\lambda \\ 1.0 + 0.2425\lambda \end{bmatrix}$$

¤ برای $j = 2$

$$g_2(\underline{x}) = (2.0 - 1.9402\lambda) + (3.0 + 0.7275\lambda) - 0.6 = 0 \qquad @\lambda = \lambda_2 = -0.8245$$

¤ برای $j = 3$

$$g_3(\underline{x}) = -(1.0 - 1.9401\lambda) = 0 \qquad @\lambda = \lambda_3 = 1.03$$

¤ برای $j = 4$

$$g_4(\underline{x}) = -(1.0 - 0.2425\lambda) = 0 \qquad @\lambda = \lambda_4 = -4.124$$

با مقایسه:

$$\lambda_M = \lambda_3 = 1.03$$

محاسبه حساسیت:

$$f(\underline{x}) = f(\lambda) = \ldots = -0.9998\lambda^2 - 0.4850\lambda - 4 \quad \rightarrow \quad \frac{df}{d\lambda} = 1.9996\lambda - 0.485$$

$$\rightarrow \quad \frac{df}{d\lambda}\Big|_{\lambda_M} = 1.996(1.03) - 0.4850 = 1.5746$$

از آنجائیکه $\left.\frac{df}{d\lambda}\right|_{\lambda_M} > 0$ ، طول گام بهینه λ_1^* با $\frac{df}{d\lambda} = 0$ بدست می آید:

$$\lambda_1 = \lambda_1^* = \frac{0.4850}{1.9996} = 0.2425$$

گام هفتم: نقطه جدید $\underline{x}^{(2)}$ را حساب می کنیم (چون راستا و طول گام معلوم شده است)

$$\underline{x}^{(2)} = \underline{x}^{(1)} + \lambda_1 \underline{s}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} + 0.2425 \begin{bmatrix} -0.701 \\ 0.2425 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7647 \\ 1.0588 \end{bmatrix}$$

چون $\lambda_1 = \lambda_1^*$ و $\lambda_1^* < \lambda_M$ ، هیچ قید جدیدی فعال نشده است (در نقطه $\underline{x}^{(2)}$) و در نتیجه ماتریس $N^{(1)}$ دست نخورده باقی می ماند.

گام سوم: چون $g_1(\underline{x}^{(2)}) = 0$ ، قرار می دهیم: $p = 1$ و $j_1 = 1$ و به گام چهارم می رویم.

گام چهارم:

$$N^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$P^{(2)} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\nabla} f(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2 \\ 2x_2 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4706 \\ -1.8824 \end{bmatrix}$$

$$\underline{s}^{(2)} = -P^{(2)} \underline{\nabla} f \Big|_{\underline{x}^{(2)}} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4706 \\ 1.8824 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

گام پنجم: چون $\underline{s}^{(2)} = \underline{0}$ ،

$$\underline{\lambda} = -(N^{(1)^T} N^{(1)})^{-1} N^{(1)^T} \underline{\nabla} f(\underline{x}^{(2)})$$

$$= -\frac{1}{17} [1 \quad 4] \begin{bmatrix} -0.4706 \\ -1.8824 \end{bmatrix} = 0.4707 > 0$$

مقدار غیر منفی λ نشان دهنده این است که به نقطه اپتیمم رسیده ایم و لذا:

$$\underline{x}^{(*)} = \underline{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.7647 \\ 1.0588 \end{bmatrix} \quad , \quad f^* = -4.059$$

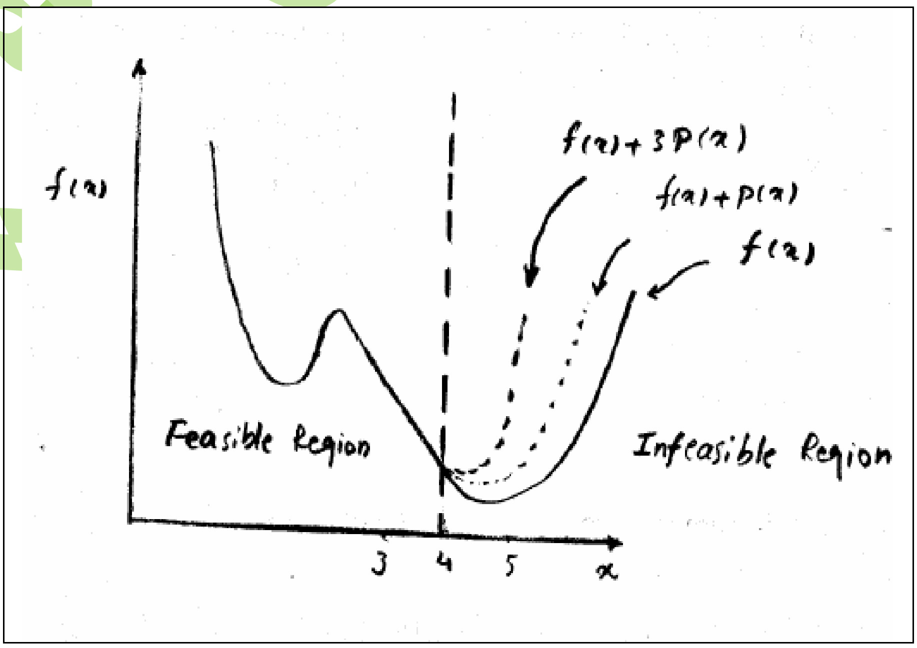
◄ روش های جریمه ای (خارجی) و تمانعی (داخلی)

ایده اساسی این فامیلی از روش ها بر این نکته استوار است که در نقاط و حدس های میانی مسئله به طور مصنوعی کار می کنیم که هرچه در منطقه غیرمجاز (نقض قیود) جستجو کنیم ، برای الگوریتم گران تر تمام شود.
به عبارتی اگر یک عبارت اضافی و پارامتریک به تابع هدف (مسأله مینیمم سازی) اضافه کنیم ، آنگاه هرچه عمیق تر در منطقه غیر مجاز یا غیرممکن حرکت کنیم ، باید تابع هدف بزرگتر شود (جریمه شود). با تکرار جستجو و یا تغییر پارامتر، عملاً توانسته ایم به طور متوالی یک مسأله نامقید را حل کنیم ، انگار متناظر مسأله مقید اصلی را حل کرده ایم.به همین دلیل این روش ها موسوم به روش های – *successive constrained minimization technique* *(SUMT)* نیز هستند.

برای ورود به مطلب یک تابع هدف یک متغیره ، مطابق شکل در نظر بگیرید ، قید نامساوی مسأله نیز به صورت $x \le 4$ می باشد. مینیمم نامقید مسأله در $x \cong 4.8$ رخ می دهد که عملاً در منطقه غیر مجاز می باشد. یک تابع جریمه به شکل زیر تعریف کنید:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & x < 4 \\ (x-4)^2 & x > 4 \end{cases}$$

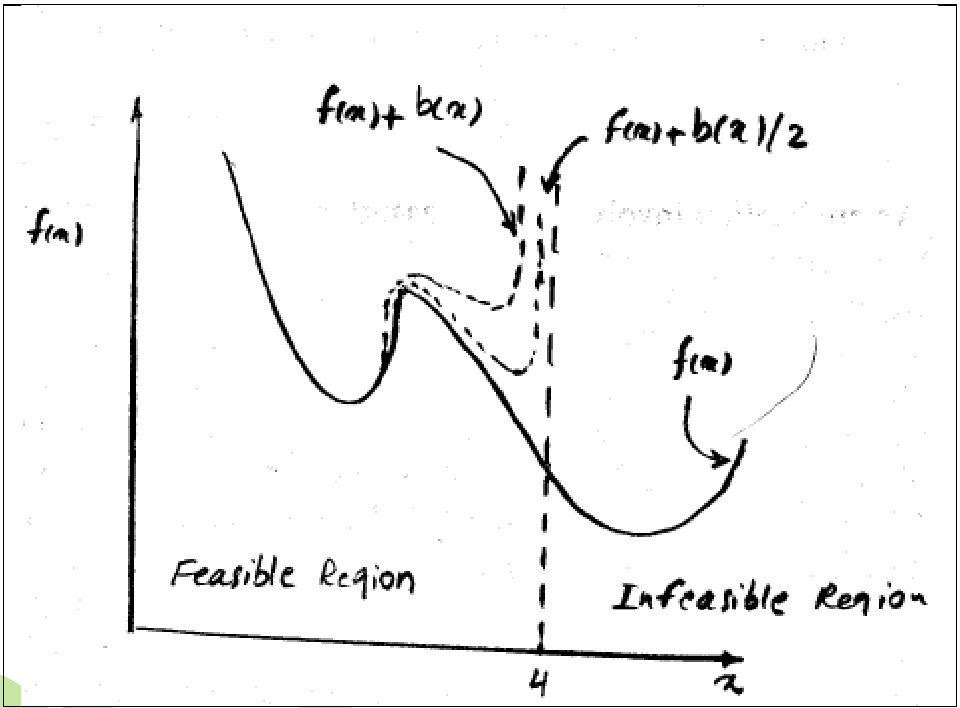
دقت کنید که مینیمم $f(x) + p(x)$ ، همچنان در منطقه غیرمجاز می باشد ولی به مینیمم اصلی مسأله ($x^* = 4$)، نزدیکتر است ، زیرا نقطه اپتیمم نامقید برای این تابع ، $x \cong 4.6$ است. حال اگر همین بحث را برای $f(x) + 3p(x)$ نیز تکرار کنیم ، می بینیم که مقدار جریمه به طور پارامتریک (ضریب 3) بیشتر شده است ، به طوریکه نقطه اپتیمم نامقید به نقطه اپتیمم مقید نزدیک تر شده است ($x^* \cong 4.3$).



همین ایده را می توان ، وقتی در محدوده مجاز هستیم نیز تکرار کنیم که موسوم به روشهای تمانعی یا روش های جریمه ای داخلی هستند. استقبال از این روش ها در علوم مهندسی بیشتر از روش قبلی است ، چرا که نقض قیود از نظر فیزیکی و شبیه سازی منجر به مشکلات محاسباتی می شود. برای جریمه کردن تابع هدف ، متشابهاً باید یک تابع مصنوعی مثل $b(x)$ به صورت پارامتریک به تابع هدف اصلی اضافه کنیم:

$$b(x) = -\frac{1}{(x-4)} \quad , \quad x \le 4$$

(به شکل رجوع کنید)



در حالت کلی و حضور فقط قیود نامساوی، مسأله اگر با این شکل باشد ،

$$Minimize \quad f(\underline{x}) \tag{۱}$$
$$S.T. \quad g_j(\underline{x}) \le 0 \quad , \quad j = 1,2,\dots,m$$

آنگاه با تبدیل مسأله به حالت نامقید (اضافه کردن تابع جریمه) می شود:

$$\Phi_k = \Phi(\underline{x}, r_k) = f(\underline{x}) + r_k \sum_{j=1}^{m} G_j\left[g_j(\underline{x})\right] \tag{۲}$$

به طوریکه G_j یک تابع از قید g_j و r_k نیز یک ثابت مثبت موسوم به پارامتر جریمه می باشد. عبارت دوم که موسوم به جمله جریمه می باشد ، به طور مفصل بحث خواهد شد ولی آنچه که حضور آن را مهم جلوه می کند ، تکرار مسأله مینیمم سازی نامقید برای پارامترهای مختلف r_k به امید همگرایی مسأله می باشد.

فرمولاسیون تابع جریمه شامل فقط جملات و قیود نامساوی را می توان در دو قالب کلی بیان کرد: داخلی و خارجی.

در فرمولاسیون داخلی ، توابع مرسوم برای G_j ، دوتا هستند:

$$G_j = -\frac{1}{g_j(\underline{x})} \tag{۳}$$

$$G_j = \log\left[-g_j(\underline{x})\right] \tag{۴}$$

و در فرمولاسیون خارجی ، توابع متداول برای G_j ، نیز دوتا هستند:

$$G_j = \max\left[0, g_j(\underline{x})\right] \tag{۵}$$

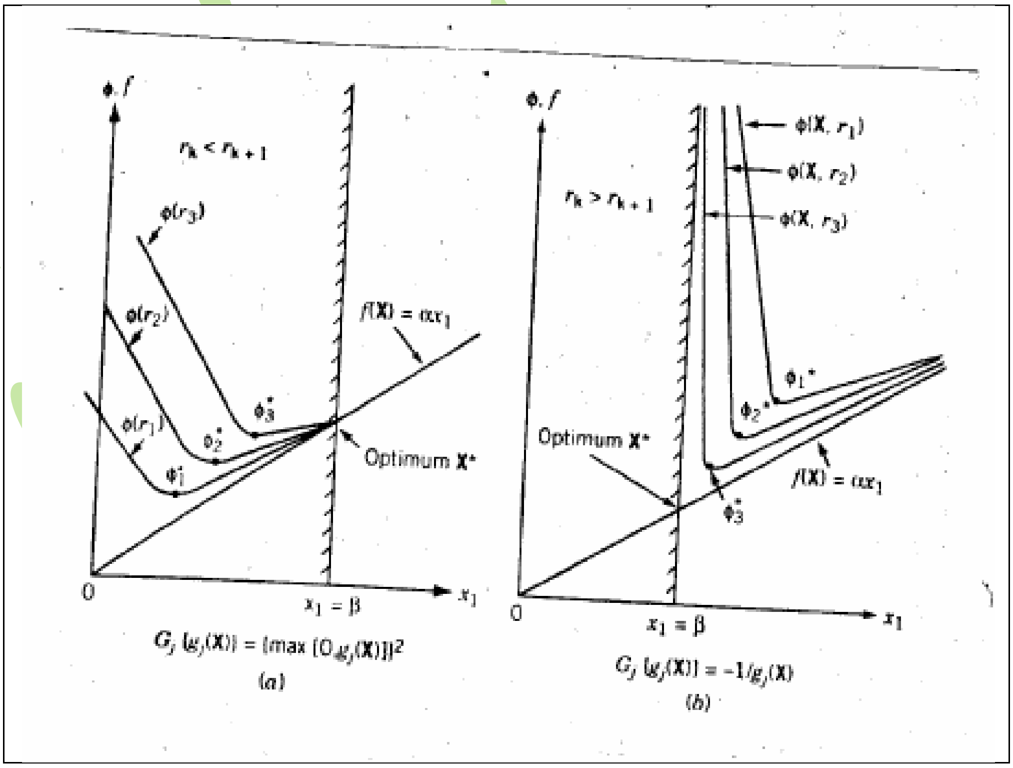
$$G_j = \{\max[0, g_j(\underline{x})]\}^2 \qquad (۶)$$

نحوه همگرایی مینیمم Φ_k (مسأله نامقید) برای انواع r_k و فرمولاسیون های داخلی و خارجی در شکل نشان داده شده اند. در شکل مزبور ، مسأله بسیار ساده زیر در نظر گرفته شده است:

$$Minimize \quad f(\underline{x}) = \alpha x_1 \qquad (۷)$$

$$S.T. \quad g_1(\underline{x}) = \beta - x_1 \le 0$$

همانطور که از شکل معلوم است ، مسأله نامقید $\Phi(\underline{x}, r_k)$ به سمت نقطه اپتیمم $\underline{x}^*$ متوالیاً حرکت می کند (همگرا می شود) اگر r_k برای فرمولاسیون خارجی ، مرتباً زیاد شود و اگر r_k برای فرمولاسیون داخلی مرتباً کم شود.



روشهای پنالتی. (a) روش خارجی ، (b) روش داخلی

◄ روش تابع جریمه داخلی (روش های تمانعی)

تابع Φ معروف که توسط *Carroll* معرفی شده است به شکل زیر می باشد :

$$\Phi_k = \Phi(\underline{x}, r_k) = f(\underline{x}) - r_k \sum_{j=1}^{m} G_j[g_j(\underline{x})] \qquad (۸)$$

همانطور که معلوم است مقدار Φ همیشه بزرگتر از $f(\underline{x})$ است ، چرا که $g_j(\underline{x})$ همیشه مقدار منفی دارد و در حالت بحرانی فعال ، تابع جریمه مثل مانع عمل می کند و مقدار Φ را بسیار بزرگ (∞) می کند. لذا ، این نوع روش

ها همیشه تابع Φ و f را از قیود دور نگه می دارند. باید دقت کرد که تابع جریمه در (۸) هیچ وقت در نقطهء غیرممکن تعریف نمی شود ، لذا موقع شروع نیز باید مواظب بود تا از نقطه غیرممکن شروع نکنیم و اصلاً به همین دلیل این نوع روش ها را" داخلی" نامگذاری کرده اند. الگوریتم تکرار این روش ها به طور خلاصه عبارتند از:

گام اول– از یک نقطه ممکن مثل $\underline{x}^{(1)}$ شروع کنید. دقت کنید که قیود بصورت اکیداً کوچکتر ارضاء شده باشند. یک مقدار $r^{(1)} > 0$ انتخاب کنید و کنتور تکرار را مساوی ۱ مقداردهی کنید.

گام دوم– تابع $\Phi(\underline{x}, r_k)$ را مینیمم کنید و مقدار $\underline{x}^{(k)}$ را بیابید.

گام سوم– محک اختتام را چک کنید ، در صورت عدم برقراری ، الگوریتم را ادامه دهید.

گام چهارم– مقدار بعدی پارامتر جریمه را پیدا کنید (محاسبه کنید):

$$r^{(k+1)} = cr^{(k)}$$

به طوریکه $c < 1$ می باشد.

گام پنجم– کنتور تکرار را یکی اضافه کرده و نقطه شروع بعدی را $\underline{x}^{*(k)}$ قرار دهید.

نکات عدیده ای در پیاده سازی الگوریتم وجود دارد که عمدتاً سلیقه ای یا ابتکاری می باشند ، بطور مثال شروع الگوریتم ممکن است به این سادگی نباشد ، یعنی نقطه ای که همه قیود را ارضاء کند (مثلاً بخاطر کثرت و غیرخطی بودن قیود) به سادگی پیدا نشود. یک راه حل تولید نقطه شروع رندوم است و یک راه حل پیشنهادی دیگر ، زیربهینه سازی مسأله قیودی است که بیشترین نقض را دارند. مقدار اولیه پارامتر جریمه نیز به طور تجربی تعیین می شود ولی یک فرمول عمومی به شرح زیر است:

$$r_1 \approx 0.1 \quad to \quad 1.0 \times \frac{f(\underline{x}^{(1)})}{-\sum_{j=1}^{m} 1 / g_j(\underline{x}^{(1)})} \qquad (۹)$$

مقدار پارامتر انقباض c نیز به طور تجربی مقدارهای 0.1 ، 0.2 و 0.5 پیشنهاد شده اند.

محک اختتام الگوریتم نیز نوعاً مثل سایر الگوریتم های عددی ، چک کردن اختلاف دو حدس متوالی می باشد. مضافاً اینکه نرمالیزاسیون قیود نیز به سرعت همگرایی و مقیاس دهی مسأله کمک شایانی می کند.

مثال: مطلوبست حل مسئله بهگزینی زیر:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{3}(x_1+1)^3 + x_2 \qquad Minimize$$

$$g_1(x_1, x_2) = -x_1 + 1 \le 0 \qquad S.T.$$

$$g_2(x_1, x_2) = -x_2 \le 0$$

حل: در این مثال برای اهمیت و نمایش نقش و عملکرد روش های تمانعی ، از مینیمم سازی تحلیلی(مبنی بر قضیه استفاده می کنیم ، لذا نیازی به نقطه ممکن اولیه نمی باشد (به طور تحلیلی بر حسب r حل می کنیم):

$$\Phi(\underline{x}, r) = \frac{1}{3}(x_1+1)^3 + x_2 - r\left(\frac{1}{-x_1+1} - \frac{1}{x_2}\right)$$

شرط لازم اکسترمم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} = (x_1+1)^2 - \dfrac{r}{(1-x_1)^2} = 0 \quad or \quad ({x_1}^2-1)^2 = r \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 1 - \dfrac{r}{{x_2}^2} = 0 \quad or \quad {x_2}^2 = r \end{cases}$$

نقاط اپتیمم بطور پارامتری بر حسب r به دست می آیند:

$$x_1^*(r) = (r^{\frac{1}{2}}+1)^{\frac{1}{2}}, \quad x_2^*(r) = r^{\frac{1}{2}}$$

$$\Phi_{\min}(r) = \frac{1}{3}\left[(\sqrt{r}+1)^{\frac{1}{2}}\right]^3 + 2\sqrt{r} - \frac{1}{(\frac{1}{r}) - (\frac{1}{r^{3/2}} + \frac{1}{r^2})^{\frac{1}{2}}}$$

$$f_{\min} = \lim_{r\to 0} \Phi_{\min}(r)$$

$$x_1^* = \lim_{r\to 0} x_1^*(r)$$

$$x_2^* = \lim_{r\to 0} x_2^*(r)$$

نحوه تغییرات مقادیر بالا در جدول زیر نشان داده شده است:

	r	$x_1^*(r)$	$x_2^*(r)$	$\Phi_{\min}(r)$	$f(r)$
	1000	5.71164	31.62278	376.2636	132.4003
	10	2.04017	3.16228	25.3048	12.5286
	0.1	1.14727	0.31623	4.6117	3.6164
	0.01	1.04881	0.10000	3.2716	2.9667
	10^{-6}	1.00050	0.00100	2.6727	2.6697
Exact sol.	(0)	1	0	$8/3$	$8/3$

مثال: مطلوبست حل مسئله بهگزینی زیر:

$$f(x_1,x_2) = {x_1}^3 - 6{x_1}^2 + 11x_1 + x_3 \qquad Minimize$$

$$\begin{aligned} {x_1}^2 + {x_2}^2 - {x_3}^2 &\le 0 \qquad S.T. \\ 4 - {x_1}^2 - {x_2}^2 - {x_3}^2 &\le 0 \\ x_3 - 5 &\le 0 \\ -x_i &\le 0 \quad ,i = 1,2,3 \end{aligned}$$

برای حل از روش توابع جریمه داخلی استفاده کنید ، به طوریکه مسأله نامقید را با روش DFP و جستجوی راستا را با میانیابی درجه سوم انجام دهید. اطلاعات اولیه شامل مقادیر زیر است:

$$\underline{x}^{(1)} = [0.1 \quad 0.1 \quad 3.0]^T$$
$$r^{(1)} = 1.0$$

حل: با استفاده از روش های ذکر شده ، مسأله حل شد و مقدار بهینه $\underline{x}^* = [0 \quad \sqrt{2} \quad \sqrt{2}]^T$ و $f^* = \sqrt{2}$ بدست آمد. جزئیات و مانیتورینگ حل در جدول زیر آمده است.

جدول ٤-٧ صفحه ٤٩٧ کتاب Rao(نگارش سوم)

◄ روش های تمانعی برای حالات قیود تساوی و نامساوی

برای مسائل بهگزینی مقید وقتی یود توأمان شامل نامساوی و مساوی باشد:

$$\begin{aligned} &Minimize \quad f(\underline{x}) \\ &g_j(\underline{x}) \le 0 \qquad , j = 1,2,\ldots,m \\ &h_j(\underline{x}) = 0 \qquad , j = 1,2,\ldots,p \end{aligned}$$

مجدداً با همان ایده جریمه می توان مسئله مقید را به نامقید تبدیل کرد ، نظیر تبدیل زیر:

$$\Phi_k = \Phi(\underline{x}, r_k) = f(\underline{x}) + r_k \sum_{j=1}^{m} G_j\left[g_j(\underline{x})\right] + H(r_k) \sum_{j=1}^{p} h_j^{\,2}(\underline{x})$$

به طوریکه G_j تابعی از قیود g_j می باشند به شرطیکه وقتی به سمت مرز حرکت کنیم مقدار آن به بی نهایت میل کند و $H(r_k)$ نیز تابعی از پارامتر جریمه (r_k) می باشد به شرطیکه وقتی r به سمت صفر میل کند ، آنگاه تابع مزبور حد بی نهایت به خود بگیرد. انگیزه درج جمله سوم این می باشد که $H(r_k) \to \infty$ ، آنگاه جمله $\sum h_j^{\,2}$ صفر شود (یعنی همه قیود مساوی ارضاء شوند). یک فرم پیشنهادی G_j و $H(r_k)$ به این شکل است [۷و۸]:

$$\Phi_k = \Phi(\underline{x}, r_k) = f(\underline{x}) + r_k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(\underline{x})} + \frac{1}{\sqrt{r_k}} \sum_{j=1}^{p} h_j^{\,2}(\underline{x})$$

◄ روش های جریمه ای خارجی

در روش توابع جریمه خارجی ، مسأله نامید تبدیلی به فرم کلی زیر می باشد:

$$\Phi(\underline{x}, r^{(k)}) = f(\underline{x}) + r^{(k)} \sum_{j=1}^{m} \langle g_j(\underline{x}) \rangle^{g} \qquad (1)$$

به طوریکه $r^{(k)}$ پارامتر مثبت جریمه ، توان q ، یک ثابت غیرمنفی و تابع براکت به فرم زیر تعریف می شود:

$$\langle g_j(\underline{x}) \rangle = \max \langle g_j(\underline{x}), 0 \rangle = \begin{cases} g_j(\underline{x}) & , g_j(\underline{x}) > 0 \\ 0 & , g_j(\underline{x}) \le 0 \end{cases} \qquad (2)$$

($g_j(\underline{x}) > 0$ نقض قید و $g_j(\underline{x}) \le 0$ صدق قید)

از رابطه (۱) پیداست که تأثیر جمله دوم در سمت راست تعریف Φ ، به صورت افزایش Φ به نسبت نمایی (توانی از q) از میزان نقض شدن قیود می باشد. معمولاً تابع Φ ، مقدار مینیمم خود را در ناحیه غیرممکن مسئله پیدا می کند و به همین علت به روش های خارجی موسوم شده اند. اپتیمم اصلی ، هنگام همگرایی به مقدار خود می رسد وقتی در حالت حدی ($k \to \infty$)، مقدار $r^{(k)}$ بسیار بزرگ شود ($r^{(k)} \to \infty$). تابع Φ و رفتار آن با مقادیر مختلف q تفاوت می کند:

۱- حالت $q = 0$ ، در این حالت تابع Φ به شکل زیر درمی آید:

$$\Phi(\underline{x}, r^{(k)}) = f(\underline{x}) + r^{(k)} \sum_{j=1}^{m} \langle g_j(\underline{x}) \rangle^{0}$$

$$= \begin{cases} f(\underline{x}) + m r^{(k)} & , if\ all \quad g_j(\underline{x}) > 0 \\ f(\underline{x}) & , if\ all \quad g_j(\underline{x}) \le 0 \end{cases}$$

در نتیجه تابع دارای نا پیوستگی و گسستگی در مرز خواهد شد و در نتیجه مینیمم سازی این تابع (زیرمسئله) بسیار دشوار خواهد بود

(شکل ۱۱-۷ کتاب Rao صفحه ۵۰۳)

۲- حالت $0 \prec g \prec 1$ ، در این حالت تابع هدف ϕ پیوسته خواهد بود ولی مقدار جریمه یک قید (لااقل) نسبتاً کوچک خواهد بود. همچنین مشتقات تابع در طول مرز، ناپیوسته خواهد بود. با توجه به این اوصاف، مینیمم سازی تابع هدف ϕ مشکل خواهد بود. (شکل)

شکل

۳- حالت $g=1$، در این حالت، تحت شرایطی خاص، می توان نشان داد که یک r باندازه کافی بزرگ وجود دارد که جواب مینیمم ϕ، با جواب مقید، یکی می شود *[Zanqwill]*. معذلک، این روش هم ($g=1$) علیرغم حل مسأله در برخی حالات، خیلی جذاب به نظر نمی رسد.

۴- حالت $g \succ 1$، در این حالت مشتقات مرتبه اول پیوسته می باشد(شکل) و به صورت زیر قابل بیان هستند:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + r^{(k)} \sum_{j=1}^{m} g \langle g_j(\underline{x}) \rangle^{g-1} \frac{\partial g_j(\underline{x})}{\partial x_i} \qquad (۳)$$

به طور تجربی، ثابت شده که انتخاب $g=2$، دارای عملکرد خوبیست. در ادامه به شرح الگوریتم در حالات $g \succ 1$ می پردازیم.

شکل

← شرح خلاصه الگوریتم

گام اول- از یک نقطه نوعی مثل $\underline{x}^{(1)}$ شروع کنید و کنتور تکرار را معادل ۱ قرار دهید.

گام دوم- بردار زیر بهینه $\underline{x}^{*(k)}$ را برای مینیمم سازی تابع ϕ محاسبه کنید:

$$\phi(\underline{x}, r^{(k)}) = f(\underline{x}) + r^{(k)} \sum_{j=1}^{m} \langle g_j(\underline{x}) \rangle^{g}$$

گام سوم- چک کنید آیا $\underline{x}^{*(k)}$ تمامی قیود را ارضاء می کند یا خیر. اگر $\underline{x}^{*(k)}$ در ناحیه ممکن قرار داشت (تمامی قیود ارضاء شده اند) ، آنگاه به پایان عملیت رسیده ایم ، در غیر این صورت به گام بعدی بروید.

گام چهارم- یک مقدار دیگر و بزرگتر از قبلی را برای پارامتر جریمه انتخاب کنید:

$$r^{(k+1)} \succ r^{(k)}$$

و به کنتور تکراری یکی بیافزایید. متداول اینست که مقدار $r^{(k)}$ به طور تصاعدی زیاد شود ، یعنی $r^{(k+1)} = cr^{(k)}$ بطوریکه $c \succ 1$.

مثال. مطلوبست حل مسأله بهگزینی زیر با استفاده از روش توابع جریمه خارجی.

$$\begin{aligned} &\textit{Minimize} && f(x_1,x_2) = \frac{1}{3}(x_1+1)^3 + x_2 \\ &S.T. && g_1(x_1,x_2) = 1 - x_1 \le 0 \\ & && g_2(x_1,x_2) = -x_2 \le 0 \end{aligned}$$

حل: با استفاده از حل تحلیلی (عدم نیاز به نقطه یا حدس اولیه) :

$$\phi(\underline{x}^{(1)}, r) = \frac{1}{3}(x_1+1)^3 + x_2 + r[\max(0, 1-x_1)]^2 + r[\max(0, -x_2)]^2$$

شرط لازم برای وجود اکسترمم ϕ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x_1} = (x_1+1)^2 - 2r[\max(0,1-x_1)] = 0 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x_2} = 1 - 2r[\max(0,-x_2)] = 0 \end{cases}$$

معادلات فوق را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} \min\left[(x_1+1)^2, (x_1+1)^2 - 2r(1-x_1)\right] = 0 & (E_1) \\ \min\left[1, 1+2rx_2\right] = 0 & (E_2) \end{cases}$$

با فرض صفر گرفتن تک تک آرگومان ها می توان مسأله را حل کرد. به طور مثال در E_1، اگر آرگومان $(x_1+1)^2$ را صفر بگیریم و $x_1 = -1$ (نقض اولین قید) و همچنین اگر:

$$(x_1+1)^2 - 2r(1-x_1) = 0 \quad , \quad x_1 = -1 - r + +\sqrt{r^2+4r}$$

همچنین اگر در معادله (E_2)، تنها حالت ممکن اینست که $1+2rx_2 = 0$ و در نتیجه $x = -1/2r$.

در نهایت حل دستگاه به شکل زیر می باشد:

$$\begin{cases} x_1^*(r) = -1 - r + r(1+4/r)^{1/2} \\ x_2^*(r) = -1/2r \end{cases}$$

در نتیجه :

$$x_1^* = \lim_{r\to\infty} x_1^*(r) = 1 \quad , \quad x_2^* = \lim_{r\to\infty} x_2^*(r) = 0$$

$$f_{\min} = \lim_{r\to\infty} \phi_{\min}(r) = 813$$

نحوه همگرایی حل نیز در جدول زیر آمده است.

جدول

روش های جریمه ای برای حالات قیود مساوی و نامساوی به صورت همزمان

مشابه حالت تمانعی (روش های داخلی) ، می توان تعریف تابع ϕ را با کمی دستکاری، به یک مسأله مینیمم سازی متوالی تبدیل کرد:

$$\phi^{(k)} = \phi(\underline{x}, r^{(k)}) = f(\underline{x}) + r^{(k)} \sum_{j=1}^{m} \langle g_j(x) \rangle^2 + r^{(k)} \sum_{j=1}^{p} h_j^2(\underline{x})$$

کافیست با افزایش $r^{(k)}$ ، مسأله مینیمم سازی ϕ را متوالیآ تکرار کرد، به این امید که با همگرایی $\phi^{(k)}$، مسأله مقید اصلی نیز حل شود.

روش ضرایب لاگرانژ افزوده (*Augmented Lagrange Multiplier - ALM*)

در این روش، سعی می شود با ترکیب ایده جریمه دهی و ضرایب لاگرانژ ، مسأله بهگزینی مقید حل شود.

مسائل همراه با قیود مساوی

مسأله بهگزینی را که فقط شامل قیود مساوی می باشد درنظر بگیرید:

$$\text{Minimize} \qquad f(\underline{x}) \qquad (۱)$$

$$S.T. \qquad h_j(\underline{x}) = 0 \qquad , j = 1,2,\dots,p \prec n \qquad (۲)$$

تابع لاگرانژ مسأله فوق به صورت زیر تعریف می شود:

(۳)

$$L(\underline{x}, \underline{\lambda}) = f(\underline{x}) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j h_j(\underline{x})$$

یک تابع جریمه(روش خارجی) برای حل مسأله بالا (لاگرانژین) به شکل زیر می توان تعریف کرد:

$$A(\underline{x},\underline{\lambda},r^{(k)})= f(\underline{x})+\sum_{j=1}^{p}\lambda_j h_j(\underline{x})+r^{(k)}\sum_{j=1}^{p}h_j^2(\underline{x}) \qquad (۴)$$

با کمی تامل معلوم می شود که تابع A به تابع لاگرانژین تبدیل می شود اگر $r^{(k)}=0$ باشد و به تابع کلاسیک ϕ تبدیل می شود، اگر همه λ_j ها صفر شوند. می توان نشان داد اگر مقادیر ضرایب لاگرانژ در نقطه بهینه خودشان (یعنی λ_j^*) فیکس شوند ، آنگاه حل مینیمم سازی تابع A، معادل است با حل مینیمم سازی روابط (۱) و (۲) برای حل هر $r^{(k)}$ ، آن هم فقط در یک گام!. در نتیجه نیاز به توالی سازی $r^{(k)}$ نمی باشد. به هر حال چون مقادیر λ_j^* معلوم نیستند ، نیاز به یک روتین سعی و خطا و یا تکراری داریم. متداول این است که در تکرار اول، همه مقادیر $\lambda_j^{(k)}$، معادل صفر قرار داده می شود و برای $r^{(k)}$ نیز یک مقدار دلخواه انتخاب می شود. سپس تابع A مینیمم سازی می شود تا در دور بعدی، مقادیر λ_j و ق، بهنگام شوند. برای این کار اگر شرط لازم را برای تابع لاگرانژ بنویسیم:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{p}\lambda_j^*\frac{\partial h_j}{\partial x_i}=0 \qquad ,i=1,2,...,n \qquad (۵)$$

به طور مشابه برای تابع A نیز خواهیم داشت:

$$\frac{\partial A}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{p}(\lambda_j+2r^{(k)}h_j)\frac{\partial h_j}{\partial x_i}=0 \qquad ,i=1,2,...,n \qquad (۶)$$

با مقایسه عبارات (۵) و (۶) ، به این نتیجه می رسیم که:

$$\lambda_j^*=\lambda_j+2r^{(k)}h_j \qquad ,j=1,2,...,p \qquad (۷)$$

از این نکته زیبا برای بهنگام سازی λ_j استفاده می کنیم:

$$\lambda_j^{(k+1)}=\lambda_j^{(k)}+2r^{(k)}h_j(\underline{x}^{(k)}) \qquad ,j=1,2,...,p \qquad (۸)$$

مقدار $r^{(k)}$ را نیز به طور تصاعدی (مثل روش جریمه ای کلاسیک) بهنگام می کنیم:

$$r^{(k+1)}=cr^{(k)} \qquad ,c\succ 1 \qquad (۹)$$

بدین ترتیب ، A بر حسب $\underline{x}$ برای محاسبه $\underline{x}^{*(k+1)}$، مینیمم سازی می شود و مرتبآ این پروسه تکرار می شود تا به یک همگرایی معقول برسیم. تجربه نشان داده که گذاشتن باند روی $\underline{x}^{(k+1)}$ (تعیین یا تنظیم $r_{\max}$) ، باعث حذف برخی معضلات محاسباتی می شود . فلوچارت الگوریتم فوق در شکل زیر نشان داده شده است.

فلوچارت

مسائل همراه با قیود نامساوی

مسأله بهگزینی مقید زیر که فقط شامل قیود نامساوی می باشد را در نظر بگیرید:

$$Minimize \qquad f(\underline{x}) \qquad (۱۰)$$

$$S.T. \qquad g_j(\underline{x})\le 0 \qquad ,j=1,2,...,m \qquad (۱۱)$$

برای پیاده سازی الگوریتم ALM، قیود نامساوی را به کمک متغیرهای کمبود/مازاد به یک مسأله مقید مساوی تبدیل می کنیم:

$$g_j(\underline{x})+y_j^2=0 \qquad ,j=1,2,...,m \qquad (۱۲)$$

سپس تابع لاگرانژ را تعریف می کنیم: (لاگرانژ افزوده: A)

$$A(\underline{x},\underline{\lambda},\underline{y},r^{(k)}) = f(\underline{x})+\sum_{j=1}^{m}[g_j(\underline{x})+y_j^2]+\sum_{j=1}^{m} r^{(k)}[g_j(\underline{x})+y_j^2]^2 \qquad (۱۳)$$

دوباره همان ایده ای که در حالت قیود فقط تساوی مطرح بود را باید دنبال کنیم، بدین شکل که تابع لاگرانژ افزوده (تابع A) را باید مرتباً بر حسب λ_j و $r^{(k)}$ مینیمم کنیم. نکته ظریفی در این بین وجود دارد که در هر حل مینیمم سازی، متغیرهای تصمیم گیری فقط $\underline{x}^{*(k)}$ نیستند، بلکه بردار $\underline{y}$ (متغیرهای کمبود) نیز اضافه بر سازمان می باشند که منجر به بزرگ شدن سایز مسئله مینیمم سازی در هر تکرار می شود. می توان نشان داد که مسأله بهگزینی A (نشان داده شده در (۱۳)) معادل است با : [کتاب Rao ۷,۲۳]

$$A(\underline{x},\underline{\lambda},r^{(k)}) = f(\underline{x})+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\alpha_j + r^{(k)}\sum_{j=1}^{m}\alpha_j^2 \qquad (۱۴)$$

به طوریکه α_j به صورت زیر تعریف می شود:

$$\alpha_j = \max[g_j(\underline{x}),-\lambda_j/2r^{(k)}] \qquad (۱۵)$$

در نتیجه، حل مسأله بهگزینی (۱۰) و (۱۱) ، معادلاً با حل متوالی بهگزینی A (نشان داده شده در (۱۴)) درست شبیه حالت قیود مساوی و با فرمول جدید بهنگام سازی λ_j، بدست می آید:

$$\lambda_j^{(k+1)} = \lambda_j^{(k)} + 2r^{(k)}\alpha_j^{(k)} \qquad , j=1,2,...,m \qquad (۱۶)$$

باید دقت کرد که تعریف جدید A (رابطه (۱۴))، دارای مشتقات پیوسته مرتبه اول می باشد ولی دارای ناپیوستگی در مشتقات مرتبه دوم می باشد، لذا باید مواظب بود که از روش های مرتبه دوم برای مینیمم سازی A پرهیز شود.

مسائل همراه با قیود مساوی و نامساوی و روش ALM

در این حالت کلی، مسأله اصلی بهگزینی به صورت زیر تعریف می شود:

$$Minimize \qquad f(\underline{x}) \qquad (۱۷)$$

$$S.T. \qquad g_j(\underline{x}) \le 0 \qquad , j=1,2,...,m \qquad (۱۸)$$

$$h_j(\underline{x}) = 0 \qquad , j=1,2,...,p \prec n$$

مسأله فوق را می توان با ترکیب ایده ها و روش های ذکر شده برای دو حالت قبلی، حل کرد. تعریف تابع لاگرانژ افزوده به شکل زیر خواهد بود:

$$A(\underline{x},\underline{\lambda},r^{(k)}) = f(\underline{x})+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\alpha_j + \sum_{j=1}^{p}\lambda_{m+j}h_j(\underline{x}) + r^{(k)}\sum_{j=1}^{m}\alpha_j^2 + r^{(k)}\sum_{j=1}^{p}h_j^2(\underline{x}) \qquad (۱۹)$$

به طوریکه α_j ، مطابق رابطه (۱۵) تعریف می شود. فرمول های بهنگام سازی نیز به شرح زیر هستند:

$$\lambda_j^{(k+1)} = \lambda_j^{(k)} + 2r^{(k)}\max[g_j(\underline{x}),-\lambda_j^{(k)}/2r^{(k)}] \qquad , j=1,2,...,m \qquad (۲۰)$$

$$\lambda_{m+j}^{(k+1)} = \lambda_{m+j}^{(k)} + 2r^{(k)}h_j(\underline{x}) \qquad , j=1,2,...,p \qquad (۲۱)$$

در انتها، مزایای روش ALM را (لااقل برای مسائل با سایز کوچک تا متوسط) یادآور می شویم:

۱- نیازی به افزایش $r^{(k)}$ تا ∞ نیست.

۲- نقطه شروع، الزاماً نباید در ناحیه ممکن باشد.

۳- امکان دستیابی به $h_j(\underline{x})=0, g_j(\underline{x})=0$ به طور دقیق نیز برقرار است، چرا که وجود مقادیر غیر صفر λ_j حاکی از فعال شدن قید متناظر(قید jام) در نقطه اپتیمم می باشد.

مثال : مطلوبست بهگزینی زیر با استفاده از روش ALM:

$$\text{Minimize} \qquad f(\underline{x}) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 \qquad (E_1)$$

$$S.T. \qquad h(\underline{x}) = x_1 + x_2 - 5 = 0 \qquad (E_2)$$

حل: تابع لاگرانژ افزوده به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$A(\underline{x},\underline{\lambda},r^{(k)}) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 5) + r^{(k)}(x_1 + x_2 - 5)^2 \qquad (E_3)$$

شرط لازم برای مینیمم سازی A:

$$\frac{\partial A}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow x_1(12 + 2r^{(k)}) + x_2(4 + 2r^{(k)}) = 10r^{(k)} - \lambda \qquad (E_4)$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow x_1(4 + 2r^{(k)}) + x_2(6 + 2r^{(k)}) = 10r^{(k)} - \lambda \qquad (E_5)$$

پس از حل (E_4) و (E_5):

$$\begin{cases} x = \dfrac{-90r^{(k)^2} + 9r^{(k)}\lambda - 6\lambda + 60r^{(k)}}{(14 - 5r^{(k)})(12 + 2r^{(k)})} & (E_6) \\[2ex] x = \dfrac{20r^{(k)} - 2\lambda}{14 - 5r^{(k)}} & (E_7) \end{cases}$$

فرض کنید $r^{(k)}$ را با مقدار j، فیکس و $\lambda^{(1)}=0$، آنگاه:

$$x_1^{*(1)} = -5/21, x_2^{*(1)} = 20/9 \Rightarrow h = -5/21 + 20/9 - 5 = -3.01587$$

برای تکرار بعدی:

$$\lambda^{(2)} = \lambda^{(1)} + 2r^{(1)}h(\underline{x}^{*(1)}) = 0 + 2\times 1\times(-3.01587) = -6.03175$$

با جایگذاری $\lambda^{(2)}$(و همچنین $r^{(1)}=0$ در معادله E_6 و E_7 :

$$x_1^{*(2)} = -0.38171, x_2^{*(2)} = 3.56261 \Rightarrow h = -1.8191$$

و با تکرار و ادامه روال، به جواب اصلی مسأله می رسیم. در جدول زیر ، ۱۰ تکرار اول محاسبات با جزئیات مربوطه آورده شده است.

جدول

رفرنس های ممکن

[1]. Zoulendijk, G.,"Methods of Feasible Directions", Elsevier, Amesterdam, 1960.

[2]. Jacoby, S.L.S., Kowalik, J. S., Pizzo, J. T., "Iterative Methods for Nonlinear Optimization problems", Prentic Itall, Englewood Cliffs, N.J., 1972.

[3]. Zoulendijk, G. Nonlinear Programming: a Numerical survey", SIAM Journal of control Theory and Applications", vol. 4, No.1, PP. 194-210, 1966.

[4]. Rosen, J.B., *"The Gradient Projection Method of Nonlinear Programming, part I: Linear Constraints", SIAM Journal, vol.8, PP. 181-217*, 1960.

[5]. Rosen, J.B., "The Gradient Projection Method of Nonlinear Programming, part II: Nonlinear Constraints", SIAM Journal, vol.9, PP. 414-432, 1961.