

### مقدمه

این روش بهینه‌سازی در همان سازمانی توسعه یافت که Danzing برنامه‌ریزی خطی را توسعه داد، یعنی سازمان RAND که **کانون تفکر**<sup>۲</sup> وابسته به نیروی هوایی آمریکا را پشتیبانی می‌کرد. این تحقیق به دلیل احتیاجی که در اوایل دهه ۱۹۵۰، دوره Sputnik به منظور یافتن راه حلی برای مسئله بهینه‌سازی مسیر پرتاب موشک به محاسبه متغیرها نیز نیاز داشت به اجرا درآمد. دو تلاش موازی یکی در این کشور توسط Richard Bellman و دیگری در روسیه توسط L.S.Pontryagin منجر به یافتن پاسخ‌های مشابه ولی از روش‌های متفاوت شد.

عنوان برنامه‌ریزی پویا، توسط Richard Bellman برای این روش بهینه‌سازی انتخاب شد. خود او در یک سری مقاله و کتاب با عنوان برنامه‌ریزی پویا [1] و برنامه‌ریزی پویای کاربردی [2] این عنوان را پیشنهاد و توصیف کرده بود. گمان می‌رود که انتخاب این عنوان هیچ ارتباط مستقیمی به این روش که مشابه برنامه‌ریزی خطی و هندسی نبود ندارد.

نسخه‌های پیوسته و گسسته از این روش بهینه‌سازی وجود دارند. نسخه پیوسته برای یافتن راه حل‌های مسئله مسیر پرتابه استفاده می‌شود که در آن یک تابع پیوسته مورد نیاز است و نوعاً در به‌گزینی دینامیک مورد بحث واقع می‌شود. نسخه گسسته در مواقعی مورد استفاده قرار می‌گیرد که می‌توان مسئله را در یک سری از مراحل تعریف کرد. به عبارتی یک مسئله برنامه‌ریزی پویای گسسته یا ذاتی و نفسی است، نظیر بهینه‌سازی فرآیندهایی که مرحله‌ای هستند یا این که به‌طور تصنعی گسسته شده‌اند تا به‌توان از ماشین حل برنامه‌ریزی پویا استفاده نمود. بیشتر استفاده‌های مهندسی از نسخه گسسته برنامه‌ریزی پویا استفاده می‌کنند که موضوع این فصل خواهد بود.

یکی از اولین کتابهایی که در مورد استفاده‌های خاص بود توسط [3] Roberts در سال ۱۹۶۴ نوشته شد. این کتاب در زمان خود بطور جامع به بررسی روش یاد شده می‌پرداخت و به استفاده‌های مختلف از جمله مسئله تخصیص بهینه، رابطه کنترل فرآیند بهینه، محاسبه متغیرها و برنامه‌ریزی پیوسته و تصادفی اشاره داشت که هنوز هم یک مرجع معتبر می‌باشد.

تلاشهای Aris, Nemhauser, Mitten و Wilde منجر به گسترش برنامه‌ریزی پویا برای سیستمهایی که دارای حلقه و شاخه بودند شد. [4] Aris نتایج تحقیق کاربرد برنامه‌ریزی پویا در طراحی بهینه راکتورهای شیمیایی را منتشر کرده بود و Mitten به همراه [5] Nemhauser کاربرد این روش را برای یک فرآیند شیمیایی که شامل یک ساختار شاخه‌ای بود توضیح داده بود. پروفیسور [6] Wide از دانشگاه استنفورد در این زمان مشغول تحقیق بر روی برنامه‌ریزی پویا بود و شانس این را داشت که درباره این روش با هر دوی Aris و Nemhauser در یک بازه زمانی کوتاه صحبت کند. این همکاری منجر به ارائه یک مقاله بسیار برجسته که تئوری برنامه‌ریزی پویا را از فرآیندهای سری به فرآیندهای دارای حلقه و شاخه گسترش می‌داد گردید [7]. متعاقباً [8] Wild در یک مقاله، مفهوم نمودارهای تابعی را به منظور نشان دادن معادلات تابعی برنامه‌ریزی پویا و یک روش سیستماتیک از تبدیل یک نمودار جریان فرآیند به یک نمودار تابعی برنامه‌ریزی پویا توسعه داد. این نتایج به روش استاندارد تحلیل فرآیندها در بهینه‌سازی برنامه‌ریزی پویا تبدیل شده‌اند و در این فصل به عنوان پایه و اساس مورد استفاده قرار خواهند گرفت. به‌هر حال شاید به‌جرات بتوان گفت که کتاب ارزشمند آقای Luus یک متن درسی جامع در این زمینه می‌باشد.

<sup>1</sup> Dynamic Programming

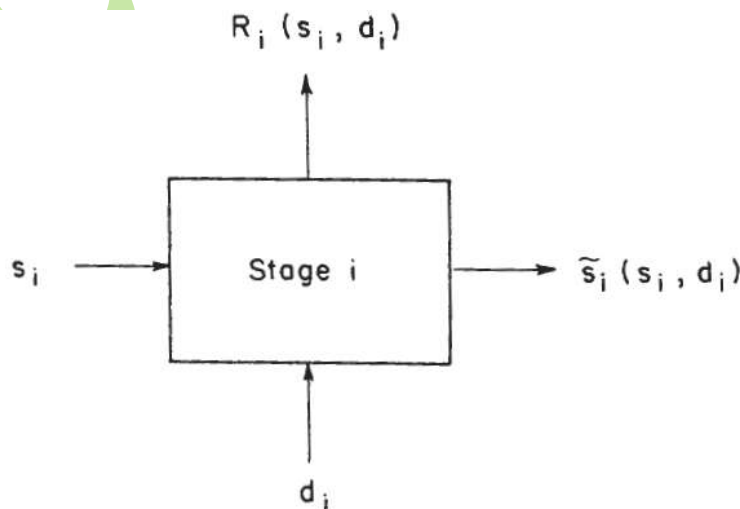
<sup>2</sup> Think Tank

برنامه‌ریزی پویا یک مسئله بزرگ و پیچیده بهینه‌سازی را به یک سری معادلات وابسته به هم کوچکتر تبدیل می‌کند که هر کدام تعداد متغیر اندکی دارند. همچنین مباحث قبلی روش‌های جستجوی یک‌متغیره و چندمتغیره برای این گام‌های کوتاه‌شده بهینه‌سازی قابل‌اعمال هستند. بنابراین، الگوریتم برنامه‌ریزی پویا را می‌توان به منظور یافتن بهینه کل فرآیند از طریق استفاده از مسئله‌های کوچکتر بهینه‌سازی جزئی متصل به هم مورد استفاده قرار داد.

### ترمینولوژی و ادبیات برنامه‌ریزی پویا

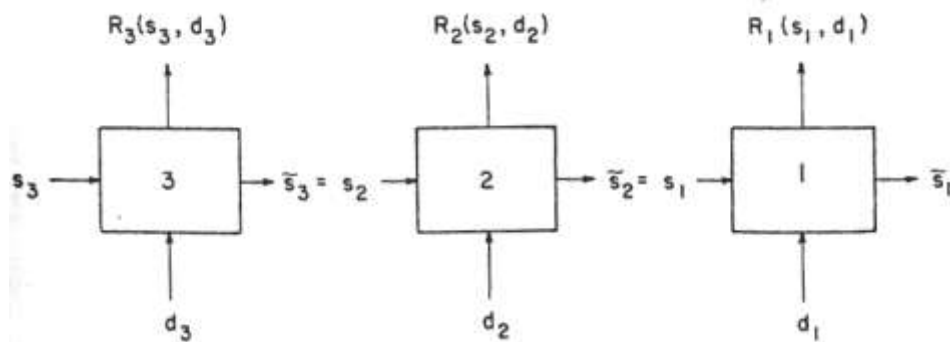
همانند سایر روش‌های بهینه‌سازی، برنامه‌ریزی پویا نیز یک فرهنگ ویژه و مختص به خود دارد. برای معرفی این فرهنگ لغات، موضوع را با بررسی یک مسئله شبکه ساده شروع می‌کنیم. این کار مفهوم مراحل و بهینه‌سازی جزئی در یک مرحله بوسیله متغیرهای تصمیم‌گیری را تشریح می‌کند. همچنین این امر استفاده از متغیرهای وضعیت برای ربط‌دادن مراحل را به یکدیگر نشان خواهد داد. سپس با یک مثال فرآیند که در آن شبکه به وسیله توضیحات گرافیکی مدل اقتصادی (تابع بازگشتی) و معادلات قیود (توابع انتقال) به منظور توضیح پیچیدگی‌های اضافی معرفی شده به وسیله توابع پیوسته جایگزین شده است، مسئله دنبال خواهد شد. سپس الگوریتم برنامه‌ریزی پویا برای سیستم‌های  $N$  مرحله‌ای بررسی گردیده و برای مسائل دارای چرخه و شاخه گسترش یافته است. پس از این، قوانین Wild به منظور تبدیل نمودار جریان فرآیند به نمودار تابعی برنامه‌ریزی پویا ارائه شده است. همچنین اختصاص بهینه منابع و استفاده از زمان به جای یک واحد فرآیند به عنوان مرحله شرح داده شده‌اند. در نهایت، کاربرد برنامه‌ریزی پویا در مسئله جایگزینی یا چیدمان بهینه تجهیزات بحث شده است.

یک واحد فرآیندی منفرد یا یک واحد زمانی را می‌توان یک مرحله نامید. یک مرحله بصورت نمودار در شکل ۱ نشان داده شده است. مدل اقتصادی همان تابع هزینه یا تابع بازگشت (انتفاع)،  $R_i(s_i, d_i)$ ، نامیده می‌شود و میزان سود یا قیمت (هزینه) مرحله را بدست می‌دهد. این مدل اقتصادی به متغیرهای مستقل در یک مرحله وابسته است. این‌ها متغیرهای حالت و تصمیم‌گیری هستند. متغیرهای تصمیم‌گیری،  $d_i$ ، آنهایی هستند که به صورت مستقل می‌توانند تغییر کنند. متغیرهای حالت،  $s_i$ ، آنهایی هستند که از یک مرحله مجاور وارد مرحله حاضر می‌شوند لذا نمی‌توان آنها را به صورت مستقل تغییر داد. متشابهاً، هر مرحله خروجی‌هایی خواهد داشت،  $\tilde{s}_i$ ، که ورودی‌های مرحله (بعدی) مجاور خواهند بود. متغیرهای حالت ورودی می‌توانند نمایانگر نرخ جریان خوراک از یک واحد دست بالا باشند. و متغیرهای حالت خروجی می‌توانند نمایانگر محصولاتی باشند که از یک مرحله برای فرآورش بیشتر به واحد پایین دست می‌روند.



شکل ۱. نمایش نموداری از یک مرحله برنامه‌ریزی پویا

هر مرحله دارای توابع (انتقال) گذر  $\tilde{s}_i = T(S,d)$  می باشد که می توانند نشانگر بیان مواد و انرژی در مرحله باشند. دقت شود که مرحله نشان داده شده در شکل ۱ عملاً نمایانگر تابع انتقال نیز می باشد. مراحل می توانند متصل به هم باشند و عملاً به شکل متوالی (سری) در آیند. یک فرآیند سری ساده در شکل ۲ در سه مرحله نشان داده شده است. ضمناً شماره گذاری مراحل از راست به چپ به جای چپ به راست، در برنامه ریزی پویا یک روال استاندارد است. دلیل این امر متعاقباً توضیح داده خواهد شد.



شکل ۲. یک فرآیند ساده سری سه مرحله ای

نمودار شکل ۲ نمایانگر مدل اقتصادی یا تابع بازگشت همراه با معادلات قیود می باشد. این توابع می توانند به صورت زیر نوشته شوند:

$$\text{Optimize } R_1(s_1, d_1) + R_2(s_2, d_2) + R_3(s_3, d_3) \quad (۱)$$

$$\tilde{s}_1 = T_1(s_1, d_1) \quad \text{با فرض (۲-الف)}$$

$$\tilde{s}_2 = T_2(s_2, d_2) \quad \text{(۲-ب)}$$

$$\tilde{s}_3 = T_3(s_3, d_3) \quad \text{(۲-ج)}$$

$$\tilde{s}_2 = s_1, \quad \tilde{s}_3 = s_2 \quad (۳)$$

چهار متغیر مستقل  $d_3, d_2, d_1$  و  $S_3$  وجود دارند. این مقادیر به منظور بهینه سازی جمع توابع بازگشت  $R_3, R_2, R_1$  باید تعیین شوند. همچنین تمامی قیود تعیین شده روی  $\tilde{s}_2 = s_1$ ،  $\tilde{s}_3 = s_2$  و  $\tilde{s}_1$  باید ارضا شوند.

به کمک برنامه ریزی پویا سه بهینه سازی جزئی صورت می گیرد یعنی در هر مرحله یک مورد. سپس این اطلاعات برای یافتن بهینه کلی فرآیند مورد استفاده قرار می گیرند. معادله زیر الگوریتم برنامه ریزی پویا را برای مرحله اول بر حسب ماکزیم کردن سود داده شده به وسیله تابع بازگشت به دست می دهد:

$$f_1(s_1) = \max_{d_1} [R_1(s_1, d_1)] \quad (۴)$$

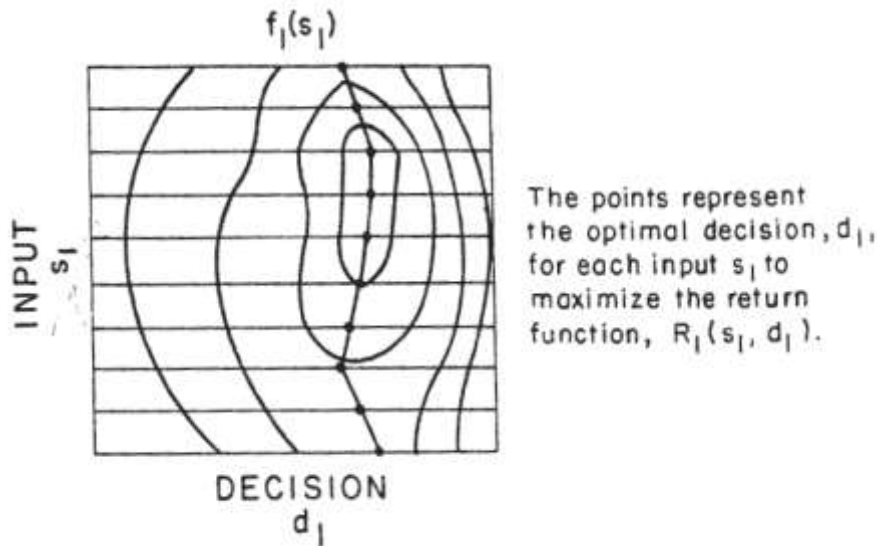
ذخیره کردن مقادیر خروجی  $S_1$  و جستجو روی  $d_1$  برای تعیین  $f_1(S_1)$  ضروری می باشد. این امر در شکل ۳ که مقادیر  $f_1(S_1)$  در امتداد مقادیر ماکزیم  $R_1(S_1, d_1)$  همانگونه که به وسیله مقدار بهینه  $d_1$  برای مقادیر منتخب از  $S_1$  هستند توضیح داده شده است. مقادیر  $f_1(S_1)$  برای استفاده های آتی حفظ شده اند، و معادله (۴) در شکل ۴ بعنوان نمودار تابع مرحله اول از فرآیند نشان داده شده است.

در مرحله دوم اطلاعات بهینه مرحله اول مورد استفاده قرار می گیرد و الگوریتم برنامه ریزی پویا در این مرحله به صورت زیر می باشد:

$$f_2(s_2) = \max_{d_2} [R_2(s_2, d_2) + f_1(s_1)] \quad (۵)$$

ذخیره سازی مقادیر  $S_2$  به طور جامع و جستجو روی  $d_2$  به منظور به دست آوردن ماکزیم جمع بازگشت در مرحله ۲ و بازگشت بهینه مرحله ۱،  $f_1(S_1)$  ضروری است. مقادیر مناسب  $f_1(S_1)$  بوسیله تابع انتقال  $\tilde{s}_2 = S_1 = T_2(S_2, d_2)$

تعیین می شوند. بنابراین مقادیر بهینه  $f_2(S_2)$  می تواند برای استفاده در آینده تعیین و ذخیره گردد.

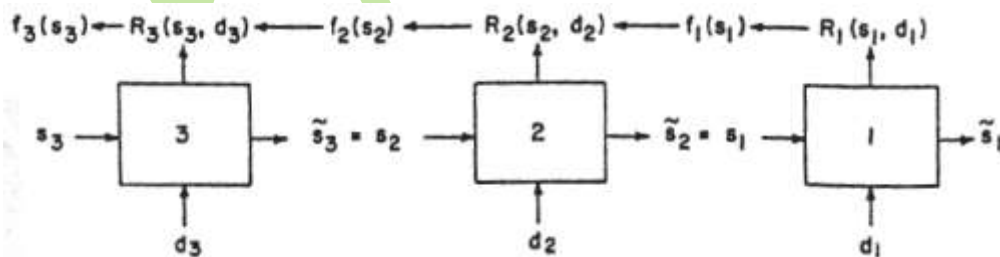


شکل ۳. خطوط یک تابع بازگشت،  $R_1(s_1, d_1)$

در مرحله سوم و آخر اطلاعات بهینه  $f_2(S_2)$  از مرحله 2 مورد استفاده قرار می گیرد و الگوریتم برنامه ریزی پویا در این مرحله برابر است با:

$$f_3(s_3) = \max_{d_3} [R_3(s_3, d_3) + f_2(s_2)] \quad (6)$$

در این نقطه مقدار  $S_3$  یا شناخته شده است و یا یک متغیر مستقل می باشد. اگر متغیر  $S_3$  یک مقدار ثابت شناخته شده باشد، تنها لازم است که مقدار  $d_3$  را که  $F_3(S_3)$  را در معادله (6) ماکزیمم می کند برای همان مقدار از  $S_3$  تعیین کرد. در اینجا مقادیر  $S_3$  به طور جامع مورد نیاز نیست. اگر  $S_3$  یک متغیر مستقل باشد، لازم است تا یک جستجوی دو متغیره برای تعیین ماکزیمم مقدار  $F_3(S_3, d_3)$  صورت گیرد. این کار سود ماکزیمم را برای سیستم به دست می دهد و مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم از مقادیر بهینه ثبت شده مراحل قبل استخراج می گردد.



شکل ۴. یک نمودار تابعی برای فرایند سری سه تایی

قبل از ارائه یک مثال ساده شبکه برای تشریح استفاده از برنامه ریزی پویا، الگوریتم برنامه ریزی پویا را در شکل کلی اش ارائه می شود. Bellman این روش را همراه با یک عبارت برای الگوریتمی که او **اصل بهینگی**<sup>1</sup> نامید، به کار برد [1]. این اصل می گوید:

یک سیاست بهینه دارای این خصوصیت است که حالت اولیه و تصمیم اولیه هر چه باشند، تصمیمات باقیمانده باید شامل یک سیاست بهینه نسبت به حالت حاصل از تصمیم اول باشند.

این اصل از لحاظ ریاضی به عنوان الگوریتم برنامه ریزی پویا برای ماکزیمم کردن یک فرآیند سری با  $i$  مرحله به شکل

<sup>1</sup> Principle of Optimality

زیر بیان شد:

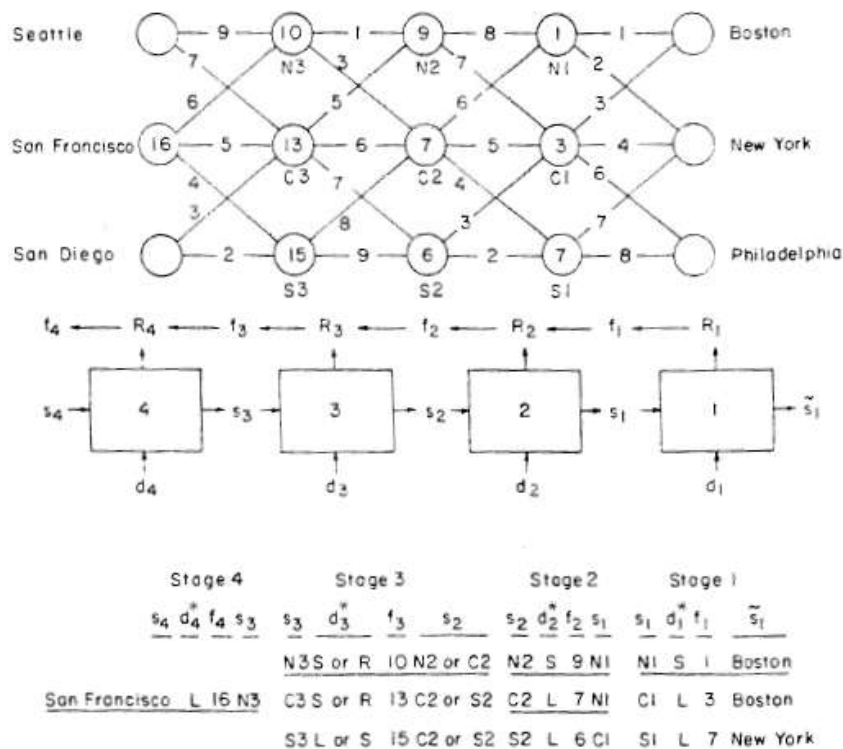
$$f_i(s_i) = \max_{d_i} [R_i(s_i, d_i) + f_{i-1}(s_{i-1})] \quad (7)$$

در الگوریتم  $R_i(S_i, d_i)$  مقدار بازگشتی از مرحله  $i$  با ورودی های  $S_i, d_i$  و خروجی  $S_{i-1}$  می باشد.  $F_{i-1}(S_{i-1})$  ماکزیمم بازگشتی برای مراحل  $1$  تا  $i-1$  بعنوان تابعی از ورودی  $S_{i-1}$  می باشد، و  $F_i(S_i)$  ماکزیمم بازگشتی برای مراحل  $1$  تا  $i$  بعنوان تابعی از  $S_i$  می باشد.

تحلیل برنامه ریزی پویا با آخرین قسمت سیستم شروع و با اولین قسمت پایان می یابد. آخرین قسمت یک سیستم سری دارای خروجی است که بر روی واحدهای دیگر سیستم اثر می گذارد. بنابراین راحت تر است که شماره گذاری مراحل از آخرین قسمت شروع شود و در اولین قسمت پایان پذیرد. مثال ساده شبکه زیر مفهوم مراحل، متغیرهای حالت و تصمیم، و کاربردهای الگوریتم برنامه ریزی پویا را توضیح می دهد.

### مثال ۱

یک تانکر از یک محصول گران قیمت که در سانفرانسیسکو تولید شده است به منظور بارگیری به مقصد اروپا باید به یکی از بندرهای مهم در ساحل شرقی تحویل گردد. هزینه انتقال از آتلانتیک اساساً برای بندرهای اصلی در ساحل شرقی یکسان است. مطلوب است انتخاب راه بهینه (کمترین مسافت) از سانفرانسیسکو به ساحل شرقی. مسافت نسبی بین شهرها با همراه راههای ممکن در نمودار شبکه شکل ۵ نشان داده شده اند.



شکل ۵. حل برنامه ریزی پویای مسئله شبکه مثال ۱

به منظور حل مسئله می توان اساساً از آخر به اول حرکت کرد. با شروع کردن از شهرهای  $N_1, C_1$  و  $S_1$  می توان راه مینیمم به ساحل شرقی را در یک دایره قرار داد و فاصله  $F_1$  به همراه تصمیم بهینه را در جدول ثبت نمود. بعنوان مثال، اگر راه بهینه منجر به شهر مرکزی ( $C_1$ ) شد تصمیم بهینه  $d_1^*$  حرکت به سمت ستون خواهد بود (چپ ( $L$ ) و نه مستقیم ( $S$ ) و یا راست ( $R$ ))، که از نیویورک و یا فیلادلفیا نزدیکتر است. برای هر مقدار از متغیر حالت، تصمیم بهینه  $d_1^*$  بر

طبق رابطه (۴) در مرحله 1 درج شده است. در مرحله 2 برای هر متغیر حالت (شهر  $S_2, C_2, N_2$ ) راه مینیمم از آن شهر به ساحل شرقی طبق رابطه (۵) بوسیله الگوریتم برنامه‌ریزی پویا بدست می‌آید. بازگشت بهینه مینیمم جمع فاصله یک شهر در ردیف 2 ( $S_2, C_2, N_2$ ) با فاصله‌ها در ردیف 1,  $R_2$ ، و مینیمم فاصله از شهرهای ردیف 1 تا ساحل شرقی  $F_1$  می‌باشد. فاصله کل مینیمم داخل دایره قرار می‌گیرد و در مرحله 2 داخل جدول به همراه تصمیم بهینه ( $R, S, L$ ) ثبت می‌شود. این روند برای مرحله سوم فرآیند تکرار می‌شود. در مرحله چهارم متغیر حالت تنها یک مقدار دارد و آن سانفرانسیسکو است. و ضروری است که تنها تصمیم بهینه مطابق با سانفرانسیسکو یعنی  $N_3$  تعیین شود.

بازگشت بهینه (فاصله نسبی مینیمم) برابر است با 16 و سیاست بهینه بصورت یک سلسله ورودی-خروجی زیر خط دار و داخل جدول نشان داده شده است. سیاست بهینه شروع از سانفرانسیسکو، حرکت به سمت چپ یعنی  $N_3$ ، مستقیم به  $N_2$ ، مستقیم به  $N_1$  و سپس مستقیم به بوستون می‌باشد. به هر صورت مسیر حرکت منحصر به فرد نیست. از  $N_3$  به راست به  $C_2$ ، چپ به  $N_1$ ، و مستقیم به بوستون یک راه مینیمم کاملاً برابر با حالت قبل می‌باشد و یک مجموعه بهینه منحصر به فرد از متغیرهای تصمیم وجود ندارد.

در این مثال شبکه متغیرهای حالت سه مقدار ویژه داشتند. به هر حال در بیشتر مسائل متغیرهای حالت، توابع پیوسته هستند و لازم است تا متغیرهای حالت به تعدادی مقادیر گسسته تقسیم شوند. تعداد مقادیر انتخاب شده تعیین کننده تعداد دفعاتی است که مقدار بهینه متغیر تصمیم  $d_i^*$  در هر مرحله باید تعیین شود. انتخاب تعداد مقادیر متغیرهای حالت، تلاش محاسباتی لازم را در مرحله را تعیین می‌کند. همچنین این انتخاب تعیین کننده شبکه ای از مقادیر در  $S_1$  فراهم در هنگام استفاده از الگوریتم برنامه‌ریزی پویا برای حل تصمیمات بهینه  $d_i^*$  است. همچنین درون یابی لازم است تا مقادیر بهینه متغیرهای حالت و تصمیم برگشته از جدول تعیین شوند. مثال زیر این پیچیدگی‌های اضافی را برای یک فرآیند ساده شده با انتقال پیوسته توضیح می‌دهد و توابع گرافیکی را باز می‌گرداند.

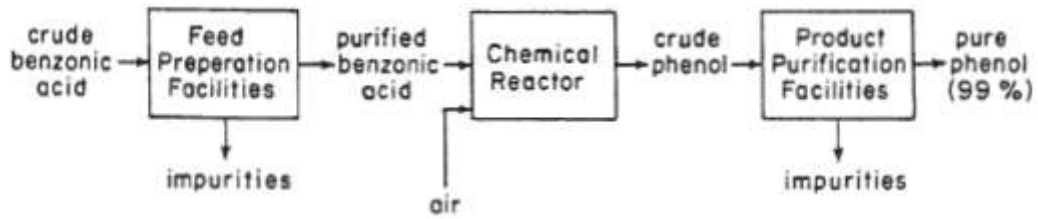
## مثال ۲

یک فرآیند ساده شده برای تولید فنول، اسید بنزوئیک خام را به عنوان خوراک بکار می‌گیرد و در نمودار جریان شکل ۶ نشان داده شده است. تجهیزات جداسازی (جذب و تقطیر) اسید بنزوئیک را خالص می‌سازد سپس در یک راکتور شیمیایی به فنل اکسید می‌شود. فنل ناخالص به تجهیزات جداسازی فرستاده می‌شود (تبخیر و تقطیر)، جایی که فنل خالص (99%) تولید می‌شود. مدل‌های اقتصادی و فرآیندی برای هر یک از سه مرحله فرآیند بصورت گرافیکی در شکل‌های ۷، ۸ و ۹ نشان داده شده‌اند. اینها توابع بازگشت و توابع انتقال را برای هر مرحله برنامه‌ریزی پویا بدست می‌دهند. علامتهای نشان داده شده روی اشکال برای توابع بازگشت در صورت مثبت بودن سود هستند و در صورت منفی بودن، هزینه اجرایی می‌باشند.

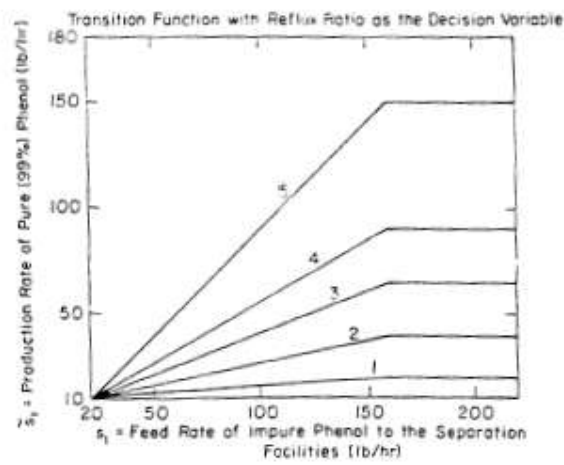
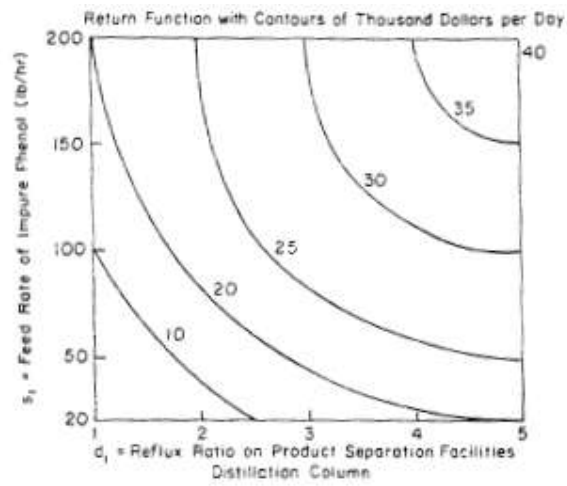
برای بدست آوردن بهینه بوسیله برنامه‌ریزی پویا، هر قدم در فرآیند یک مرحله برنامه‌ریزی پویا است. متغیرهای تصمیم‌گیری و حالت در نمودارهای داده شده در شکل‌های ۷، ۸ و ۹ نشان داده شده‌اند. در هر مرحله جداول با استفاده از اطلاعات موجود در این نمودارها برای بهینه‌سازی برنامه‌ریزی پویا بدست می‌آیند. این امر در جدول ۱ نشان داده شده است و برای مرحله 1 تصمیم بهینه برای سود ماکزیمم استفاده از بزرگترین مقدار نسبت به جریان بازگشتی می‌باشد،  $d_1=5$ . مجموعه مقادیر برای متغیر حالت،  $S_1$ ، آن گونه انتخاب شدند که با 50 واحد از یکدیگر جدا شوند (گرچه بیشتر منطقی به نظر می‌رسید اگر از درون یابی خطی استفاده می‌شد).

اطلاعات توسعه یافته برای مرحله 1 در شکل 10-7 که نمودار تابعی برنامه‌ریزی پویا را برای مرحله برنامه‌ریزی پویا

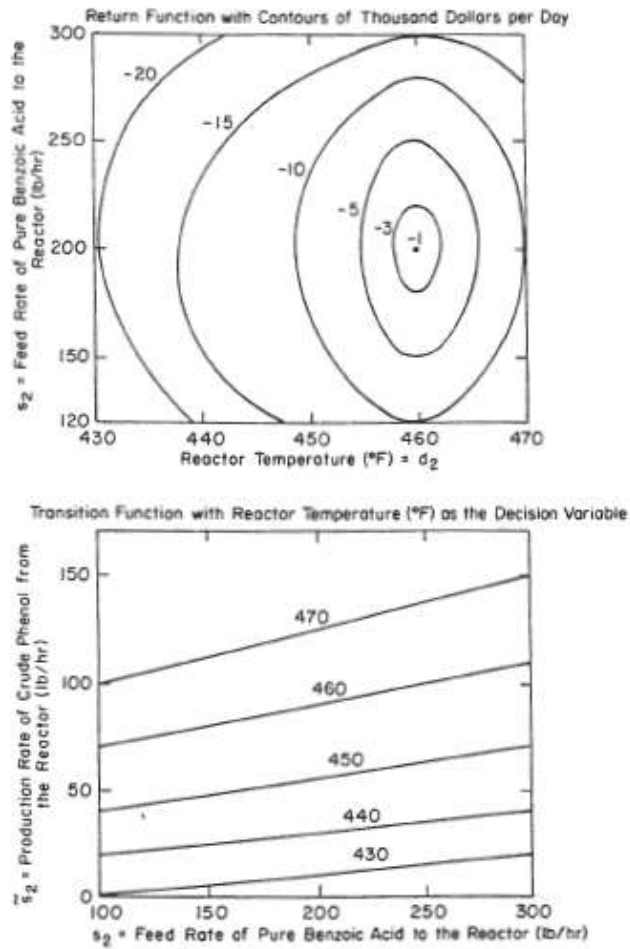
بدست می‌دهد، نشان داده شده است.



شکل ۶. نمودار جریان ساده شده فرایند برای فنول از فرایند اسید بنزویک



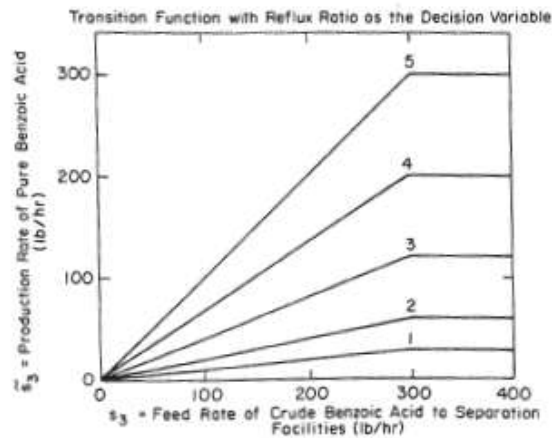
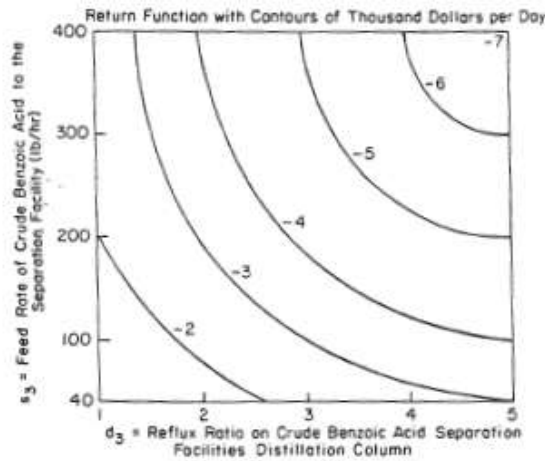
شکل ۷. مدل اقتصادی (تابع بازگشت) و مدل فرایند (تابع انتقال) برای تجهیزات خالص سازی محصول



شکل ۸. مدل اقتصادی (تابع بازگشت) و مدل فرایند (تابع انتقال) برای راکتور شیمیایی

الگوریتم برنامه‌ریزی پویا در جدول ۱ برای مرحله دوم داده شده است. و ثبت جامع متغیر حالت  $S_2$  به همراه تعیین مقدار بهینه متغیر تصمیم‌گیری ضروری است. دوباره یک فاصله 50 واحدی برای متغیرهای حالت که در حد بالای 300 شروع می‌شود انتخاب می‌شود. برای این مقدار  $S_2=300$  یک بازه مقادیر برای  $d_2$  در جدول ۱ لیست شده‌اند. و مقادیر مطابق  $\tilde{d}_2, R_2, F_1, S_1$  از اشکال ۸ و ۱۰، بدست آمده‌اند. محاسبه  $(R_2+F_1)$  مقدار بهینه تصمیم  $d_2$  را بدست می‌دهد که به بزرگترین مقدار  $(R_2+F_1)$  منجر می‌شود. این مطلب در جدول ۱ بصورت  $d_2=470$  و  $(R_2+F_1)=18$  نشان داده شده است و از اینجا  $F_2(300)=18$  بوسیله الگوریتم برنامه‌ریزی پویا تعیین می‌گردد.





شکل ۹. مدل اقتصادی (تابع بازگشت) و مدل فرایند (تابع انتقال) برای تجهیزات آماده سازی خوراک جدول (۱). توضیح محاسبات متغیرهای حالت و تصمیم گیری برای بهینه سازی برنامه ریزی پویای فرایند فنل ساده شده

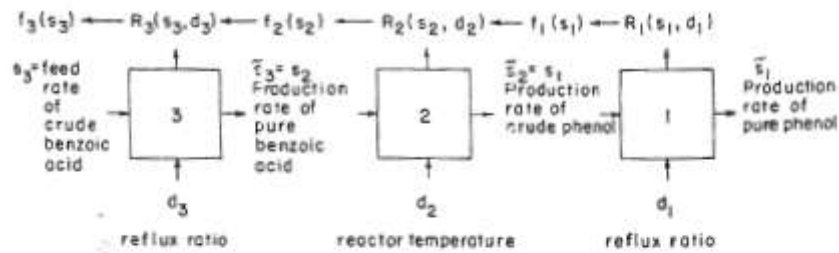
STAGE 1		$f_1(s_1) = \max_{d_1} [R_1(s_1, d_1)]$		
$s_1$	$d_1$	$R_1$	$\bar{f}_1$	
200	5	40	150	
150	5	35	140	
100	5	30	90	
50	5	25	40	
20	5	20	10	

STAGE 2		$f_2(s_2) = \max_{d_2} [R_2(s_2, d_2) + f_1(s_1)]$			
$s_2$	$d_2$	$\bar{s}_2 = s_1$	$R_2$	$f_1$	$R_2 + f_1$
300	470	150	-17	35	<u>18</u> = $f_2$
	460	110	-15	31	16
	450	70	-17	27	10
	440	40	-21	23	2

STAGE 3		$f_3(s_3) = \max_{d_3} [R_3(s_3, d_3) + f_2(s_2)]$			
$s_3$	$d_3$	$\bar{s}_3 = s_2$	$R_3$	$f_2$	$R_3 + f_2$
400	5	300	-7	18	11
	4	200	-6	28	<u>22</u> = $f_3$
	3	120	-5	17.5	12.5
	2	60	-4	8.75	4.75



Stage 3				Stage 2				Stage 1			
$s_3$	$d_3^*$	$f_3$	$\bar{s}_3$	$s_2$	$d_2^*$	$f_2$	$\bar{s}_2$	$s_1$	$d_1^*$	$f_1$	$\bar{s}_1$
400	4	22	200	300	470	18	150	200	5	40	150
300	4	22.5	200	250	460	25	100	150	5	35	140
250	4.4	22.7	200	200	460	28	90	100	5	30	90
200	5	23	200	150	460	23	80	90	5	29	80
180	5	21.2	180	120	460	17.5	75	50	5	25	40
150	5	20	150					20	5	20	10
100	5	10	100								

شکل (۱۰). نمودار تابعی برنامه‌ریزی پویا و نتایج بهینه برای فرآیند فنل ساده شده

سایر مقادیر  $F_2(S_2)$  بصورت مشابه محاسبه شده‌اند و نتایج مرحله 2 در شکل 10 نشان داده شده‌اند. در این زمان بایستی توجه کرد که یک جستجوی خروجی بر روی  $d_2$  در حال انجام است تا مقدار بهینه بدست آید به هر حال در یک مسئله صنعتی توابع بازگشت و انتقال می‌توانند بطور قابل ملاحظه‌ای پیچیده‌تر باشند و کار جستجو برای تعیین مقدار بهینه متغیرهای تصمیم‌گیری می‌تواند به طور قابل توجهی با استفاده از یکی از روشهای یاد شده جستجوی تک متغیره یا چند متغیره کاهش یابد.

با استفاده از الگوریتم برنامه‌ریزی پویای مرحله 3 که در جدول 1 نشان داده شده است نتایج بهینه را برای متغیرهای تصمیم و حالت نشان داده شده در شکل 7-10 بدست می‌آوریم. روند محاسبه استفاده شده برای یافتن مقدار بهینه  $d_3$  برای  $S_3=400$  در جدول 1 نشان داده شده است و این شامل همان روندی می‌شد که در مرحله 2 مورد استفاده قرار گرفت. در هر صورت، مسائل صنعتی توابع انتقال و بازگشت بسیار پیچیده‌تری خواهند داشت و یک جستجوی دو متغیره برای یافتن بهترین مقادیر  $d_3, S_3$  که  $F_3(S_3, d_3)$  را ماکزیمم می‌کند مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این مورد خاص الگوریتم برنامه‌ریزی پویا بصورت زیر خواهند بود:

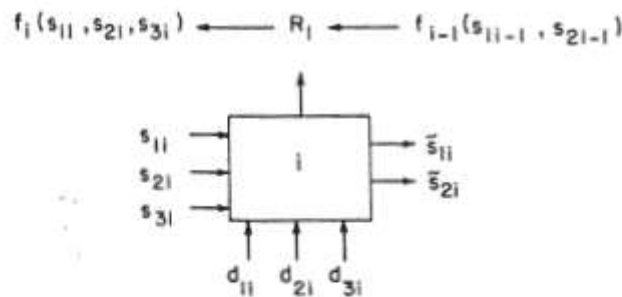
$$f_3 = \max_{d_3} [R_3(s_3, d_3) + f_2(s_2)]$$

در اینجا به نظر می‌رسد که ماکزیمم سود برابر  $f_3=23.0$  باشد و به هر حال یک محاسبه دیگر نیز برای  $S_3=180$  به منظور بهتر کردن فاصله شبکه بین 150 و 200 صورت گرفت تا مشخص شود آیا مقدار بزرگتری در این بازه وجود دارد یا خیر. مشخص شد که  $f_3(180)=21.2$  و  $f_3(200)$  بزرگترین مقدار سود فرآیند باقی ماند. متعاقباً شرایط کاری بهینه همانطوری که در شکل 10 نشان داده شده است تعیین می‌گردد و درون یابی مقادیر  $d_1$  و  $\bar{s}_1$  در مرحله 1 ضروری است. فاصله مابین مقادیر  $S_1$  برای درون یابی خطی  $d_1$  و  $\bar{s}_1$  دقت شناخته شده برای آن متغیرها از مدلهای فرآیند و اقتصاد رضایت بخش بود.

اکنون وقت آن فرا رسیده است که بحث خود را به یک سیستم  $N$  مرحله ای برنامه ریزی پویا گسترش دهیم. این مطلب در بخش بعدی با فرآیندهای سری دنبال می شود و این نتایج برای مواردی شامل حلقه و شاخه تعمیم می یابد. سپس سراغ مسئله ارتباط بخشیدن واحدی یک فرآیند صنعتی یا مراحل برنامه ریزی پویا می رویم.

### متغیرها، تبدیلات<sup>۱</sup> و مراحل

در مسئله قبلی نمودار جریان فرآیند برای به دست آوردن نمودار تابعی برنامه ریزی پویا استفاده شد، ولی صحیح تر آنست که جریان اطلاعات بجای جریان ماده مورد ارزیابی قرار بگیرد. معادلات تابعی و نمودارهای تابعی متناظر آن برای مراحل مختلف سیستم به منظور توصیف این جریان اطلاعات بوسیله نمودار جریان فرآیند توسعه یافته اند. توسعه توصیف مرحله برای داشتن بیش از یک مرحله و متغیر حالت ضروری است. همچنین هنگامی که حلقه ها و شاخه ها در مسئله موجود می باشند خروجی های یک مرحله ممکن است ورودی های بیش از یک مرحله باشند.



#### Transition Functions

$$\begin{aligned} \bar{s}_{1i} &= T_{1i}(s_{1i}, s_{2i}, s_{3i}, d_{1i}, d_{2i}, d_{3i}) \\ \bar{s}_{2i} &= T_{2i}(s_{1i}, s_{2i}, s_{3i}, d_{1i}, d_{2i}, d_{3i}) \end{aligned}$$

#### Incident Identities

$$\begin{aligned} \bar{s}_{1i} &= s_{1i-1} \\ \bar{s}_{2i} &= s_{2i-1} \end{aligned}$$

#### Return Function

$$R_i = R_i(s_{1i}, s_{2i}, s_{3i}, d_{1i}, d_{2i}, d_{3i})$$

#### Dynamic Programming Algorithm

$$f_i(s_{1i}, s_{2i}, s_{3i}) = \max_{\substack{d_{1i} \\ d_{2i} \\ d_{3i}}} [R_i(s_{1i}, s_{2i}, s_{3i}, d_{1i}, d_{2i}, d_{3i}) + f_{i-1}(s_{1i-1}, s_{2i-1})]$$

شکل (۱۱). مرحله برنامه ریزی پویا با بیش از یک متغیر تصمیم و حالت

شکل ۱۱ یک مرحله برنامه ریزی پویا را نشان می دهد که بیش از یک متغیر حالت و تصمیم دارد. توابع بازگشت و انتقال برای این مرحله در شکل داده شده اند. همان گونه که نشان داده شده است. دو متغیر حالت خروجی وجود دارند که با دو تابع انتقال مشخص می شوند. این توابع انتقال دارای شش متغیر مستقل هستند: سه متغیر تصمیم و سه متغیر حالت. الگوریتم برنامه ریزی پویا در شکل داده شده است و نشان می دهد که برای تعیین مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم یک جستجوی سه متغیره لازم است. همچنین سه متغیر حالت بایستی بصورت جامع لیست شوند تا اطلاعات جدولی برای

<sup>1</sup> Transforms

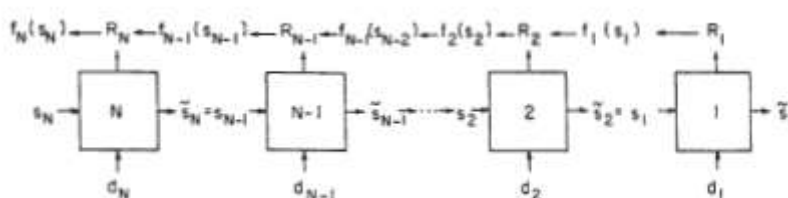
بهینه‌سازی جزئی در یک مرحله توسعه پیدا کند. به هر حال، عدد سه، حد تعداد متغیرهای حالت در هر مرحله است، چون تلاش محاسباتی لازم برای بدست آوردن تصمیمات بهینه سه متغیره می‌باشد.

توابع گذر در این تصویر نشان داده نشده‌اند. اینها معادلاتی هستند که روابط ما بین خروجی های یک مرحله و ورودی های مراحل مجاور را بدست می‌دهند. در اینجا  $\tilde{d}_i$  و  $\tilde{s}_2$  هر دو می‌توانند ورودیهای مرحله 1-1 باشند یا اینکه ورودی های دو مرحله باشند که همان مورد مربوط به شاخه های واگرا می‌باشند.

بحث با مسئله بهینه‌سازی سری<sup>۱</sup> که در آن خروجی های یک مرحله ورودی های مرحله بعد هستند دنبال می‌شود. سپس این امر برای حلقه ها و شاخه ها نیز توسعه داده می‌شود.

### بهینه‌سازی سیستمهای سری [7]

در یک سیستم سری خروجی یک مرحله ورودی مرحله بعدی است. این موضوع در شکل ۱۲ نشان داده شده است و به راحتی در هر مرحله یک متغیر تصمیم‌گیری وجود دارد. معادلات تابعی داده شده در شکل ۱۲ شامل توابع انتقال، بلوکها، و تابع بازگشت می‌باشند. بلوکها، رابطه مابین این مراحل را بدست می‌دهند. توابع بازگشت اندازه‌ای از سود یا هزینه را در مرحله نشان می‌دهد و ماکزیمم جمع سودها از هر مرحله به وسیله تعیین مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم‌گیری تعیین می‌شود. مثالهای ۱ و ۲ سیستمهای سری بودند.



شکل ۱۲. نمودار تابعی و معادلات تابع برای یک فرآیند سری

مسائل بهینه‌سازی سیستم سری چهار نوع هستند: مقدار اولیه<sup>۲</sup>، مقدار نهایی<sup>۳</sup>، مقدار مرزی دو نقطه<sup>۴</sup>، و مسائل چرخه ای<sup>۵</sup>. در یک مسئله مقدار اولیه  $S_N$  یک ثابت شناخته شده است، در یک مسئله مقدار نهایی  $\tilde{d}_1$  یک ثابت شناخته شده است و در مسئله مقدار مرزی دو نقطه هر دوی  $S_N$  و  $\tilde{d}_1$  شناخته شده هستند. در یک مسئله چرخه ای  $\tilde{d}_1 = S_N$  و باید بهترین مقدار که  $F_N(S_N)$  را ماکزیمم می‌کند، تعیین شود.

**مسئله مقدار اولیه:** الگوریتم برنامه‌ریزی پویا برای  $i$  امین مرحله مسئله مقدار اولیه همان است که در شکل ۱۲ داده شده است.

$$f_i(s_i) = \max_{d_i} [R_i(s_i, d_i) + f_{i-1}(s_{i-1})] \quad (7)$$

بازگشت بهینه در مرحله  $i$  یعنی  $f_i$  تنها تابعی از  $s_i$ ، متغیرهای حالت در مرحله  $i$ ، است. برای نشان دادن این نتیجه توابع انتقال و قيود بکار می‌روند:

$$s_{i-1} = \tilde{s}_i = T_i(s_i, d_i) \quad (8)$$

با جایگزینی رابطه فوق در رابطه (۷):

$$f_i(s_i) = \max_{d_i} [R_i(s_i, d_i) + f_{i-1}(T_i(s_i, d_i))] \quad (9)$$

<sup>1</sup> Serial Optimization Problem

<sup>2</sup> Initial Value

<sup>3</sup> Final Value

<sup>4</sup> Two-Point Boundary Value

<sup>5</sup> Syclic Problems

که نشان می‌دهد با بهینه کردن  $d_i$ ،  $f_i$  تابعی از  $s_i$  است.

الگوریتم معادله (۹) از مرحله ۲ تا مرحله  $N-1$  قابل اعمال است. در مرحله ۱ الگوریتم برنامه‌ریزی پویا برابر است با:

$$f_1(s_1) = \max_{d_1} R_1(s_1, d_1) \quad (10)$$

این تنها الگوریتمی است که شامل بازگشت بهینه از مرحله قبلی‌اش نمی‌شود.

در مرحله آخر، مرحله  $N$ ، الگوریتم برنامه‌ریزی پویا برابر است با:

$$f_N(s_N) = \max_{d_N} (R_N(s_N, d_N) + f_{N-1}[T_N(s_N, d_N)]) \quad (11)$$

اگر مقدار  $s_N$  یک ثابت شناخته شده باشد ماگزیمم برگشت برابر  $F_N(s_N)$  خواهد بود و ثبت کردن  $s_N$  نیز مورد نیاز نیست. این مسئله به عنوان یک مسئله بهینه‌سازی  $N$  تصمیم و بدون حالت شناخته می‌شود. به هر حال اگر  $s_N$  یک ثابت نباشد و بتوان برای ماگزیمم کردن  $F_N$  مانند یک متغیر تصمیم با آن رفتار کرد، الگوریتم برنامه‌ریزی پویا در مرحله  $N$  برابر خواهد بود با:

$$f_N = \max_{\substack{d_N \\ s_N}} [R_N(s_N, d_N) + f_{N-1}(s_{N-1})] \quad (12)$$

این یک بهینه‌سازی جزئی دو تصمیم و بدون حالت در مرحله  $N$  می‌باشد. و متعاقباً بصورت مسئله بهینه‌سازی تصمیم  $(N+1)$  و بدون حالت شناخته می‌شود و در آن  $N+1$  متغیر مستقل وجود دارد. مجموعه مقادیر متغیرهای تصمیم  $d_i$  و متغیرهای حالت  $s_N$  که تابع بازگشت را ماگزیمم می‌کنند **سیاست بهینه**<sup>۱</sup> نامیده می‌شود.  $N$  تعداد بهینه‌سازی جزئی برای بدست آوردن یک بازگشت بهینه و سیاست بهینه برای سیستم مورد نیاز بوده است.

**مسئله مقدار نهایی:** برای این مورد خروجی مرحله اول،  $\tilde{s}_1$ ، یک ثابت شناخته شده است. برای حل این مسئله دو رویکرد وجود دارد **تبدیل حالت**<sup>۲</sup> و **تبدیل تصمیم**<sup>۳</sup>.

تبدیل حالت یعنی تبدیل مسئله مقدار نهایی به مسئله مقدار اولیه از طریق به دست آوردن  $N$  تابع انتقال معکوس، یعنی تبدیل توابع انتقال برای  $s_i$  بر حسب  $\tilde{s}_i$  همان گونه که در زیر نشان داده شده است.

$$i=1,2,\dots,N, s_i = \tilde{T}_1(\tilde{s}_i, d_i) \quad (13)$$

این امر منجر به معکوس شدن جهت فلشهای شکل ۱۲ می‌شود و در شکل ۱۳ (a) نشان داده شده است. نامگذاری دوباره مراحل مسئله را به مورد مقدار اولیه تبدیل می‌کند. مسئله دارای  $(N-1)$  تک حالت، بدون تصمیم و یک بدون حالت، تک تصمیم می‌باشد.

در بعضی موارد تبدیل توابع انتقال ممکن نیست و از روش تبدیل تصمیم استفاده می‌شود. در اینجا نقشهای  $d_1$  و  $s_1$  در هم آمیخته می‌شوند. تابع انتقال مرحله اول برابر است با:

$$\tilde{s}_i = T_1(s_1, d_1) = constant \quad (14)$$

این معادله می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$d_1 = \tilde{T}_1(s_1, \tilde{s}_1) \quad (15)$$

و  $d_1$  مخصوصاً با تعیین  $s_1$  تعیین شده است چون  $\tilde{s}_1$  یک ثابت برای این مورد است. مرحله 1 بدون تصمیم است و با مرحله 2 در هم آمیخته است. این مطلب در شکل ۱۳ (a) بصورت نمودار نشان داده شده است که در آن به نشان این امر

<sup>1</sup> Optimal Policy

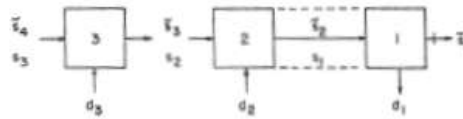
<sup>2</sup> State Conversion

<sup>3</sup> Decision Conversion

که  $d_1$  دیگر یک تصمیم نیست پیکان روی آن معکوس شده است و به نشان اینکه  $\tilde{s}_1$  یک ثابت است پیکان از آن گذشته است.



a. State Inversion



b. Decision Inversion

شکل ۱۳. نمودارهای تابعی تبدیل حالت و تصمیم برای یک مسئله سری مقدار نهایی

معادله تابعی برای مجموعه مراحل 1 و 2 برابر است با:

$$f_2(s_2) = \max_{d_2} [R_2(s_2, d_2) + R_1(s_1, d_1)] \quad (16)$$

که می توان آن را با معادله (۱۶) ترکیب کرد و بدست آورد:

$$s_1 = \tilde{s}_2 = T_2(s_2, d_2) \quad (17)$$

تا معادله زیر به دست آید:

$$f_2(s_2) = \max_{d_2} \{R_2(s_2, d_2) + R_1[T_2(s_2, d_2), \tilde{T}_1[T_2(s_2, d_2), s_1]]\}$$

یا

$$f_2(s_2) = \max_{d_2} [R_2(s_2, d_2) + R_1(s_2, d_2)] \quad (18)$$

این ها نشان می دهند که تلفیق مراحل 1 و 2 یک مرحله جدید به دست می دهد. این مرحله جدید یک بهینه سازی جزئی تک تصمیم و تک حالت لازم دارد. شکل نهایی نمودار تابعی تبدیل تصمیم در شکل ۱۳ (b) نمایش داده شده است. بعد از انجام تبدیل تصمیم، روند مسئله سری معمول برای مابقی مراحل مسئله اعمال می شود. بهینه سازی کلی شامل N-1 مرحله کلی با N-2 تک تصمیم، بهینه سازی جزئی تک - حالت، و در مرحله بهینه سازی جزئی بدون حالت و دو تصمیم می شود.

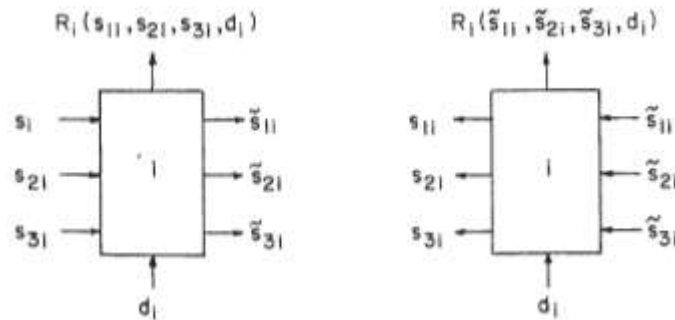
مثال زیر اثر تعداد متغیرهای حالت در یک مرحله را روی تبدیل حالت نشان می دهد. همان گونه که در مثال نشان داده شده است سه مورد برای توجه کردن وجود دارد.

### مثال ۳

در تبدیل حالت، در هر مرحله ممکن است سه مورد اتفاق بیافتد: مرحله دارای همان تعداد متغیرهای حالت ورودی به عنوان خروجی هایش می باشد، مرحله دارای تعداد بیشتری متغیر حالت ورودی نسبت به خروجی ها است و یا مرحله

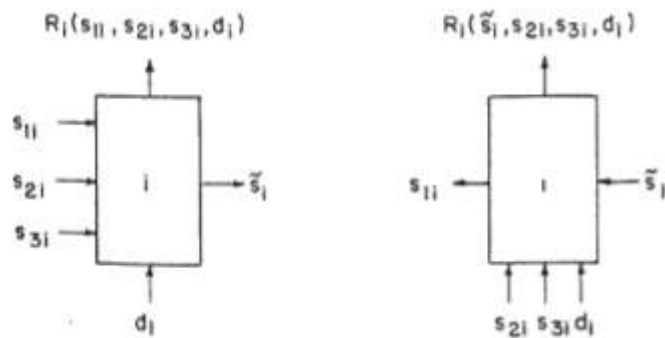
دارای تعداد کمتری متغیر حالت ورودی نسبت به خروجی ها است. با فرض اینکه توابع انتقال می توانند معکوس شوند برای این موارد با سه متغیر حالت و یک متغیر تصمیم در هر مرحله، توابع انتقال را به دست آورید.

(a) ورودی متغیر حالت برابر خروجی ها هستند.



در این مورد تبدیل حالت دارای متغیرهای ورودی و خروجی در هم آمیخته است.

(b) ورودی های متغیر حالت بیش از خروجی ها هستند.

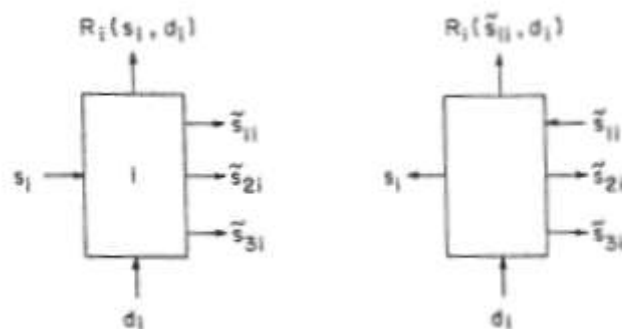


در این حالت تنها یک تابع انتقال وجود دارد و برای تبدیل حالت بصورت زیر نوشته می شود:

$$s_{1i} = \hat{T}_i(\tilde{s}_1, s_{2i}, s_{3i}, d_i)$$

متغیرهای حالت  $S_{2i}$  و  $S_{3i}$  به همراه  $d_i$  به متغیر تصمیم تبدیل شده اند. تبدیل حالت در این مورد با تبدیل متغیرهای حالت به متغیرهای تصمیم برای بهینه سازی برنامه ریزی پویا بسیار سودمند است.

(c) خروجی های متغیر حالت بیش از ورودی ها هستند.



در این مورد سه تابع انتقال وجود دارند ولی همان گونه که نشان داده شده است تنها یکی تبدیل شده است:

$$\tilde{s}_{1i} = T_{1i}(s_i, d_i)$$

$$s_i = \hat{T}_{1i}(\tilde{s}_{1i}, d_i)$$

$$\tilde{s}_{2i} = T_{2i}(s_i, d_i)$$

$$s_{2i} = \hat{T}_{2i}(\tilde{s}_{1i}, d_i)$$

$$\tilde{s}_{3i} = T_{3i}(s_i, d_i)$$

$$s_{3i} = \hat{T}_{3i}(\tilde{s}_{1i}, d_i)$$

دو تابع انتقال باقی مانده به معادلاتی تبدیل شده‌اند که خروجی  $\tilde{s}_{2i}$  و  $\tilde{s}_{3i}$  را از مقادیر  $d_i$ ،  $S_{1i}$  محاسبه می‌کنند.

**مسئله مقدار مرزی دو نقطه‌ای:** این نوع از مسئله هنگامی پیش می‌آید که هر دوی مقادیر اولیه و پایانی متغیرهای حالت  $\tilde{s}_1$  و  $S_N$  مشخص باشند. مسئله محتاج تبدیل تصمیم است چون تبدیل حالت یک مسئله مقدار مرزی دو نقطه را بدست می‌دهد. تبدیل تصمیم با ترکیب مراحل 1 و 2، همان گونه که در شکل ۱۳ (b) نشان داده شده است اجرا می‌شود. سپس همانند یک مسئله مقدار اولیه بهینه‌سازی جزئی ادامه می‌یابد. الگوریتم برنامه‌ریزی پویا برای ترکیب مراحل 1 و 2 همانند رابطه (۱۸) است. این یک بهینه‌سازی تک تصمیم. تک حالت در مرحله 1-2 است چون  $\tilde{s}_1$  یک ثابت مشخص است. با داشتن الگوریتم برنامه‌ریزی پویا در مرحله 3 بصورت زیر بهینه‌سازی بطور عادی پیش می‌رود:

$$f_3(s_3) = \max_{d_3} \{R_3(s_3, d_3) + f_2[T_3(s_3, d_3)]\} \quad (۱۹)$$

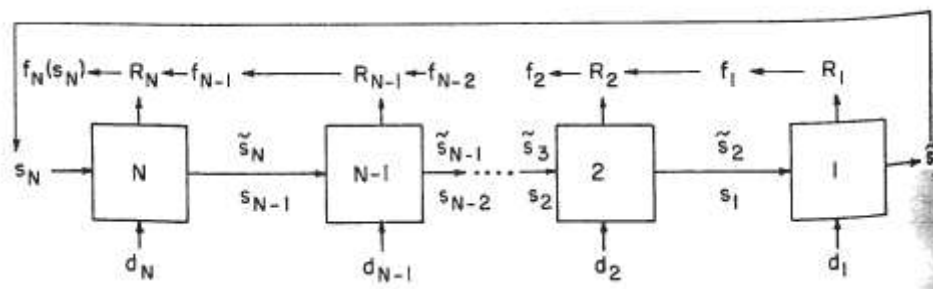
در مرحله N الگوریتم برنامه‌ریزی پویا برابر است با:

$$f_N(s_N) = \max_{d_N} \{R_N(s_N, d_N) + f_{N-1}(s_{N-1})\} \quad (۷-۲۰)$$

این یک بهینه‌سازی جزئی تک تصمیم و بدون حالت است چون  $S_N$  یک ثابت است. برای حل مسئله مقدار مرزی دو نقطه ابتدا یک تبدیل تصمیم اجرا می‌شود و سپس بهینه‌سازی جزئی برای یک مسئله مقدار اولیه صورت می‌پذیرد. این شامل N-2 بهینه‌سازی جزئی تک حالت، تک تصمیم و یک بهینه‌سازی جزئی بدون حالت، تک تصمیم می‌شود. مسائل مقدار مرزی دو نقطه همواره به تبدیل تصمیم نیاز دارند.

**بهینه‌سازی سیستم چرخه‌ای:** سیستم چرخه‌ای مورد خاصی از مسئله مقدار مرزی دو نقطه‌ای است که در آن  $\tilde{s}_1 = S_N = C$  است و نمودار تابعی آن در شکل ۱۴ نشان داده شده است. روش حل این مسئله این است که یک مقدار  $S_N = C$  انتخاب کنیم و برای انتخاب بازگشت بهینه بعنوان مسئله مقدار مرزی دو نقطه کار را ادامه دهیم. الگوریتم برنامه‌ریزی پویا در مرحله N برابر است با:

$$f_N(c) = \max_{d_N} [R_N(C, d_N) + f_{N-1}(s_{N-1})] \quad (۲۱)$$



شکل ۱۴. نمودار تابعی برای یک سیستم چرخه‌ای N مرحله‌ای

سپس یک جستجوی تک متغیره با تغییر دادن C تا پیدا شدن بازگشت ماکزیمم  $F_N(C)$  صورت می‌گیرد. **جستجوی تقسیم طلایی<sup>۱</sup>** یا فیبوناچی برای مقادیر حالت برش  $S_N = \tilde{s}_1 = C$  برای یافتن بهترین مقدار برای ماکزیمم کردن  $F_N(C)$  می‌تواند مورد استفاده قرار گیرند. ثابت کردن مقدار متغیر حالت بعنوان برش حالت تلقی می‌گردد و در نمودار تابعی بوسیله دو خط مورب روی پیکان متغیر حالت نشان داده می‌شود. مثال زیر روند کاری بهینه‌سازی چرخه‌ای را نشان می‌دهد.

<sup>1</sup> Golden Section Search



## مثال ۴

در بهینه‌سازی برنامه‌ریزی پویای فرآیند اتصال برای اسید سولفوریک که بعداً در همین فصل توضیح داده شده است، نمودار تابعی نهایی از پنج مرحله، به همراه چرخه بازگشت با دو متغیر حالت تشکیل شده است. در این مسئله برش حالت هر دو متغیر در حلقه بازگشت ضروری است. این مسئله نشان می‌دهد که این امر منجر به ادغام مراحل 1 و 2 با مرحله 3 می‌شود و مسئله بهینه‌سازی چرخه ای سه مرحله‌ای به دست می‌دهد. الگوریتم برنامه‌ریزی پویا و توابع انتقال در مرحله 1 برابر هستند با:

$$f_1(s_1) = \max_{d_1} [R_1(s_1, d_1)] \quad \tilde{s}_{11} = T_{11}(s_1, d_1)$$

$$\tilde{s}_{21} = T_{21}(s_1, d_1)$$

با برش حالت روی چرخه بازیافت داریم:

$$\tilde{s}_{11} = s_{15} = \text{constant}$$

$$\tilde{s}_{21} = s_{25} = \text{constant}$$

با اجرای تبدیل تصمیم با استفاده از توابع انتقال  $\tilde{s}_{11}$  و  $\tilde{s}_{21}$  از خروجی های ثابت به ورودی ها تبدیل می‌شوند. با حل تابع انتقال برای  $S_1$  و  $d_1$  بر حسب  $\tilde{s}_{11}$  و  $\tilde{s}_{21}$  به دست می‌آید:

$$s_1 = \hat{T}_{11}(\tilde{s}_{11}, \tilde{s}_{21})$$

$$s_1 = \hat{T}_{21}(\tilde{s}_{11}, \tilde{s}_{21})$$

متعاقباً هر دو  $S_1$  و  $d_1$  بوسیله این توابع انتقال محاسبه می‌شوند در صورتی که  $\tilde{s}_{11}$  و  $\tilde{s}_{21}$  مشخص باشد، این به این معناست که  $F_1(S_1)$  نیز یک مقدار مشخص است.

$$f_1(s_1) = R_1(\tilde{s}_{11}, \tilde{s}_{21})$$

در مرحله 1 بهینه‌سازی جزئی وجود ندارد در خروجی مرحله 2 نیز ثابت است و داریم  $\tilde{s}_2 = S_1$ . الگوریتم برنامه‌ریزی پویا و تابع انتقال در مرحله 2 برابر هستند با:

$$f_2(s_2) = \max_{d_2} [R_2(d_2, s_2) + f_1(s_1)] \quad \tilde{s}_2 = T_2(s_2, d_2) = s_1$$

از آنجا که خروجی ثابت  $\tilde{s}_2$  تصمیم  $d_2$  را به خروجی محاسبه شده بوسیله تبدیل تصمیم. یعنی  $d_2 = \hat{T}_2(\tilde{s}_2, s_2)$  که در آن داریم  $\tilde{s}_2 = s_1 = \hat{T}_{11}(\tilde{s}_{11}, \tilde{s}_{21})$ ، تبدیل می‌کند در مرحله 2 هیچ تصمیمی وجود ندارد. از آنجا که

همان گونه که در رابطه بعدی نشان داده شده است هیچ بهینه‌سازی جزئی در

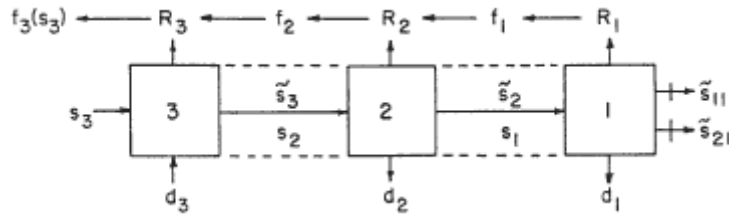
$$f_2(s_2) = R_2(s_2, \tilde{s}_{11}, \tilde{s}_{21}) + R_1(\tilde{s}_{11}, \tilde{s}_{21})$$

مرحله 2 وجود ندارد:

الگوریتم برنامه‌ریزی پویا و تابع انتقال در مرحله 3 برابر است با:

$$f_3(s_3) = \max_{d_3} [R_3(d_3, s_3) + f_2(s_2)] \quad \tilde{s}_3 = T_3(s_3, d_3) = s_2$$

این یک بهینه‌سازی جزئی تک تصمیم، تک حالت است و نمودار تابعی برای ترکیب مراحل 1، 2 و 3 در زیر نشان داده شده است:



الگوریتم برنامه‌ریزی پویا و تابع انتقال برای مرحله 4 یک بهینه‌سازی جزئی تک‌تصمیم و تک حالت بصورت زیر به‌دست می‌آید:

$$f_4(s_4) = \max_{d_4} [R_4(d_4, s_4) + f_3(s_3)] \quad \tilde{s}_4 = T_4(s_4, d_4) = s_3$$

الگوریتم برنامه‌ریزی پویا و تابع انتقال برای مرحله 5 یک بهینه‌سازی جزئی تک‌تصمیم و بدون حالت بصورت زیر به‌دست می‌دهد:

$$f_5(s_{15}, s_{25}) = \max_{d_5} [R_5(s_{15}, s_{25}, d_5) + f_4(s_4)] \quad \tilde{s}_5 = T_5(s_{15}, s_{25}, d_5) = s_4$$

برای یافتن بهترین مقدار  $S_{15}$ ,  $S_{25} = \tilde{s}_{21}$ ,  $\tilde{s}_{11}$  می‌توان یک جستجوی دو متغیره که  $F_5(S_{15}, S_{25})$  را ماکزیمم می‌کند انجام داد. همان گونه که خواهیم دید این یک خط مرزی برای مسئله برنامه‌ریزی پویا است. شاید فردی بجای اینکه تبدیل تصمیم دهد و سپس یک جستجوی دو متغیره انجام دهد با استفاده از یک جستجوی چند متغیره روی پنج متغیر تصمیم مستقیماً به بهینه‌سازی مسئله پردازد.

### سیستمهای شاخه دار<sup>1</sup>

سیستم‌های شاخه دار می‌توانند دارای شاخه‌های واگرا یا همگرا باشند. یک چرخه پیشرو (کنار گذر) یک مورد خاص از شاخه واگرا و یک چرخه پسخور (برگشتی) یک مورد خاص از شاخه همگرا هستند. بحث با شاخه واگرا شروع می‌شود که از مورد دیگر راحت تر است ولی نه لزوماً برای بهینه‌سازی.

**شاخه‌های واگرا<sup>2</sup>:** نمودار تابعی یک شاخه واگرا در شکل ۱۵ داده شده است. شاخه شامل مراحل 1' تا m' است و این مراحل دارای توابع انتقال هویت‌های ضمنی و تابع بازگشت‌های زیر می‌باشند:

$$\tilde{s}'_i = T'_i(s'_i, d'_i) \quad \text{توابع انتقال:} \quad (22)$$

$$\tilde{s}'_i = s'_{i-1} \quad \text{هویت‌های ضمنی:} \quad (23)$$

$$R'_i = R'_i(s'_i, d'_i) \quad \text{توابع بازگشت:} \quad (24) \quad \text{برای } i' = 1', 2', \dots, m'$$

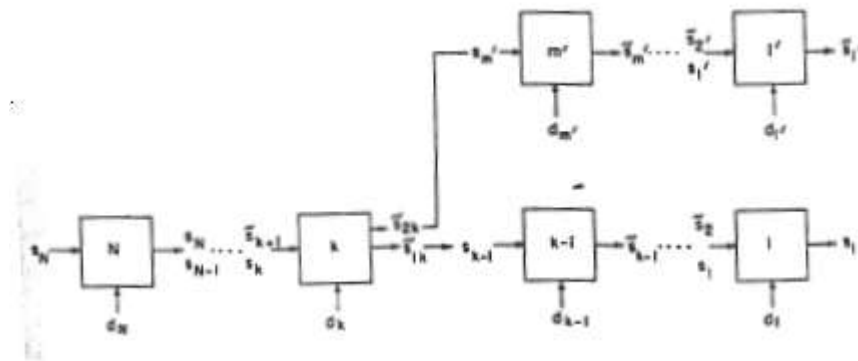
بازگشت ماکزیمم برای شاخه واگرا برابر است با:

$$f'_m(s'_m) = \max_{d'_1, d'_2, \dots, d'_m} \left( \sum_{i=1}^{m'} R'_i[d'_i, s'_m] \right) \quad (25)$$

برای یافتن  $F'_m(S'_m)$  حل یک مسئله سری مقدار اولیه که به راحتی صورت می‌گیرد لازم است. اگر مقدار نهایی شاخه واگرا مشخص باشد تبدیل تصمیم صورت گرفته است و مرحله 1' با مرحله 2' ترکیب شده است. سپس بهینه‌سازی تک تصمیم، تک حالت تا مرحله m' ادامه می‌یابد.

<sup>1</sup> Branched Systems

<sup>2</sup> Diverging Branches



شکل ۱۵. نمودار تابعی یک سیستم شاخه ای واگرا

برای متصل کردن شاخه به سیستم اصلی در مرحله  $k$ ، توابع انتقال، قیود (روابط ضمنی) و الگوریتم برنامه‌ریزی‌های پویای زیر مورد نیاز است.

$$\tilde{s}_{1k} = T_{1k}(s_k, d_k) = s_{k-1} \quad \text{توابع انتقال:} \quad (26)$$

$$\tilde{s}_{2k} = T_{2k}(s_k, d_k) = s'_m \quad (27)$$

$$\tilde{s}_{1k} = s_{k-1}, \tilde{s}_{2k} = s'_m \quad \text{هویت‌های ضمنی:} \quad (28)$$

$$f_k(s_k) = \max_{d_k} [R_k(s_k, d_k) + f'_m(s'_m) + f_{k-1}(s_{k-1})] \quad \text{الگوریتم برنامه‌ریزی پویا:} \quad (29)$$

برای به دست آوردن الگوریتمی شامل تنها  $d_k$  و  $s_k$  می‌توان این رابطه را با توابع انتقال ترکیب کرد:

$$f_k(s_k) = \max_{d_k} \{R_k(s_k, d_k) + f'_m[T_{2k}(s_k, d_k) + f_{k-1}[T_{1k}(s_k, d_k)]]\} \quad (30)$$

این معادله نشان می‌دهد که در مرحله  $k$  یک بهینه‌سازی جزئی تک تصمیم و تک حالت وجود داشته است که از آن به **جذب شاخه واگرا**<sup>۱</sup> یاد می‌شود. بهینه‌سازی جزئی به منظور تکمیل راه حل می‌تواند تا مرحله  $N$  ادامه یابد.

یک حالت خاص از شاخه واگرا، چرخه پیشرو<sup>۲</sup> است که در شکل ۱۶ نشان داده شده است. هدف تبدیل این ساختار به شاخه واگراست و سپس حل آن بصورتی که توضیح داده شد. حلقه در مرحله  $j$  وارد می‌شود و توابع بازگشت و انتقال در این مرحله عبارتند از:

$$\tilde{s}_j = T_j(s_{1j}, s_{2j}, d_j) \quad (31)$$

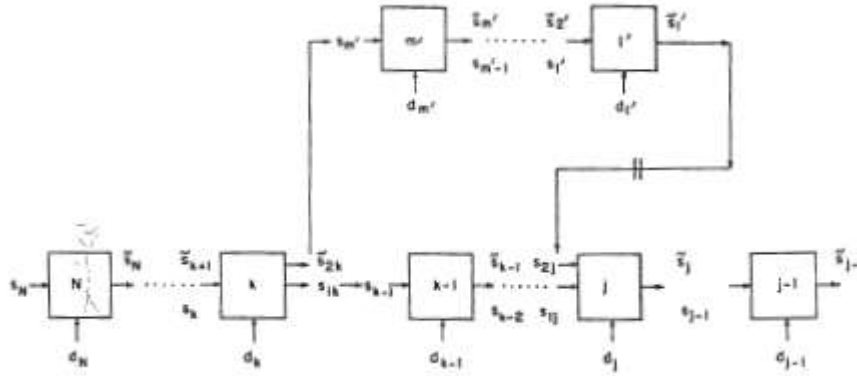
$$R_j = R_j(s_{1j}, s_{2j}, d_j) \quad (32)$$

در این زمان مقدار  $s'_1 = S_{2j}$  انتخاب می‌شود (حالت برش) و چرخه خوراک - جلو به یک شاخه واگرای دارای خروجی ثابت تبدیل می‌شود. در مرحله  $j$  الگوریتم برنامه‌ریزی پویا برابر است با:

$$f_j(s_{1j}) = \max_{d_j} \{R_j[s_{1j}, s_{2j}, d_j] + f_{j-1}[T_j(s_{1j}, s_{2j}, d_j)]\} \quad (33)$$

<sup>1</sup> Absorption of Diverging Branch

<sup>2</sup> Feed-Forward



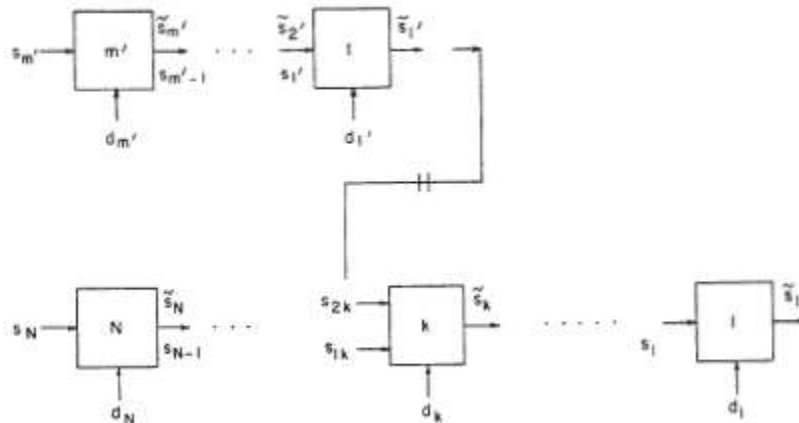
شکل ۱۶. نمودار تابعی یک چرخه پیشرو

این یک بهینه‌سازی جزئی تک تصمیم و تک حالت در مرحله  $j$  است چون  $S_{2j}$  ثابت است. مقدار  $F_{j-1}$  از بهینه‌سازی جزئی مرحله 1 تا  $j-1$  قابل دستیابی است. بهینه‌سازی جزئی اکنون می‌تواند در قسمت اصلی و در چرخه تا مرحله  $j$  ادامه یابد. هنگامی که به مرحله  $k$  ام رسید الگوریتم برنامه‌ریزی پویا برابر خواهد بود با:

$$f_k(s_k) = \max_{d_k} [R_k(s_k, d_k) + f_{k-1}(s_{k-1}) + f'_m(s'_m)] \quad (34)$$

که در آن  $F_k(S_k)$  برای بهترین مقدار  $dk$  و یک مقدار حالت برش از  $S_{2j}$ . یعنی یک مقدار برای  $S_{2j}$  که بعنوان اولین نقطه یک جستجوی تک متغیر برگزیده شده است. تعیین شده است. سپس لازم است تا برای انتخاب مقدار جدید  $S_{2j}$  به مرحله  $j$  بازگردیم و بهینه‌سازی های جزئی را برای بدست آوردن مجموعه جدید  $F_k(S_k)$  تکرار کنیم. اینها برای بهترین مقادیر با مجموعه قبلی مقایسه شده‌اند. این روند با استفاده از یک جستجوی تک متغیره برای یافتن بهترین مقدار  $S_{2j} = S_{2j}^*$  ادامه می‌یابد. این بهترین مقدار همانی است که منجر به بیشترین مقدار برای  $F_k(S_k)$  می‌شود. سپس بهینه‌سازی جزئی برای تکمیل حل مسئله می‌تواند تا مرحله  $N$  ادامه یابد.

**شاخه های همگرا<sup>۱</sup>:** نمودار تابعی برای شاخه همگرا در شکل ۱۷ داده شده است. شاخه شامل مراحل  $1'$  تا  $m'$  می‌شود. یک رویکرد برای بهینه‌سازی این سیستم این است که تبدیل حالت روی شاخه صورت پذیرد و این امر این مسئله را به مسئله شاخه واگرا تبدیل خواهد کرد. متأسفانه ممکن است این روش با مشکل همراه باشد.



شکل ۱۷. نمودار تابعی سیستم شاخه ای همگرا

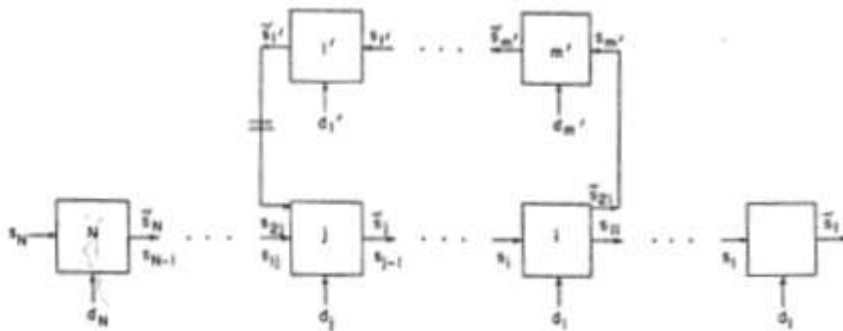
<sup>1</sup> Converging Branches

روش دیگری نیز وجود دارد که برای اجرا کردن راحت تر است. ابتدا الگوریتم برنامه ریزی پویا در مرحله  $k$  را می توان بصورت زیر نوشت:

$$f_k(s_{1k}) = \max_{\substack{d_k \\ s_{2j}}} [R_k(s_{1k}, s_{2k}, d_k) + f_{k-1}(s_{k-1}) + f'_m(s'_m)] \quad (35)$$

این معادله شامل بازگشت بهینه از شاخه همگرای  $F'_m(S'_m)$  می شود. این الگوریتم با  $S_{2k}$  مانند یک متغیر حالت رفتار می کند. یک جستجوی دو متغیره به منظور ماکزیمم کردن سمت راست معادله روی  $d_k$  و  $S_{2k}$  صورت می گیرد. بازگشت ماکزیمم شاخه بوسیله برش حالت مابین شاخه و مرحله  $k$  که در آن  $S_{2k} = \tilde{s}'_1$  است، بدست می آید. سپس شاخه با یک مسئله مقدار نهایی تبدیل می شود. در صورتی که  $S'_m$  یک متغیر تصمیم باشد و یا به مسئله مقدار مرزی دو نقطه تبدیل می شود. در صورتی که  $S'_m$  ثابت باشد و رویکردهای توصیف شده در مورد آنها قابل اجرا هستند. هنگامی که مقدار بهینه  $F_k(S_{1k})$  تعیین شده بهینه سازیهای جزئی بعنوان یک مسئله سری تا مرحله  $N$  ام به پیش می روند. یک مورد خاص از شاخه همگرا چرخه خوراک-عقب است که در شکل ۱۸ نشان داده شده است و چرخه شامل مراحل  $1'$  تا  $m'$  می باشد. مشخص شد که چرخه خوراک-عقب در طول بهینه سازی جزئی شاخه اصلی به شاخه همگرا تبدیل خواهد شد. با اعمال بهینه سازی های جزئی از مرحله ۱ تا مرحله  $i$ . الگوریتم برنامه ریزی پویا در مرحله  $i$  ام برابر است با:

$$f_i(s_i) = \max_{d_i} [R_i(s_i, d_i) + f_{i-1}(s_{i-1})] \quad (36)$$



شکل ۱۸. نمودار تابعی برای یک چرخه خوراک-عقب

و توابع انتقال برای این مرحله برابرند با:

$$\tilde{s}_{2i} = T_{2i}(s_i, d_i) \quad (37)$$

$$\tilde{s}_{1i} = T_{1i}(s_i, d_i) \quad (38)$$

در مرحله  $i$  ام، خروجی  $\tilde{s}_{2i}$  دقیقاً بوسیله ورودی  $S_i$  و تصمیم  $d_i$  تعیین می شود. چون  $\tilde{s}_{2i} = S'_m$  می باشد نمایانگر انتهای حلقه خوراک-عقب است و آن را به شاخه همگرا تبدیل می کند.

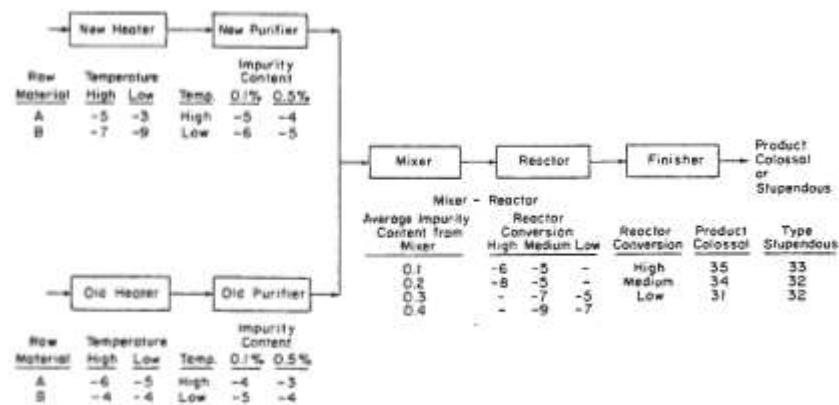
با ادامه بهینه سازی جزئی تا مرحله  $j$  الگوریتم برنامه ریزی پویا در این مرحله همانند شاخه واگرا می باشد، همان گونه که معادله (۳۵) نشان می دهد. با استفاده از تابع انتقال داریم:

$$s_{j-1} = T_j(s_{1j}, s_{2j}, d_j) \quad (39)$$

سپس معادله الگوریتم برنامه ریزی پویای (۳۵) برابر می شود با:

$$f_j(s_{1j}) = \max_{\substack{d_j \\ s_{2j}}} \{R_j(s_{1j}, s_{2j}, d_j) + f_{j-1}[T_j(s_{1j}, s_{2j}, d_j)] + f'_m(s'_m)\} \quad (40)$$

با در نظر گرفتن  $S_{2j}=S'_m$  بعنوان متغیر تصمیم مقادیر  $F'_m(S'_m)$  بازگشت بهینه از چرخه خوراک-عقب تعیین می‌شوند. چون  $S'_m$  ثابت است، چرخه خوراک-عقب یک مسئله مقدار مرزی دو نقطه است و  $S_{2j}, \bar{S}_1 = S_{2j}$  برای ما کریمم کردن  $F_j(S_{1j})$  یافت شده است. در مرحله  $j$  یک بهینه‌سازی جزئی دو تصمیم و تک حالت مورد نیاز است. مثال زیر برخی از روشهای توضیح داده شده را شرح می‌دهد. این مثال توسط پروفیسور P.J.Wilde برای کلاس بهینه‌سازی او در دانشگاه استنفورد طراحی شده است [6].



شکل ۱۹. نمودار جریان یک فرآیند تولیدی به همراه هزینه اجرایی و مبالغ جدول بندی شده

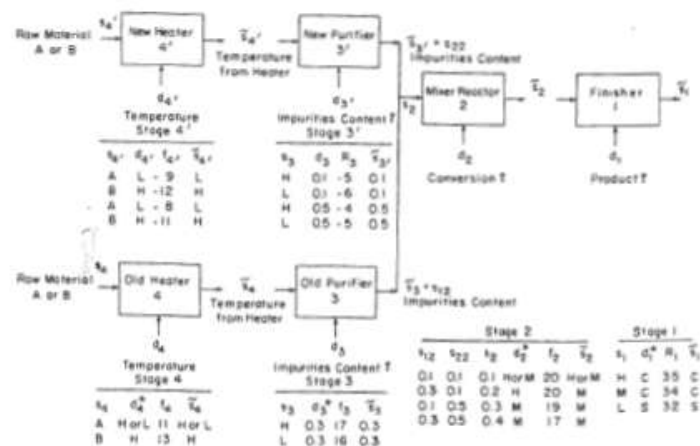
## مثال ۵

یک فرآیند تولیدی همان گونه که در شکل ۱۹ نشان داده شده است به همراه شرایط عملیاتی و هزینه‌ها برای هر واحد نمایش داده شده است. مواد خام که در دو نوبت مختلف A و B می‌آیند بصورت پشت سر هم گرم می‌بینند و قبل از اینکه برای تبدیل شدن به مواد ناخالص وارد راکتور شوند خالص می‌شوند. مواد ناخالص در یک پاک کننده<sup>۱</sup> تمیز می‌شوند و محصولات نهایی فروخته می‌شوند. یک خط گرم کننده-خالص کننده<sup>۲</sup> جدید ساخته شده است و بصورت موازی با خط قدیمی فعالیت می‌کند. واحد جدید همان اندازه مقدار مواد واحد قدیمی را فرآورش می‌کند که بعداً مخلوط می‌شوند و به راکتور پمپ می‌شوند. ناخالصی محتوی داخل مخلوط کننده میانگین یابی می‌شود. بعد از مراحل واکنش و تمیز شدن دو درجه از محصول می‌تواند به بازار عرضه شود، حجیم<sup>۳</sup> و با ارزش<sup>۴</sup>. می‌خواهیم سود ما کریمم و سیاست بهینه متناظر آن را برای عملیات کارخانه پیدا کنیم. دقت شود که لازم نیست که خط گرم کردن-تصفیه کردن<sup>۵</sup> قدیم و جدید از یک نوع مواد خام استفاده کنند.

مسئله شامل یک شاخه همگرا همراه انتخاب مواد خام برای مقادیر ورودی شاخه و سیستم اصلی می‌باشد. نمودار تابعی برای شاخه و سیستم اصلی در شکل ۲۰ نشان داده شده است. با استفاده از الگوریتم برنامه‌ریزی پویا تصمیمات بهینه برای مقادیر مختلف متغیر حالت در مرحله 1 نشان داده شده است. در مرحله 2 الگوریتم برنامه‌ریزی پویا برابر است با:

$$f_2(s_{12}) = \max_{d_2} [R_2(s_{12}, s_{22}, d_2) + f_1(s_1) + f_4(s_{22}, s_{4'})]$$

<sup>1</sup> Finsher  
<sup>2</sup> Heating-Purifying  
<sup>3</sup> Colossal  
<sup>4</sup> Stupendous  
<sup>5</sup> Heating-Purifying



شکل ۲۰. نمودار جریان و سیاست بهینه برای عملیات فرآیند تولید

یک جستجوی دو متغیره برای یافتن بهترین مقادیر  $S_{22}$  روی شاخه و  $d_2^*$  در مرحله 2 که میزان بازگشت از مرحله،  $R_2$ ، سیستم اصلی،  $F_1$  و شاخه  $F_4'$  را برای مقادیر مختلف حالت  $S_{12}$  را ماکزیمم می‌کند، مورد نیاز است. تبدیل تصمیم برای شاخه مورد نیاز است و این نتایج در مراحل  $3', 4'$  برای مقادیر حالت برش 0.1% و 0.5% نشان داده شده‌اند. حداقل هزینه فعالیت شاخه برای یک محتوی ناخالصی 0.1% برابر 9- و برای 0.5% برابر 8- می‌باشد. هم اکنون اطلاعات برای تکمیل بهینه‌سازی جزئی در مرحله 2 فراهم است. برای تشریح این رویکرد فرض کنید محتوی ناخالصی بصورت  $S_{12}=0.3\%$  و مقدار حالت برش برابر  $S_{22}=0.1\%$  باشد و مقادیر متغیر تصمیم  $d_2$  برابر بالا، متوسط و پائین باشد.

این روند در بازه مقادیر  $S_{12}$  به دنبال مقادیر  $S_{22}$  و  $d_2$  بصورت جستجو مدام تکرار می‌شود. نتایج بدست آمده از مرحله 2 در شکل ۲۰ نشان داده شده است.

بهینه‌سازی های جزئی تا مراحل 3 و 4 ادامه می‌یابد و نتایج در شکل ۲۰ به نمایش گذاشته شده است. حداکثر سود بدست آمده 13 با استفاده از B بعنوان خوراک گرم کننده قدیمی و A بعنوان خوراک گرم کننده جدید بدست آمده است. سیاست بهینه را می‌توان از مشاهده مقادیر شکل ۲۰ بدست آورد. همچنین راه حل بهینه دیگری برای مواردی که در آن هر دو گرم کننده یک مقدار خوراک دریافت می‌کنند، نشان داده شده است یعنی A و حداکثر سود برابر با 11 در این مورد بدست می‌آید.

### قوانین ساده کننده و روندها

روشهای قبلی برای استفاده از برنامه‌ریزی پویا در سیستمهای دارای چرخه و شاخه توسط Wilde, Nemhauser, Aris بکار گرفته شد [7]. در یک مقاله پیشتر Nemhauser, Mitten استفاده از برنامه‌ریزی پویا بر شمرده شده بودند [5]. اگر چه این روند در حال حاضر آشکار به نظر می‌رسد ولی برای تاکید بر تکرار آن ارزشمند است:

1. فرآیند به مراحل تجزیه شود.
2. توابع انتقال و بازگشت برای هر مرحله از فرآیند فرموله شود.
3. برای داشتن کمترین متغیر حالت ممکن در هر مرحله، ورودی ها، تصمیمات و خروجی ها برای هر مرحله انتخاب شوند.
4. استفاده از الگوریتم برنامه‌ریزی پویا برای یافتن بازگشت بهینه از فرآیند و تصمیمات بهینه در هر مرحله.

بر اساس نتایج مقاله Wilde و Nemhauser, Aris می‌توان چندین قانون را برای ساده کردن و کارآمدتر کردن طرح برنامه‌ریزی پویا به صورت زیر فرموله کرد [8]:

### قانون ۱. مراحل نامربوط

اگر مرحله ای هیچ بازگشتی نداشته باشد اگر خروجی هایش، ورودی های سایر مراحل سیستم نباشد، می‌توان مرحله و تصمیماتش را حذف کرد.

ضروری نیست که مرحله ای را که روی تابع بازگشت اثر نمی‌گذارد در نظر گرفت. یک مثال در این مورد می‌تواند گام بازیافت فاضلاب در انتهای یک فرآیند باشد که در آن هزینه عملیات برابر محصولات بازیافت شده است یعنی سر به سر.

### قانون ۲. ترکیب مرحله

اگر یک مرحله دارای متغیرهای حالت خروجی برابر و یا بیش از متغیرهای حالت ورودی باشد، حذف متغیرهای حالت خروجی از طریق ترکیب با مرحله مجاور بایستی مد نظر قرار گیرد.

از آنجا که یک جستجوی جامع روی متغیرهای حالت مورد نیاز است، با حذف متغیرهای حالت در مجموع تلاش جستجو صرفه‌جویی می‌شود حتی اگر شده به قیمت بدست آمدن متغیرهای تصمیم بیشتر. جستجوی چند متغیره را می‌توان برای متغیرهای تصمیم اعمال کرد. این امر منجر به برداشت منطقی زیر می‌شود.

### برداشت منطقی<sup>۱</sup> قانون ۲. مراحل بدون تصمیم

هر مرحله فاقد تصمیم باید با مرحله مجاور خود ترکیب شود و باید مرحله ای انتخاب شود که منجر به حذف تعداد بیشتری متغیر حالت شود.

### قانون ۳. محدودیتهای خروجی ثابت

هر خروجی ثابت بایستی از طریق تبدیل به متغیر حالت یا متغیر تصمیم به ورودی تبدیل شود. این امر یک مسئله مقدار نهایی را به یک مسئله مقدار اولیه تبدیل می‌کند.

اعمال این قانون تعداد متغیرهای تصمیم و حالت را کاهش می‌دهد. در مورد مسئله مقدار نهایی، تبدیل تصمیم یک تصمیم را به یک خروجی تبدیل می‌کند که توسط متغیر حالت ورودی کاملاً تعیین شده است.

### قانون ۴. حلقه های کوچک

هر حلقه دارای تعداد کمتری از چهار متغیر تصمیم باید همزمان نسبت به همه متغیرهای تصمیم بهینه شود. اگر این قانون برای بهینه‌سازی چرخه ای یک سیستم دارای سه متغیر تصمیم به کار گرفته شود، با برش حالت یکی از این متغیرها حذف می‌شود. سپس تبدیل تصمیم صورت گرفته و مراحل 1-2 ترکیب می‌شوند. پس یک بهینه‌سازی جزئی تک تصمیم، تک حالت در مرحله 1-2 اجرا شده است و یک بهینه‌سازی تک تصمیم و بدون حالت در مرحله 3 به اجرا درآمده است. با جستجو روی  $S_3 = \delta_1$  برای بیشترین مقدار این روند تکرار می‌شود. Wilde با پیشنهاد این که راحتتر است یک جستجوی سه متغیره روی متغیرهای تصمیم صورت گیرد از بکارگیری روش فوق حذر داشت.

### قانون ۵. موقعیت حالت برش<sup>۲</sup>

حالات برش بایستی متغیرهای حالت ورودی به مراحل ورودی چند گانه باشند. این قانون چرخه را به شاخه های واگرا تبدیل می‌کند که برای بهینه کردن از شاخه های همگرا راحتتر می‌باشند. در ادامه یک جستجوی تک متغیره می‌تواند روی متغیر حالت انجام گیرد.

<sup>1</sup> Corollary

<sup>2</sup> Cut State Location



## اعمال روی فرآیند اتصال - یک نمونه مطالعاتی<sup>۱</sup>

هم اکنون ما با برنامه‌ریزی پویا آشنا شده‌ایم و مثال‌های ساده‌ای برای توضیح این نظریه آموخته‌ایم. در اینجا ما کاربرد آن را برای یک فرآیند صنعتی که توسط Lowry صورت گرفته است توصیف می‌کنیم [9].

در اعمال برنامه‌ریزی پویا به **فرآیند اتصال**<sup>۲</sup> برای تولید اسید سولفوریک، Lowry توانایی این روش را برای بهینه کردن فرآیند صنعتی بر پا شده نشان داد. جزئیات این کار توسط Lowry داده شده است و شامل تشریح جزئیات فرآیند، معادلات معادله ماده و انرژی، و محاسبات تعادلی شیمیایی مربوطه با خواص انتقالی و ترمودینامیکی می‌شوند. با یک توصیف مختصر از فرآیند و تحلیل منطق لازم برای تبدیل نمودار جریان فرآیند به نمودار تابعی برنامه‌ریزی پویا این مطالعه خلاصه می‌شود. همچنین مختصری از نتایج به دست آمده از بهینه‌سازی ارائه می‌گردد.

**توصیف مختصر فرآیند:** همان گونه که در نمودار جریان شکل ۲۱ نشان داده شده است، فرآیند تماس 98% اسید سولفوریک بعنوان محصول اصلی و بخار فرآیند را بعنوان محصول ثانویه تولید می‌کند. هر دو محصول معمولاً در کارخانه‌های مجاور مصرف می‌شوند. برای این مطالعه نرخ خوراک سولفور 10,000 پوند بر ساعت قرار داده شده که مطابق یک کارخانه با اندازه استاندارد است. سولفور برای تولید دی‌اکسید سولفور به همراه هوا سوزانده می‌شود که با اسید سولفوریک 98% خشک شده است. واکنش از نوع گرمازا بوده و خود به خود ادامه می‌یابد. هوای اضافه به منظور تهیه اکسیژن لازم برای واکنش دی‌اکسید سولفور به تری‌اکسید سولفور از دو مبدل وارد سیستم می‌گردد.

در اکسیداسیون دی‌اکسید سولفور به تری‌اکسید سولفور، نرخ واکنش با دما افزایش می‌یابد و تبدیل تعادلی با دما کاهش می‌یابد. بنابراین از دو **مبدل**<sup>۳</sup> استفاده شده است و مبدل نخست به منظور بهره‌گیری از افزایش نرخ واکنش در دمای بالاتری کار می‌کند. مبدل دوم برای حفظ تبدیل افزایش یافته در دمای پائین تری کار می‌کند. دمای مبدلها توسط **جوشاننده با گرمای اتلافی**<sup>۴</sup> که بخار فرآیند را تولید می‌کند، کنترل می‌شود.

گاز داغ سوزاننده وارد جوشاننده با گرمای اتلافی 1 می‌شود و بخار تولید شده از طریق خنک کردن گاز وارد مبدل A می‌شود. اکسیداسیون جزئی دی‌اکسید سولفور به تری‌اکسید سولفور در مبدل که دارای کاتالیست وانادیوم است صورت می‌گیرد. به دلیل گرمازا بودن واکنش دمای گاز مبدل افزایش می‌یابد. سپس گاز وارد جوشاننده با گرمای اتلافی 2 می‌شود و بخار اضافی تولید می‌شود. گاز از جوشاننده به سمت مبدل B جریان می‌یابد تا اساساً تمام دی‌اکسید سولفور به تری‌اکسید سولفور تبدیل شود. از مبدل گاز به **اکونومایزر**<sup>۵</sup> می‌رود تا انرژی بوسیله گرما دادن آب تا دمای اشباع برای مصرف در دو جوشاننده با گرمای اتلافی بازیافت شود. ضمناً گاز تا دمای مناسب سرد می‌شود تا بوسله **جاذب** جذب شود.

در جاذب تری‌اکسید سولفور در یک برج منزوی در تماس با اسید سولفوریک 98% به اسید سولفوریک تبدیل می‌شود. سایر گازهای این واکنش، بیشتر نیتروژن به همراه مقداری اکسیژن و مقدار کمی دی‌اکسید سولفور وارد اتمسفر می‌شوند.

چون رطوبت کافی در هوا وجود ندارد که بتواند تمام آب لازم را تامین کند، در خنک کننده اسید برای ثابت نگه داشتن غلظت اسید در 98%، آب اضافه می‌شود. گرمای واکنش در جاذب و گرمای رقیق کردن در خشک کننده دمای اسید را بالا می‌برند. لذا خنک کننده اسید شامل یک مبدل گرمایی است که برای برطرف کردن گرما از اسید

<sup>1</sup> Case Study

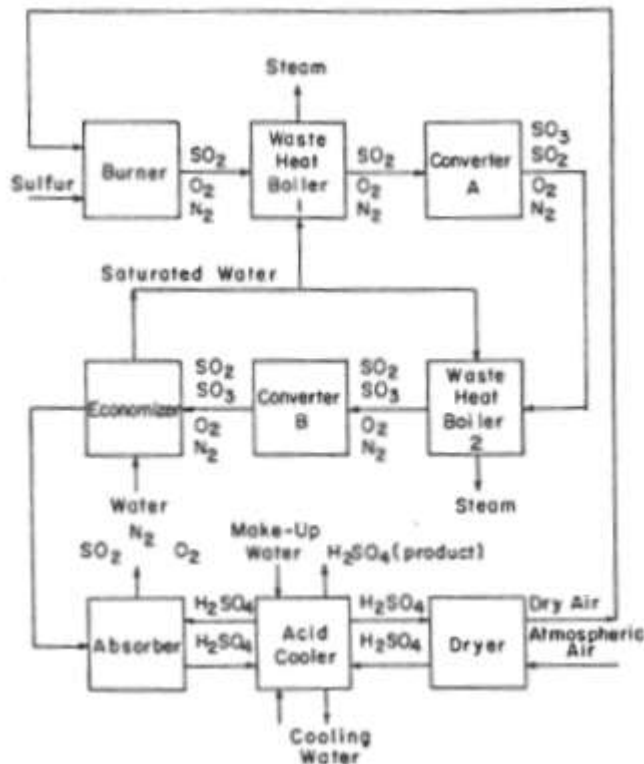
<sup>2</sup> Contact Process

<sup>3</sup> Converter

<sup>4</sup> Waste Heat Boiler

<sup>5</sup> Economizer

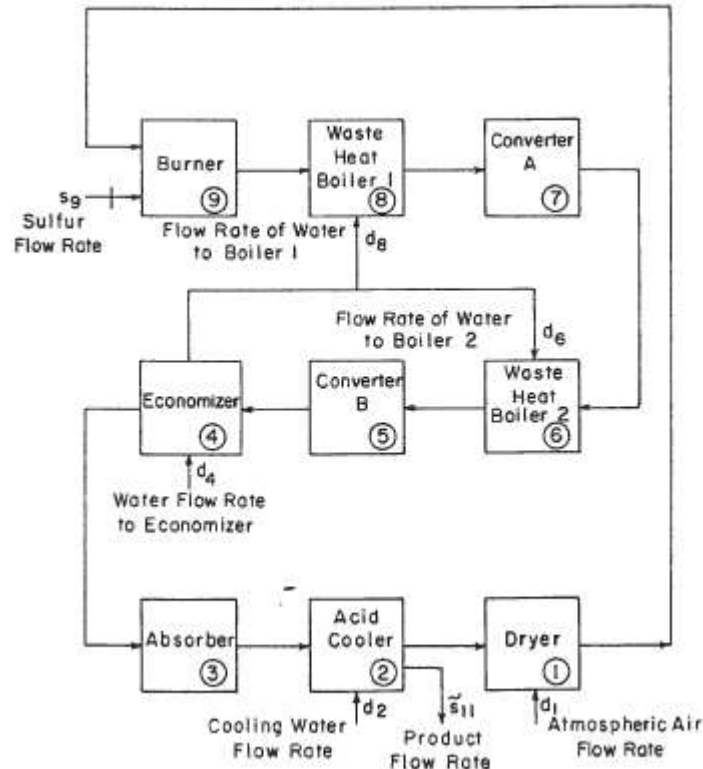
مورد استفاده قرار می‌گیرد. خنک کننده اسید مورد نیاز خشک کننده و جاذب را به همراه اسید 98% برای فروش تامین می‌کند.



شکل ۲۱. نمودار جریان فرآیند تماس برای اسید سولفوریک

**تحلیل برنامه‌ریزی پویا:** همان گونه که در شکل ۲۲ نشان داده شده است، تحلیل برنامه‌ریزی پویا به هر واحدی در فرآیند که یک مرحله در نمودار تابعی باشد شروع می‌شود. قوانین بخش قبل اکنون می‌توانند برای توسعه نمودار تابعی نهایی مورد استفاده قرار گیرند. نه مرحله در شکل ۲۲ وجود دارند و متغیر حالت ورودی،  $S_9$ ، نرخ جریان ثابت سولفور به سوزاننده 10.000 پوندی بر ساعت است. خروجی مرحله 2،  $S_{12}$ ، نرخ جریان اسید تولید شده از خنک کننده اسید است. متغیرهای تصمیم،  $d_4$ ، نرخ جریان آب به اکومایزر،  $d_2$ ، نرخ جریان آب خنک کننده اسید، و  $d_1$  نرخ جریان هوای اتمسفر به خنک کننده می‌باشند. دو متغیر تصمیم دیگر نیز وجود دارند.  $d_6$  و  $D_8$  که نرخهای جریان آب به دو جوشاننده با گرمای اتلافی هستند. به هر حال جمع آنها باید برابر  $d_4$  یعنی نرخ جریان آب به اکونومایزر باشد. همچنین دو جریان بازگشت وجود دارد. یکی از اکونومایزر به جوشاننده با گرمای اتلافی و دیگری از خشک کننده به سوزاننده است.

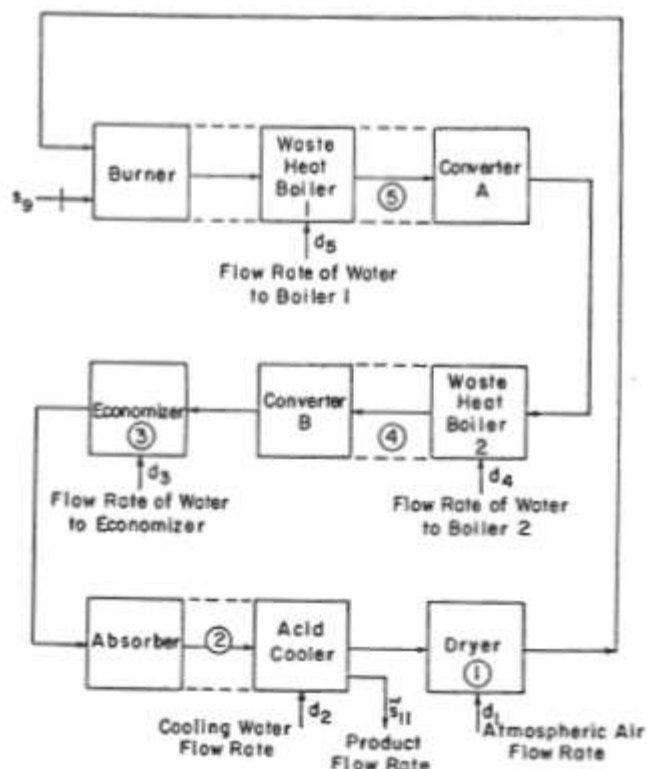
در ادامه روش ساده کردن نمودار تابعی به حالتی که در آن یک متغیر حالت و تصمیم در هر مرحله وجود دارد، تشریح می‌شود. این امر در ادامه یک سری از آزمایشات بدست آمد. تبدیل نمودار جریان فرآیند، به نمودار تابعی برنامه‌ریزی پویا سخت ترین قدم در روند بهینه‌سازی است. انتخاب یک متغیر به عنوان تصمیم یا حالت در هنگام ترکیب مراحل تقریباً امری دلخواه است. ترکیبات بسیاری باید آزمایش شوند و طرح بهینه‌سازی نهایی بدست می‌آید که احتمالاً منحصر به فرد نیست. هدف بدست آوردن یک مجموعه کارآمد محاسباتی از معادلات تابعی است که برای بهینه‌سازی مورد استفاده قرار می‌گیرند.



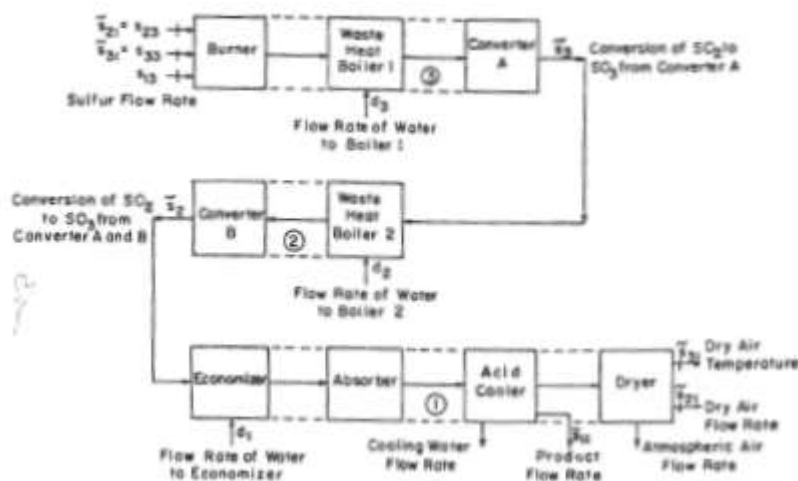
شکل ۲۲. نمودار تابعی نه مرحله ای اولیه برای فرآیند تماس

در ابتدا حل جریان بازگشتی در فرآیند که شامل نرخ جریان آب از اکونومایزر به جوشاننده ها بود، امری ضروری می نمود. متغیرهای تصمیم  $d_8, d_6, d_4$  در ابتدا مجاز بودند که مستقل باشند. یک هزینه جانبی برای هر یک از این جریانها اختصاص یافت تا نمایانگر مقادیر آنها در توابع بازگشت مراحل 8, 6, 4 باشد. در نتایج نهایی جمع نرخ جریانها به جوشاننده ها بایستی اساساً با مقدار اکونومایزر برابر باشد. در نقطه بهینه برای اطمینان از نتیجه، برابری ورودی های جوشاننده با خروجی های اکونومایزر مورد بررسی قرار گرفت.

همان گونه که در شکل ۲۳ نشان داده شده است ساده سازی های دیگری نیز صورت گرفت. بر طبق قوانین ذکر شده، مراحل بدون تصمیم با مراحل مجاور ترکیب شدند. سوزاننده بدون تصمیم بود لذا با جوشاننده با گرمای اتلافی 1 ترکیب شد مبدل B بدون تصمیم بود لذا با جوشاننده با گرمای اتلافی 2 ترکیب شد. جاذب بدون تصمیم بود لذا با خشک کننده اسید ترکیب شد. همان گونه که در شکل ۲۳ نشان داده شده است در نمودار تابعی پنج مرحله وجود دارد که هر کدام یک ورودی و یک تصمیم دارند. چرخه بازگشت مابین سوزاننده و و خشک کننده سیستم را چرخه ای می کند.



شکل ۲۳. نمودار تابعی پنج مرحله ای میانی برای فرآیند تماس



شکل ۲۴. نمودار تابعی سه مرحله ای نهایی برای فرآیند تماس

چرخه از طریق برش حالت بین خشک کننده و سوزاننده حذف شد. و همان گونه که در شکل ۲۴ نمایش داده شده است سیستم به یک مورد سری تبدیل شد. به دلیل برش حالت خروجی، خشک کننده به یک مقدار ثابت تبدیل شد و مثلاً نیازمند به تبدیل تصمیم شد. خشک کننده با مرحله خنک کننده-جذب کننده اسید ترکیب شد. یک تحلیل دقیق تر نشان داد که برش حالت چرخه مستلزم مشخص کردن دو متغیر حالت بود. دمای هوای خشک و نرخ جریان، متعاقباً، دو تصمیم  $d_1, d_2$  نرخ جریان هوای اتمسفر و نرخ جریان آب خنک کننده به خروجی های قابل محاسبه تبدیل شدند. بنابراین مرحله جاذب-خنک کننده اسید-خشک کننده می بایستی با مرحله اکونومایزر ترکیب می شدند. نمودار تابعی

نشان داده شده در شکل ۲۴ شکل نهایی قضیه است که یک مسئله سری مقدار اولیه و سه مرحله ای می‌باشد. یک جستجوی دو متغیره روی مقادیر حالت برشی دمای هوای خشک و نرخ جریان برای بهینه‌سازی مورد نیاز بود. همان طوری که در شکل نشان داده شده است ورودی های مرحله 3 مقادیر حالت برش دمای هوای خشک و نرخ جریان و نرخ جریان سولفور هستند. متغیر تصمیم  $d_3$  نرخ جریان آب اشباع به جوشاننده با گرمای اتلافی 1 است که دمای گاز به داخل مبدل A را کنترل می‌کند. این دما تبدیل  $SO_2$  به  $SO_3$  را در مبدل تعیین می‌کند. و متغیر حالت خروجی در مرحله 3،  $S_3$  همان تبدیل است. بازگشت در این مرحله شامل هزینه سولفور، هزینه آب اشباع به جوشاننده و سود حاصل از بخار تولید شده می‌باشد. الگوریتم برنامه‌ریزی پویا در این مرحله برابر است با:

$$f_3(s_{12}, s_{13}) = \max_{d_3} [R_3(s_{12}, s_{13}, d_3) + f_2(s_2)] \quad (41)$$

در مرحله 2 متغیر حالت ورودی  $S_2 (= \tilde{s}_3)$  (تبدیل  $SO_2$  به  $SO_3$  را در مبدل A بدست می‌دهد، و تصمیم  $d_2$ ، نرخ جریان آب اشباع به جوشاننده با دمای اتلافی 2، دمای گاز وارد شده به مبدل B را کنترل می‌کند. این دما تعیین کننده تبدیل نهایی  $SO_2$  به  $SO_3$  است و متغیر حالت خروجی  $S_2$  همین تبدیل است. بازگشت در مرحله 2 شامل هزینه آب اشباع به جوشاننده و سود حاصله از بخار تولید شده است. الگوریتم برنامه‌ریزی پویا در مرحله 2 عبارتست از:

$$f_2(s_2) = \max_{d_2} [R_2(s_2, d_2) + f_1(s_1)] \quad (42)$$

در مرحله 1 متغیر حالت ورودی  $S_1 (= \tilde{s}_2)$  تبدیل نهایی  $SO_2$  به  $SO_3$  است و متغیر تصمیم  $d_1$ ، نرخ جریان آب به اکونومایزر است. این نرخ جریان دمای گاز ورودی به جاذب را تعیین می‌کند که تبدیل  $SO_3$  به اسید سولفوریک را کنترل می‌کند. همچنین همان طور که قبلاً بحث شد معادلات تعادل انرژی و ماده در این مرحله تعیین کننده نرخ جریان اسید، نرخ جریان آب خنک کننده و دمای هوای خشک و نرخ جریان هستند. بازگشت در این مرحله شامل فروش اسید، هزینه آب اکونومایزر و خنک کننده و سایر هزینه های تجهیزات و عملیاتهای مربوطه می‌شود. الگوریتم برنامه‌ریزی پویا در مرحله 1 برابر است با:

$$f_1(s_1) = \max_{d_1} [R_1(s_1, d_1)] \quad (43)$$

بهینه‌سازی جزئی در هر مرحله به وسیله Lowry انجام شد و نتایج دقیق برای شرایط عملیاتی بهینه فرآیند بدست آمد. استراتژی توصیف شده فقط یکی از استراتژی‌هایی است که در هنگام فرموله کردن مسئله می‌توان به آن دست یافت. هیچ جایگزین موفقی برای فهم دقیق مسئله وجود ندارد. برای مثال، مسئله اولی که با آن مواجه شدیم مربوط به چرخه داخلی بود. روند استفاده شده که در آن جریانها مستقل فرض شدند یک تحلیل برنامه‌ریزی پویای کارآمد به همراه داشت. با گسترش راه حل روی لایه خارجی چرخه محدودیت هم ارضا شد.

مراحل بدون تصمیم با مراحل مجاور ترکیب شدند و هنگامی که چندین مرحله در جوار مرحله بدون تصمیم موجود بود آن مرحله ای برگزیده شد که دارای کمترین تعداد متغیرهای حالت بود. در هر صورت در این مطالعه لازم بود که در برخی مواقع انتخابهای دلخواه صورت گیرد. این انتخاب ها بر پیچیدگی نمودار تابعی نهایی افزودند و تنها راه تعیین اثر یک انتخاب ویژه تکمیل تحلیل بود. برای مثال در این فرآیند چندین ترکیب برای مراحل بدون تصمیم وجود داشت که مستلزم این بود که تعدادی از طرح ها قبل از طرح نهایی به اجرا در آیند و یا رد شوند.

**نتایج:** یک بحث دقیق از نتایج بهینه‌سازی برنامه‌ریزی پویا توسط Lowry داده شد. خلاصه ای از این نتایج در جدول ۲ داده شده‌اند. ماکزیمم بازگشت برابر \$230.57 در ساعت برای نرخ جریان هوای خشک 135000 پوند در ساعت و

دمای  $430^{\circ}\text{K}$  بدست آمد. شرایط عملیاتی بهینه لازم برای رسیدن به این بازگشت همچنین در جدول نشان داده شده‌اند.

بیشترین مقدار دمای گاز،  $1000^{\circ}\text{K}$  به منظور حداکثر کردن تولید بخار از مبدل A بدست آمد. کمترین مقدار دمای گاز به منظور حداکثر کردن تبدیل  $\text{SO}_2$  به  $\text{SO}_3$  از مبدل B بدست آمد. دماهای گاز که وارد هر دو مبدل می‌شدند در محدودیتها وجود داشتند. دمای گاز ورودی به مبدل اول دمای برافروختن کاتالیست بود و دمای خروجی از مبدل دوم می‌بایستی کمتر از  $1000^{\circ}\text{K}$  می‌بود، چون در بیش از این دما کاتالیست بسرعت از بین می‌رود.

اطلاعات بهینه‌سازی جزئی از مرحله 1 تا 3 در جدول 3-7 داده شده است همان گونه که در جدول نشان داده شده است بهینه‌سازی کل مستلزم یک خروجی از مرحله 3 با  $\tilde{d}_3 = 0.36226$  بود. برای بدست آوردن تصمیم بهینه  $d_2^*$  برابر 472 و 22 پوند بر ساعت نرخ جریان آب به جوشاننده 2، درون یابی خطی در مرحله 2 مورد استفاده قرار گرفت. برای بدست آوردن تصمیم بهینه  $d_1^*$  برابر 214 و 45 پوند بر ساعت نرخ جریان آب به اکونومایزر، درون یابی خطی در مرحله 1 مورد استفاده قرار گرفت.

جدول ۲. سیاست اجرایی بهینه نهایی برای فرآیند تماس

Sulfur Flow Rate	Dry Air Flow Rate and Temperature		Optimal Return
$f_{11}$	$\tilde{d}_{23}^*$	$t_{23}^*$	$f_3$
10,000 lb/hr	135,000 lb/hr	$430^{\circ}\text{K}$	\$230.57/hr
STAGE 3			
Conversion of $\text{SO}_2$ to $\text{SO}_3$ from Converter A	Flow Rate of Water to Boiler 1	Gas Temperature from Converter A	
$\tilde{d}_3^*$	$d_3^*$	$T_3^*$	
0.36226	25,513 lb/hr	$1,000.0^{\circ}\text{K}$	
STAGE 2			
Conversion of $\text{SO}_2$ to $\text{SO}_3$ from Converters A and B	Flow Rate of Water to Boiler 2	Gas Temperature from Converter B	
$\tilde{d}_2^*$	$d_2^*$	$T_2^*$	
0.9859	22,472 lb/hr	$700^{\circ}\text{K}$	
STAGE 1			
Production Rate of $\text{H}_2\text{SO}_4$	Flow Rate of Water to the Economizer	Absorber Gas Temperature	Water Flow Rate to Acid Cooler
$f_{11}$	$d_1^*$	$T_1^*$	
30,768 lb/hr	45,214 lb/hr	$325^{\circ}\text{K}$	207,501 lb/hr

سیاست های عملیاتی بهینه برای مقادیر حالت برش منتخب نرخ جریان هوای خشک در جدول ۴ داده شده‌اند. با افزایش نرخ جریان هوای خشک تبدیل کل  $\tilde{d}_2^*$  نیز افزایش یافت، ولی بازگشت کل  $F_3$  به یک پیک رسید و سپس کاهش یافت. سیاست بهینه در نرخ جریان هوای خشک برابر 135,000 پوند بر ساعت اتفاق افتاد. یک مزیت دیگر برنامه‌ریزی پویا تولید راه حل های نزدیک بهینه مربوطه است. همان گونه که در شکل ۴ نشان داده شده است بازگشت بهینه نسبت به نرخ جریان هوای خشک حساس نیست. این نتایج مشخصه مطالعات بهینه‌سازی برنامه‌ریزی پویا هستند

### جایگزینی بهینه تجهیزات-زمان به عنوان یک مرحله

یک مسئله بهینه‌سازی مهم طرح ریزی برای کسب سود ماکزیمم از یک کارخانه در طول عمر مفیدش می‌باشد. یک کارخانه جدید باید هزینه های ساخت مجموعه را جبران کند و یک بازگشت رقابتی روی سرمایه در طول سالیانی که فعالیت می‌کند به دست دهد. با گذشت زمان، هزینه های نگهداری افزایش می‌یابد، تکنولوژی جدید کهنگی به ارمغان می‌آورد، ساختار مالیاتی عوض می‌شود و هزینه های مواد خام اولیه و قیمت فروش محصولات تغییر می‌کنند. اینها به همراه سایر فاکتورهای مربوطه تصمیم گیری در مورد اینکه آیا همین کارخانه باید به فعالیت ادامه دهد و یا یک کارخانه جدید تأسیس شود را مورد تأثیر قرار می‌دهند.

جدول ۳ - اطلاعات جدول بندی شده برای بهینه‌سازی جزئی در مراحل 1 تا 3 برای فرایند تماس

STAGE 3					
Decision, $d_3^*$	$T_3^*$	Return, $f_3$	Output, $s_3^*$		
25,513 lb/hr	1000°K	\$230.57/hr	0.36226		
STAGE 2					
Input, $s_2$	Decision, $d_2$ (lb/hr)	$T_2^*$ (°K)	Return, $f_2$ (\$/hr)	Output, $s_2$	
0.30	24,523	700	353.83	0.9859	
0.35	22,828	700	353.49	0.9859	
0.40	21,215	700	353.16	0.9859	
0.45	19,657	700	352.85	0.9859	
0.50	18,136	700	352.54	0.9859	
0.55	16,637	700	352.23	0.9859	
0.60	15,147	700	351.93	0.9859	
0.65	13,653	700	351.63	0.9859	
0.70	12,141	700	351.33	0.9859	
0.75	10,593	700	351.01	0.9859	
0.80	8,983	700	350.68	0.9859	
0.85	7,264	700	350.34	0.9859	
0.90	5,342	700	349.95	0.9859	
0.95	2,931	700	349.46	0.9859	
STAGE 1					
Input, $s_1$	Decision, $d_1$ (lb/hr)	$T_1^*$ (°K)	Cooling water (lb/hr)	Return, $R_1$ (\$/hr)	Output, $s_{11}$ (lb/hr)
0.80	81,512	325	152,736	284.54	24,967
0.82	80,167	325	158,630	291.57	25,591
0.84	78,733	325	164,523	298.59	26,215
0.86	77,183	325	170,416	305.61	26,840
0.88	75,481	325	176,309	312.62	27,464
0.90	73,551	325	182,201	319.63	28,088
0.92	71,364	325	188,093	326.62	28,712
0.94	68,695	325	193,986	333.59	29,336
0.96	65,208	325	199,877	340.53	29,960
0.98	59,827	325	205,769	347.39	30,585
1.00	10,135	325	211,660	352.41	31,209

برنامه‌ریزی پویا یک چارچوب عالی برای ساختار بندی تصمیمات درباره کارخانه بدست می‌دهد که به وسیله آن بتوان سود کل را در طول زمان حداکثر نگاه داشت. صرف نظر از بازه زمانی یا پیچیدگی مدل اقتصادی استفاده شده برای پیش بینی سود دهی کارخانه در طول زمان، مفهومات لازم برای استفاده از این روش بهینه‌سازی مشابه هم هستند. همچنین اگر عدم قطعیتها درباره قیمتها در آینده، هزینه ها، نرخ های بهره و غیر قابل پیش بینی باشند، یک نسخه از الگوریتم بهینه‌سازی همان گونه که توسط (3) Roberts توصیف شده است، می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

جدول ۴- شرایط اجرایی بهینه برای یک محدوده از نرخ هوای خشک در دمای هوای خشک بهینه  $430^{\circ}\text{K}$

	Dry Air Flow Rate (lb/hr)			
A	85,000			
B	105,000			
C	115,000			
D	135,000*	* Overall optimum		
E	155,000			
F	175,000			
G	195,000			
H	215,000			

STAGE 1				
	Economizer Water Flow Rate $d_1$ (lb/hr)	Product Flow Rate $s_{11}$ (lb/hr)	Absorber Gas Temperature $T_1$ ( $^{\circ}\text{K}$ )	Acid Cooler Water Flow Rate (lb/hr)
A	30,497	34,445	350	251,983
B	37,314	30,697	350	239,593
C	38,383	30,738	350	232,830
D	45,214*	30,768*	325*	207,501*
E	49,582	30,795	325	191,815
F	54,241	30,813	325	176,033
G	59,061	30,825	325	160,196
H	63,979	30,832	325	159,134

STAGE 2			
	Converter A & B Conversion $s_2$	Boiler 2 Water Flow Rate $d_2$ (lb/hr)	Gas Temperature from Converter B $T_2$ ( $^{\circ}\text{K}$ )
A	0.9766	17,960	700
B	0.9830	20,003	700
C	0.9844	20,959	700
D	0.9859*	22,472*	700*
E	0.9867	22,945	700
F	0.9873	24,657	700
G	0.9877	26,360	700
H	0.9880	28,056	700

STAGE 3				
	Return $f_2$ (\$/hr)	Converter A Conversion $s_3$	Boiler 1 Water Flow Rate $d_3$ (lb/hr)	Gas Temperature from Converter A $T_3$ ( $^{\circ}\text{K}$ )
A	228.51	0.3070	32,342	1,000
B	230.29	0.3379	29,727	1,000
C	230.49	0.3479	28,347	1,000
D	230.57*	0.3623*	25,513*	1,000*
E	230.46	0.3721	22,618	1,000
F	230.25	0.3792	19,688	1,000
G	230.00	0.3847	16,734	1,000
H	229.49	0.3890	13,223	1,000

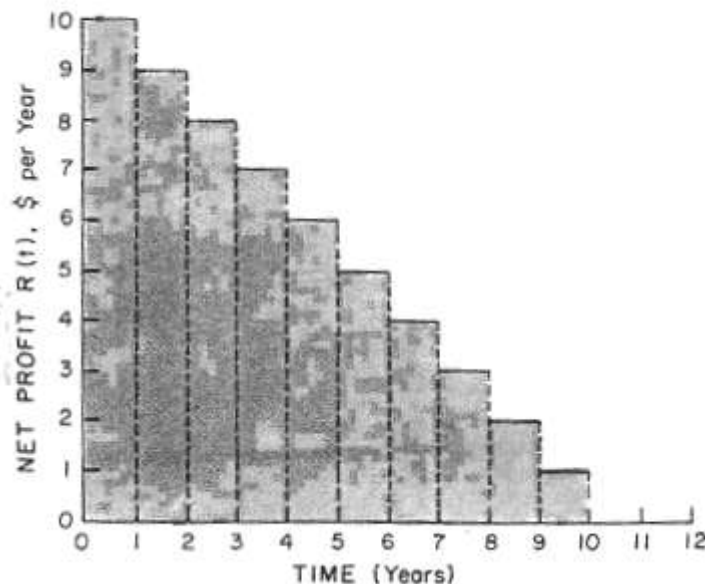
مثال بعدی استفاده از یک بازه زمانی را به عنوان مرحله برنامه‌ریزی پویا تشریح می‌کند. تصمیماتی درباره اینکه آیا کارخانه فعال بماند و یا اینکه با یک کارخانه نو تعویض شود روی یک ارزیابی سالانه مدل اقتصادی خطی ساده، و یک دوره 5 ساله برای زمان کل تعیین سود ماکزیمم، استوار خواهد بود. با این مدل ساده و ارزیابی سالانه می‌توان بر مفهوم‌ها تاکید کرد. مدل اقتصادی بسادگی می‌تواند ارزیابی شود و بازه زمانی مستلزم محاسبات بیش از حد و محدود کننده نیست. بر اساس نیاز و اطلاعات موجود مدل اقتصادی می‌تواند شامل تمام فاکتورهای ذکر شده قبل باشد. همچنین زمان بین ارزیابی‌ها، مرحله برنامه‌ریزی پویا، می‌تواند طوری انتخاب شود که مناسب برای تحلیل ما باشد، همان



گونه که زمان کل برای ارزیابی مهم است. بعلاوه، هنگامی که تحلیل بهینه‌سازی فرموله شده با فراهم شدن اطلاعات جدید برای بدست آوردن نتایج بهتر می‌توان آن را به روز کرد.

### مثال ۶

اطلاعات مربوط به سود خالص سالانه حاصل از یک فرآیند در یک دوره 12 ساله در شکل ۲۵ نشان داده شده است که در آن فرآیند از سال 10 به بعد بصورت سر به سر فعالیت می‌کند. برای راحتی هزینه جایگزینی فرآیند با یک مورد مشابه با تکنولوژی بالا، برابر سود خالص عملیات بهره برداری در سال اول راه اندازی کارخانه جدید فرض شده است، یعنی برابر \$10,000. در ابتدای هر سال یک بازنگری سالانه صورت می‌پذیرد که در آن تصمیم گرفته می‌شود که آیا فرآیند به تولید ادامه دهد و یا اینکه برای داشتن سود حداکثر در یک دوره 5 ساله با یک کارخانه جدید جایگزین شود. در حال حاضر فرآیند 4 سال عمر دارد و تعیین بهترین تصمیم برای هر یک از 4 سال آینده به صورتی که حداکثر سود بدست آید ضروری است، یعنی تعیین سیاست جایگزین بهینه!



شکل ۲۵. سود خالص سالانه از عملیات فرآیند برای یک دوره دوازده ساله

روند با تصمیمات ممکن برای شروع سال 5 (پایان سال 4) شروع می‌شود، یعنی اینکه فرآیند باقی بماند و یا اینکه جایگزین شود. مرحله 1 زمان شروع تا انتهای سال 5 است. الگوریتم برنامه‌ریزی پویا در مرحله 1 بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$f_1(s_1) = \max_{d_1} [R_1(s_1, d_1)] = \max_{\substack{\text{keep} \\ \text{or} \\ \text{replace}}} \begin{cases} R_1(t) \\ -10 + R(0) = 0 \end{cases}$$

که در آن تصمیم،  $d_1$ ، برابر جایگزینی و یا نگهداشتن فرآیند است بطوری که بیشترین سود  $R_1(s_1, d_1)$  را بدست دهد. سود همچنین به سن فرآیند یعنی متغیر حالت  $s_1$  بستگی دارد. تصمیمات بهینه برای مرحله 1 بعنوان تابعی از متغیر حالت در شکل ۲۶ نشان داده شده‌اند و به منظور بهره برداری از فرآیند مورد استفاده قرار می‌گیرند. بازه متغیرهای حالت از یک فرآیند با 1 سال عمر تا فرآیندهای با 10 سال عمر در ابتدای سال 5 ام تغییر می‌کند. در یک فرآیند با طول عمر

<sup>1</sup> Optimal Replacement Policy



با ادامه کار در مرحله 4 روند برای تعیین سود ماکزیمم برای یک دوره 4 ساله تکرار می‌شود. الگوریتم برنامه‌ریزی پویا برای تعیین تصمیمات بهینه برای فرآیندهای با عمر متفاوت (متغیر حالت) برابر است با:

$$f_4(t) = \max_{\substack{\text{keep} \\ \text{or} \\ \text{replace}}} \begin{cases} R_4(t) + f_3(t+1) \\ -10 + R(0) + f_3(1) = 24 \end{cases}$$

بر اساس شکل ۲۶ تصمیمات بهینه نشانگر ادامه فعالیت فرآیند هستند اگر از 1 تا 3 سال عمر داشته باشد، نشانگر جایگزینی فرآیند با مورد جدید است اگر دارای عمر بیشتری باشد.

نتایج مرحله پایانی، 5 ام، همانند مراحل قبل بدست می‌آید. باید به یاد داشت که تنها یک مقدار از متغیر حالت، فرآیند 4 ساله موجود. در نظر گرفت. الگوریتم برنامه‌ریزی پویا بصورت زیر است:

$$f_5(t) = \max_{\substack{\text{keep} \\ \text{or} \\ \text{replace}}} \begin{cases} R_5(t) + f_4(t+1) \\ -10 + R(0) + f_4(1) = 30 \end{cases}$$

همان طور که در شکل ۲۶ نشان داده شده است، حداکثر سود حاصل برابر یک دوره 5 ساله برابر \$30,000 برای یک فرآیند 4 ساله است و تصمیمات بهینه نشانگر نگهداری فرآیند برای سال اول، جایگزینی آن با یک فرآیند جدید در ابتدای سال دوم، و ادامه فعالیت این فرآیند جدید برای 3 سال باقیمانده است. همچنین سایر مواردی که با استفاده از الگوریتم برنامه‌ریزی پویا برای فرآیندهایی با 1, 2, 3 و 5 سال عمر بدست آمده اند در شکل نشان داده شده‌اند. برای مثال، برای یک فرآیند 1 ساله، سود حداکثر برابر \$35000 و تصمیم بهینه مبنی بر ادامه فعالیت آن برای یک دوره 5 ساله خواهد بود. با این حال، با رسیدن عمر فرآیند به 5 سال سود حداکثر برابر \$30,000 خواهند بود و تصمیمات بهینه نشانگر جایگزینی آن با یک فرآیند جدید برای یک دوره 5 ساله است. متعاقباً، الگوریتم برنامه‌ریزی پویا اطلاعات مفید ممکن دیگری نیز بدون تلاشهای محاسباتی سنگین بدست می‌دهد.

خلاصه اینکه یک بازه زمانی می‌تواند بعنوان یک مرحله برای الگوریتم برنامه‌ریزی پویا مورد استفاده قرار گیرد تا مجموعه ای از تصمیمات بهینه را برای حداکثر کردن سود، در یک بازه زمانی مشخص بدست دهد. مثال قبل الگوریتم محاسباتی و روشهایی را که برای اکثر مدل‌های اقتصادی و دارای بازه های زمانی متفاوت برای مراحل، و تعداد متفاوت مراحل بود تشریح کرد. با یک بار انجام بهینه‌سازی می‌توان در آینده نیز با بدست آوردن اطلاعات جدید به راحتی از مدل اولیه استفاده کرد. بحث با مسئله اختصاص بهینه، یک نوع مرتبط از بهینه‌سازی برنامه‌ریزی پویا، ادامه خواهد یافت.

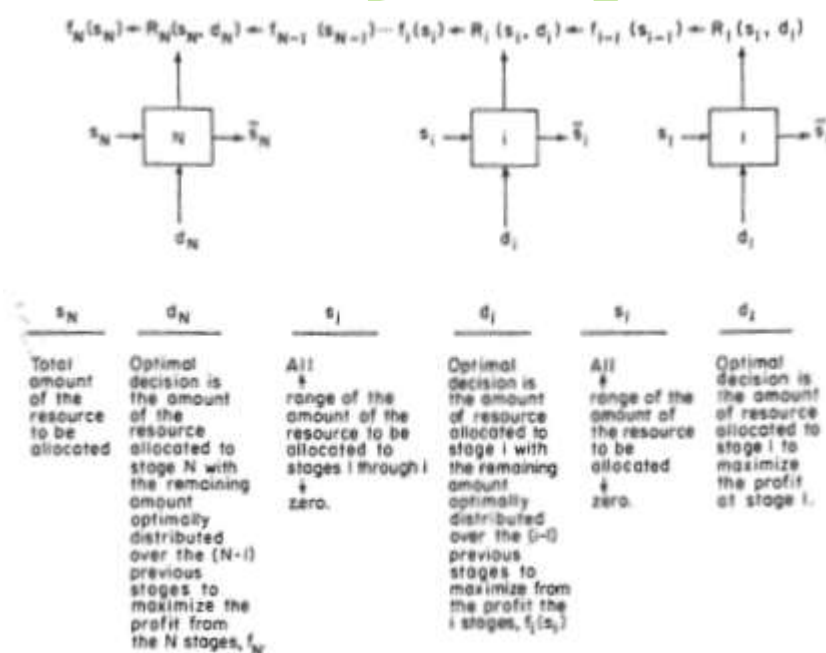
### اختصاص بهینه<sup>۱</sup> بوسیله برنامه‌ریزی پویا

مسئله ای که غالباً پیش می‌آید این است که چطور یک مقدار محدود از یک ماده را ما بین فرآیندهای سودده و رقیب توزیع کرد. این منابع معمولاً مواد خام یا پولی هستند که برای خرید مواد خام به منظور تولید محصول به کار می‌روند. در سطح فرآیند همچنین ممکن است مسئله شکل یافتن بهترین راه برای توزیع مواد خام بین فرآیندها برای تولید بازه مختلفی از محصولات در کارخانه را به خود بگیرد. برنامه‌ریزی خطی یک روش از ساخت این توزیع ها را برای حداکثر کردن سود به هنگام خطی بودن همه معادلات بدست داد، و این یک محدودیت برای برنامه‌ریزی پویا نیست.

مسئله اختصاصی بهینه مستلزم تعیین کل مقدار منابع مورد نیاز برای توزیع و عبارتی که سود (یا قیمت) در هر مرحله را بدست می‌دهند، می‌باشد. یک مرحله ممکن است یک کارخانه، یک فرآیند، یا قسمتی از یک فرآیند باشد. برای

<sup>۱</sup>Optimal Allocation

توصیف روند یک نمودار شکل ۲۷ داده شده است و مسئله کلیدی در حل مسائل اختصاص بهینه تعریف متغیرهای حالت است. در مرحله 1 متغیر حالت مقدار منبع اختصاص داده شده به این مرحله است و باید شامل استفاده از تمام منابع در مرحله شود تا هیچ کدام در این جا مورد استفاده قرار نگیرند. متغیر حالت شبیه متغیر حالت در مرحله 1 است. ولی در هر صورت از مرحله 2 تا مرحله N متغیرهای حالت و تصمیم متفاوت هستند. متغیر تصمیم  $d_i$  مقدار منبع اختصاص یافته به مرحله  $i$  است. ولی متغیر حالت مقدار اختصاص یافته به مرحله  $i$  بعلاوه مقدار باقیمانده که باید بطور بهینه روی مراحل قبلی  $i-1$  تا 1 توزیع شود می باشد. متغیر حالت  $S_i$  از اختصاص تمام منابع به  $i$  مرحله تا اختصاص آنها به هیچکدام از این مراحل تغییر می کند. در مرحله N متغیر حالت برابر تمام مقدار منبع اختصاص یافته N مرحله است و متغیر تصمیم مقدار منبع اختصاص یافته به مرحله N است که باعث حداکثر شدن سود در N مرحله می گردد. تنها اعمال بهینه سازی جزئی به همراه الگوریتم برنامه ریزی پویا، با استفاده از تساوی مقدار متغیر حالت  $S_N$  و کل مقدار منابع موجود برای N مرحله، ضروری است (یک مسئله مقدار اولیه).



شکل ۲۷. نمودار تابعی برای اختصاص بهینه به وسیله برنامه ریزی پویا

تخصیص منبع بهینه به وسیله بهینه سازی برنامه ریزی پویا در مثال بعدی که در آن یک مقدار محدود از خوراک بایستی میان سه راکتور توزیع شود، توضیح داده شده است. ضمناً بحث مفصل در این زمینه توسط Roberts داده شده است [3].

### مثال ۷

کل خوراک که باید ما بین سه راکتور که به صورت موازی کار می کنند توزیع شود، برابر 700 پوند بر ساعت است. هر راکتور یک کاتالیست متفاوت دارد و شرایط کاری دما و فشار به منظور تهیه مجموعه محصولات لازم متفاوت است. سود هر راکتور بوسیله نرخ خوراک تعیین می شود و معیارهای تابع بازگشت برای هر راکتور همان گونه که در شکل زیر نشان داده شده است بوسیله نرخ خوراک تعیین می شود. و پارامترهای تابع بازگشت<sup>1</sup> برای هر راکتور همان گونه که در زیر نشان داده شده است بوسیله کاتالیست و شرایط کاری تعیین می شوند:

<sup>1</sup> Return Function

$$R_1 = 0.08F_1 - (F_1/100)^2$$

$$R_2 = 0.08F_2 - 2(F_2/100)^2$$

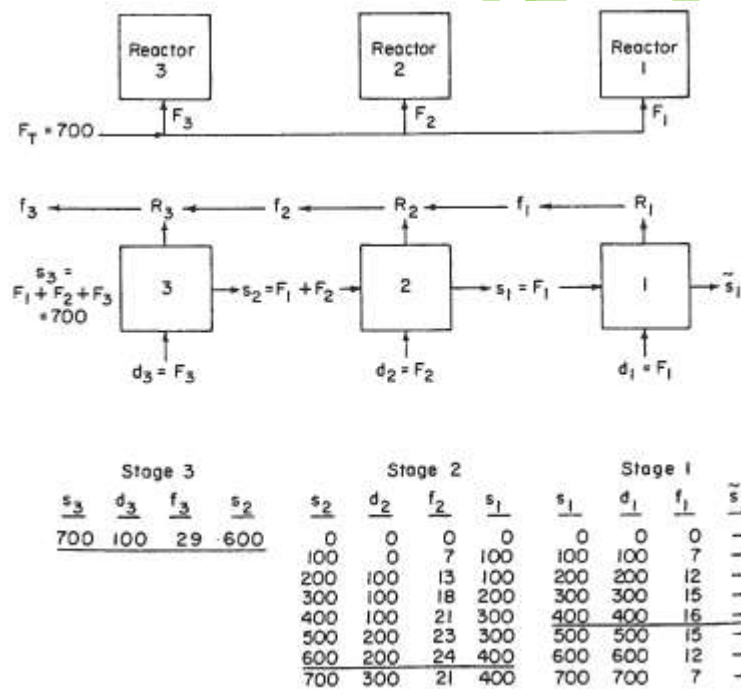
$$R_3 = 0.08F_3 - 3(F_3/100)^2$$

مسئله تعیین بهترین توزیع خوراک ما بین سه راکتور است بطوری که حداکثر سود حاصل شود. نمودار جریان فرآیند، نمودار تابعی برنامه‌ریزی پویا و بهینه‌سازی های جزئی مرحله در شکل ۲۸ نشان داده شده‌اند.

با شروع از مرحله 1، تصمیم بهینه و مقدار خوراکی است که باید به راکتور 1 اختصاص داده شود تا سود در مرحله 1 حداکثر شود، مشخص شد که متغیر حالت شبیه متغیر تصمیم است ولی همه مقادیر ممکن متغیر حالت بایستی مد نظر قرار گیرند. که این شامل اختصاص کل خوراک به مرحله 1 تا اختصاص هیچ مقدار از آن به مرحله 1 می‌شود. الگوریتم برنامه‌ریزی پویا برابر است با:

$$f_1(s_1) = \max_{d_1}[R_1(s_1, d_1)] = f_1(F_1)_1 = 0.08F_1 - (F_1/100)^2$$

و در این مرحله هیچ بهینه‌سازی جزئی وجود ندارد. مقادیر  $f_1(F_1)$  در قدمهای افزایشی 100 محاسبه شدند و در شکل ۲۸ نشان داده شده‌اند.



شکل ۲۸. نمودار جریان فرآیند، نمودار تابعی برنامه‌ریزی پویا، و بهینه‌سازی جزئی مرحله برای مثال ۷

در مرحله 2 یک بهینه‌سازی جزئی وجود دارد و الگوریتم برنامه‌ریزی پویا برابر است با:

$$f_2(s_2) = \max_{d_2}[R_2(s_2, d_2) + f_1(s_1)]$$

یا

$$f_2(F_1 + F_2) = \max_{F_2}[R_2(F_2) + f_1(F_1)]$$

در مرحله 2 متغیر حالت جمع خوراکی است که بایستی بطور بهینه مابین راکتورهای 1 و 2 تقسیم شود. تمام مقادیر ممکن از اختصاص کل خوراک به این دو مرحله گرفته تا هیچ مقدار از خوراک به این دو مرحله باید مد نظر قرار گیرد. متغیر تصمیم، خوراک به مرحله 2 است و طوری انتخاب می‌شود که سود راکتورهای 1 و 2 را برای یک مقدار

مشخص از جمع خوراک به دو راکتور حداکثر کند. مقدار خوراک راکتور 1،  $F_1$ ، تفاوت ما بین متغیر حالت  $S_2 = F_1 + F_2$  و متغیر تصمیم  $d_2 = F_2$  است. مقادیر  $F_2(F_1 + F_2)$  در قدمهای افزایشی 100 محاسبه شدند و نتایج به همراه مقادیر بهینه  $F_2$  در شکل ۲۸ نشان داده شده‌اند.

مسئله کلیدی در استفاده از برنامه‌ریزی پویا برای اختصاص بهینه این است که متغیر حالت باید نمایانگر مقدار منبع، در اینجا خوراک، باشد صورتی که بطور بهینه در مراحل باقیمانده تقسیم شود. همچنین برای تمام مراحل بجز مرحله پایانی، مقادیر اختصاص یافته باید از اختصاص به کل مراحل باقیمانده گرفته تا اختصاص به هیچ یک از مراحل باقیمانده مد نظر قرار گیرد. به هر حال در مرحله پایانی لازم است تنها یک مقدار در نظر گرفته شود و آن کل مقداری است که باید توزیع شود. این مطلب برای نرخ خوراک کلی 700 پوند در ساعت در شکل ۲۸ نشان داده شده است و الگوریتم برنامه‌ریزی پویا در مرحله 3 به صورت زیر می‌باشد:

$$f_3(s_3) = \max_{d_3} [R_3(s_3, d_3) + f_2(s_2)]$$

یا

$$f_3(F_T = 700) = \max_{F_3} [R_3(F_3) + f_2(F_1 + F_2)]$$

نتایج بهینه‌سازی جزئی در مرحله 3 همان طوری که در شکل ۲۸ نشان داده شده است دارای بازگشت بهینه 29 و نرخ خوراک بهینه  $F_3$  برابر 100 پوند بر ساعت برای راکتور 3 می‌باشند. این به این معناست که 600 پوند بر ساعت باید بطور بهینه ما بین دو راکتور دیگر تقسیم شود. از بهینه‌سازی های جزئی مراحل 2 و 1 مقدار بهینه  $F_2$  برابر 200 و  $F_1$  برابر 400 بدست می‌آید. سیاست بهینه در شکل ۲۸ نشان داده شده است.

مسائل اختصاصی بهینه همانگونه که در مثال ۷ توضیح داده شد حل می‌شوند. متغیر حالت در هر مرحله برابر مجموع مقادیر منبع تخصیص داده شده به آن مرحله و مراحل قبلی می‌باشد. متغیر تصمیم مقدار منبع تخصیص داده شده در آن مرحله است. مقادیر بهینه تصمیم برای بازه مقادیر متغیر حالت به منظور حداکثر کردن مجموع بازگشت در آن حالت و بازگشتهای بهینه از مراحل قبل با در نظر گرفتن توزیع بهینه منابع باقیمانده تعیین می‌شوند. بجز آخرین مرحله در تمام مراحل مقادیر ممکن متغیر حالت باید طوری در نظر گرفته شوند که تمام منابع به آن مرحله و مراحل قبل آن اختصاص داده شوند. در آخرین مرحله ضروری است که تنها یک متغیر حالت یعنی مقدار کل منبع در نظر گرفته شود. در مرحله پایانی قیود حاکم بر متغیر تصمیم برای مقدار تخصیص یافته شامل داشتن تمام منابع برای یک مرحله گرفته تا داشتن تمام مراحل برای تمام مراحل می‌شود. این یک بهینه‌سازی تک تصمیم، بدون حالت است. از مرحله (N-1) تا مرحله 2 بهینه‌سازی جزئی تک تصمیم و تک حالت وجود داشت. معمولاً در مرحله 1 تعداد متغیرهای حالت و تصمیم برابر است و در این مورد همان گونه که در مثال نشان داده شد، بهینه‌سازی جزئی لازم نیست.

خلاصه اینکه، مسائل اختصاص بهینه هم اکنون می‌توانند با هر دو روش برنامه‌ریزی پویا و خطی حل شوند. برنامه‌ریزی پویا دارای این ویژگی است که محدود به توابع خطی نیست. معمولاً مشکل ترین قسمت تحلیل برنامه‌ریزی پویا، فرموله کردن مسئله و سرهم کردن مدل اقتصادی و معادلات قیود است. بهینه‌سازی های جزئی در هر مرحله نیازمند تلاش محاسباتی است که معمولاً بوسیله یک کامپیوتر انجام می‌شود. انتخاب سیاست بهینه ممکن است نیازمند درون یابی اطلاعات توسعه یافته در هر مرحله باشد.

## خاتمه و جمع‌بندی<sup>۱</sup>

<sup>1</sup> Closure

هدف در این فصل توسعه فهم الگوریتم برنامه‌ریزی پویا و تشریح کاربرد آن برای برخی از مسائل بهینه‌سازی بوده است. مسئله کلیدی این است که بتوان نمودار جریان فرآیند را به نمودار تابعی برنامه‌ریزی پویا تبدیل کرد. این روند برای مسائل شبکه، مسائل شاخه دار و سری، مسائل جایگزینی تجهیزات، و مسائل اختصاصی شرح داده شد.

تئوری برنامه‌ریزی پویا برای مسائل بزرگ همراه با چرخه و شاخه، به همراه قوانین مورد نیاز اعمال این تئوری برای فرآیندهای بزرگ برای بدست آوردن معادلات تابعی و نمودار جریان اطلاعات برای بهینه‌سازی برنامه‌ریزی پویا، داده شد. یک مورد مطالعه فرآیند تماس برای تولید اسید سولفوریک، توانایی‌ها و محدودیتهای روش کار برای یک فرآیند صنعتی را تشریح کرد.

مزیت اصلی برنامه‌ریزی پویا تبدیل مسئله بهینه‌سازی بزرگ به یک سری مسائل بهینه‌سازی جزئی است. تکنیکهای مربوط با روشهای جستجوی چند متغیره در فصل قبل قابل اعمال به بهینه‌سازی های جزئی بودند. حالا روش حل مسائل بهینه‌سازی مقید و بزرگ وجود دارد. اگر مسئله برای روشهای جستجوی چند متغیره بسیار بزرگ باشد، می‌توان از روشهای برنامه‌ریزی پویا برای تبدیل مسئله به تعدادی مسائل بهینه‌سازی جزئی کوچکتر استفاده کرد. مطالب Cooper و [11] Cooper, Denardo [12] برای مطالعه بیشتر در مورد برنامه‌ریزی پویای قطعی و مطالب [14] Ross برای برنامه‌ریزی پویای تصادفی پیشنهاد می‌شوند.