



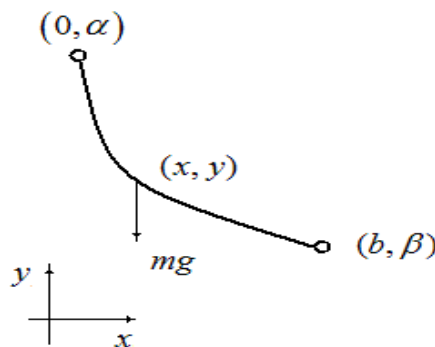
به‌گزینی دینامیکی (سیستم‌های متوسط‌گیری‌شده) - رویکرد حساب جامع تغییرات

۱- مقدمه

در این بخش به اصول و مقدمات حساب جامع تغییرات می‌پردازیم و سپس نتایج و کاربرد آن در کنترل بهینه بیان می‌کنیم. باید دقت شود که قضایا و اصول مورد اشاره در بخش قبلی برای منظور و نظر ما در کنترل بهینه شاید لازم بوده باشد ولی کافی نیست چون متغیرهای تصمیم‌گیری برای به‌گزینی تماماً متغیر مستقل بوده‌اند مثل \underline{x}_{ss} و \underline{u}_{ss} در حالی که در به‌گزینی دینامیکی و کنترل بهینه آنها خود تابعی از زمان هستند یعنی با $\underline{x}(t)$ و $\underline{u}(t)$ روبرو هستیم. به عبارت روشن‌تر در کنترل بهینه بدنبال یک سیاست اعمال $\underline{u}(t)$ هستیم تا یک شاخص عملکرد را مینیمم کند. مسأله به‌گزینی ما مقید به قیود فیزیکی یا همان مدل دینامیکی فرایند (فضای حالت) نیز می‌باشد؛ لذا هم در فرم متغیرها (که خود تابع زمان هستند) و هم در فرم قیود (که به شکل معادله دیفرانسیل هستند نه جبری) با مسائل به‌گزینی جبری تفاوت اصولی دارند. قبل از پرداختن به اصول حساب جامع تغییرات (آنالیز فانکشنال‌ها یا تابع تابع‌ها) یک بحث تاریخی را پیش می‌کشیم تا ببینیم که اوایلر با حل یک مسأله خاص به‌گزینی دینامیکی چگونه علم بشری را لاقلاً در زمینه ریاضی و مهندسی (کنترل) شکوفا نمود. لازم به ذکر است که خدمتی که اوایلر به جامعه علمی کرد محدود به دو زمینه فوق‌الذکر نیست بلکه مثلاً انیشتن از نتایج او برای تعمیم مسأله نسبیت خاص (به نسبیت عام) نیز استفاده کرده است.

۲- مسأله برنولی (مینیمم زمان)

یکی از برادران برنولی در سال ۱۶۹۶ میلادی مسأله زیر را عنوان یا طرح نمود و ریاضی دانان (نه ریاضی خوانان) را به چالش طلبید:



شکل ۱-

فرض کنید بین دو نقطه یک منحنی به شکل زیر قرار دارد مختصات دو نقطه به ترتیب بالایی $(0, \alpha)$ و پایینی (b, β) است. حال اگر یک ذره به جرم m از نقطه بالایی تحت شتاب جاذبه روی منحنی به صورت بدون اصطکاک حرکت



(سقوط) کند ساختار یا فرم منحنی مزبور باید چه باشد تا این مسیر را در کمترین زمان طی کند؟ آیا قسمتی از تابع سینوسی است یا قسمتی از یک چند جمله‌ای درجه ۲ یا ...؟! نکته: این مسأله به زبان یونانی معروف است به Brachistochrone یعنی کمترین زمان. نکته: به روح سؤال توجه کنید دنبال یک متغیر مثل y می‌گردیم که خود تابع متغیر دیگری مثل x است یعنی جواب بهگزینی ما خود یک تابع است! عبارتی به آنالیز فانکشنال‌ها وارد خواهیم شد.

۱-۲- فرمولاسیون مسأله

یک زمان دیفرانسیلی در نظر بگیرید مثل dt رابطه مدت زمان با سرعت و مسافت را بنویسید:

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{v(x, y)} \quad (۱-)$$

$$v(x, y) = \sqrt{v_0^2 + 2g(\alpha - y)} \quad (۲-)$$

اگر dt ها را جمع کنیم آنگاه تابع هدف ما به شکل انتگرال زیر در می‌آید (و کمی بازآرایی):

$$T = \int dt = \int \frac{ds}{v} = \int_0^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{v_0^2 + 2a(\alpha - y)}} dx = T(y(x)) \quad (۳-)$$

دقت کنید که T (تابع هدف) یک فانکشنال از y است یعنی نمی‌گوییم یک تابع (فانکشن) از y است چون y خود تابع x است. اگر مسأله را به زبان ریاضی بازگوییم کنیم:

مطلوبست قیافه $y(x)$ یعنی تابعیت y با x بطوریکه تابع هدف T مینیمم شود^۱.

شاید مسأله مذکور قدیمی‌ترین و یا اولین مسأله‌ای باشد که حساب جامع آن موقع (آنالیز نیوتن یا لایب نیتز) دقت یا توانایی کافی برای حل آن را نداشت. علت این است که مسأله بهگزینی کلاسیک معمولاً به دنبال نقاطی می‌باشد که یک تابع (فانکشن) هدف را مینیمم (یا ماکزیمم) کند که این را در بخش قبل دیدیم (بهگزینی استاتیکی یا کلاسیک). ولی در مسأله برنولی بجای نقاط، دنبال توابعی می‌گردیم تا یک فانکشنال هدف را مینیمم یا ماکزیمم کند. لذا همان موقع نیز معلوم بود که باید یک آنالیز پیشرفته‌تر موازی با آنالیز کلاسیک توسعه داده شود تا از پس حل این تیپ مسایل برآید. مسایل ریاضی و فیزیکی مشابهی شبیه مسأله فوق‌الذکر وجود دارد (نظیر مینیمم فاصله، مینیمم سطح، مینیمم زمان گذر نور یا مسأله اپتیک فرما و ...). که می‌بایست از یک پشتوانه ریاضی قویتر از آنالیز کلاسیک برای حل آنها برخوردار باشند. این آنالیز پیشرفته‌تر توسط پیشگامانی مثل رویلر و لاگرانژ بنا نهاده شد و معرفی به حساب جامع تغییرات^۲ شد.

^۱ - جواب مسأله سیکلوئید - Cycloid است.



۲-۲- حل مسأله برنولی توسط رویلر

پنج‌سال بعد از ارائه مسأله مینیمم زمان رویلر آنرا حل کرد ولی چه حل کردنی؟! ایشان ابتدا مسأله کلی زیر را حل کرد و از نتایج آن مسأله برنولی را حساب کرد.

فرض کنید تمام توابع در کلاس $C^2[a, b]$ (یعنی در فاصله a تا b تا مشتق مرتبه دوم پیوسته باشند) که در شرایط مرزی مسأله صدق می‌کنند را با y نمایش دهیم. شرط لازم برای اینکه تابعی مثل y^* بیابیم که فانکشنال $J(y)$ را مینیمم کند چیست؟

دقت کنید تمام ابزار یا دانش روز اوایل فقط آنالیز کلاسیک بود یعنی کار با توابع چند متغیره، همین! اوایل ابتدا فاصله a تا b را به $n+1$ نقطه یا فاصله تقسیم کرد:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = b \quad (۴-)$$

سپس مشتق J را به شکل تفاضل محدود^۱ زیر تقریب زد:

$$y'(x_i) = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_i} \cong \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad (۵-)$$

همچنین انتگرال را به شکل مستطیلی زیر تقریب زد:

$$\int_a^b g(x) dx \cong \sum_{i=0}^n g(x_i)(x_{i+1} - x_i) \quad (۶-)$$

برای سهولت (بدون لطمه به کلیت مسأله) فواصل را مساوی در نظر می‌گیریم:

$$h = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n+1} \quad (۷-)$$

بدین ترتیب فانکشنال $J(y)$ را می‌توان به صورت زیر تقریب زد:

$$J = J(y) \triangleq \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx \cong \sum_{i=0}^n f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{h}\right) h \quad (۸-)$$

عبارت بالا (عبارت سمت راست) یک تابع n متغیره است یعنی:

$$J(y) \cong I(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (۹-)$$

بنابراین فقط n تا مجهول یا متغیر تصمیم‌گیری برای به‌گزینی داریم (نمی‌گوییم $n+2$ چون y_0 همان α و y_{n+1} همان β است عبارتی شرایط مرزی از قبل معلوم است).

در اینجا اتفاق بزرگی می‌افتد؛ کافی است مسأله به‌گزینی n متغیره بالا را حل کنیم، البته بطور کلاسیک. شرط لازم آن این است که مشتقات جزئی تابع هدف (یعنی I) را مساوی صفر قرار دهیم.

$$\frac{\partial I}{\partial y_k} \Big|_{y_k^*} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (۱۰-)$$

^۱ - Finite Difference



برای محاسبه $\frac{\partial I}{\partial y_k}$ برای هر k فیکس دقت کنید که فقط دو جمله از I دارای y_k هستند:

$$I(y_1, y_2, \dots, y_n) = \dots + f\left(x_{k-1}, y_{k-1}, \frac{y_k - y_{k-1}}{h}\right)h + f\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{h}\right)h + \dots \quad (11-)$$

و

$$f_1 \triangleq f\left(x_{k-1}, y_{k-1}, \frac{y_k - y_{k-1}}{h}\right) \quad (12-)$$

$$f_2 \triangleq f\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{h}\right) \quad (13-)$$

لذا بر اثر مشتق گرفتن (و استفاده از قاعده زنجیره‌ای) شرط لازم (عبارت $\frac{\partial I}{\partial y_k}$) بصورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial y_k} &= \frac{\partial x_{k-1}}{\partial y_k} \frac{\partial f_1}{\partial x_{k-1}} + \frac{\partial y_{k-1}}{\partial y_k} \frac{\partial f_1}{\partial y_{k-1}} + \frac{\partial\left(\frac{y_k - y_{k-1}}{h}\right)}{\partial y_k} \frac{\partial f_1}{\partial\left(\frac{y_k - y_{k-1}}{h}\right)} \\ &+ \frac{\partial x_k}{\partial y_k} \frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \frac{\partial y_k}{\partial y_k} \frac{\partial f_2}{\partial y_k} + \frac{\partial\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h}\right)}{\partial y_k} \frac{\partial f_2}{\partial\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h}\right)} = 0 \end{aligned} \quad (14-)$$

و با استفاده از تعاریف زیر:

$$f^* \triangleq \frac{\partial f_1}{\partial\left(\frac{y_k - y_{k-1}}{h}\right)} = \frac{\partial f_1}{\partial y_k'} \quad (15-)$$

$$f^{**} \triangleq \frac{\partial f_2}{\partial y_k} \quad (16-)$$

$$f^{***} \triangleq \frac{\partial f_2}{\partial\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h}\right)} = \frac{\partial f_2}{\partial(y_k')} \quad (17-)$$

و با جایگزینی و تغییر آرایش آن:

$$\frac{\partial I}{\partial y_k} = f^{**} - \frac{1}{h}(f^{***} - f^*) = 0 \quad (18-)$$

اویلر وقتی خوب دقت کرد (یعنی h را به سمت صفر میل داد) فهمید که معادلات بالا انگار تقریب تفاضلی (جبری) معادله دیفرنسیال زیر هستند:

$$f_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y, y') = 0 \quad \text{معادله اویلر یا اویلر - لاگرانژ} \quad (19-)$$

به طوری که f انتگرال تابع هدف، f_y یعنی $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $f_{y'}$ یعنی $\frac{\partial f}{\partial y'}$.

فایده ۱: تاریخ علم بشری مشحون از این نوع رویدادهاست یعنی یک نفر یک مسأله خاص را حل می‌کند سپس بقیه آن را پر و بال می‌دهند تا بتوانند مسائل مشابه را حل کنند. درست شبیه خاصیت گندم که از هر بذر خوشه‌ها پرورده می‌شود.



فایده ۲: اصطلاح **Universal Applicability** در برابر **Mathematical Solvability** کاملاً در این مورد صدق می‌کند. شاید نمونه مجسم فلسفه تعمیم^۱ باشد.

فایده ۳: در فاصله این پنجاه سال (زمان ارائه مسأله برنولی تا حل زیبای اولیور) مسایل مشابه آن نیز مطرح شد که در ذیل این بحث به مواردی که به کار ما می‌آید (کنترل بهینه) می‌پردازیم:

۱. مسأله مینیمم زمان (مثلاً کاهش زمان سیکل فرایند Batch):

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt = (t_f - t_0) \quad (20-)$$

در اینجا زمانی که طول می‌کشد که سیستم را از حالت اولیه به حالت نهایی برسانیم مینیمم می‌کنیم.

۲. مسأله کنترل نهایی (مثل حرکت بازوی روبات برای جایجا کردن یک بار):

$$J = \left(\underline{x}(t_f) - \underline{x}_{sp}(t_f) \right)^T H \left(\underline{x}(t_f) - \underline{x}_{sp}(t_f) \right) \quad (21-)$$

به طوری که $\underline{x}_{sp}(t_f)$ حالت نهایی مطلوب (مقرر) می‌باشد. این همان مسأله معروف حداقل‌سازی خطای نهایی می‌باشد (مینیمم آفست). ماتریس H نیز ماتریس ضرایب یا اوزان است. اگر H مثبت باشد (یعنی مثبت معین) آنگاه J نیز مثبت است. معمولاً H را قطری انتخاب می‌کنند. در حالت یک بعدی مسأله به شکل زیر تقلیل پیدا می‌کند:

$$J = h \left(x(t_f) - x_{sp}(t_f) \right)^2 \quad (22-)$$

۳. مسأله حداقل تلاش کنترلی (حداقل حرکت ساقه شیر کنترل):

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\underline{u}^T R \underline{u} \right) dt \quad (22-)$$

R ماتریس اوزان می‌باشد و معمولاً قطری انتخاب می‌شود.

۴. مسأله تعقیب (مثل تعقیب یک هدف متحرک توسط موشک^۲)

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\underline{x}(t) - \underline{x}_{sp}(t) \right)^T Q \left(\underline{x}(t) - \underline{x}_{sp}(t) \right) \right] dt \quad (23-)$$

اگر اندازه عمل کنترلی محدود نباشد (مثلاً بگوییم شیر کنترل هیچ وقت اشباع نمی‌شود) شاخص عملکرد بالا معقول است ولی در عمل اینطور نیست و محدودیت روی اعمال کنترل داریم لذا J را به شکل زیر بهبود می‌دهیم:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\underline{x}(t) - \underline{x}_{sp}(t) \right)^T Q \left(\underline{x}(t) - \underline{x}_{sp}(t) \right) \right] dt + \int_{t_0}^{t_f} \left(\underline{u}^T(t) R \underline{u}(t) \right) dt \quad (24-)$$

در برخی مسایل بخاطر طبیعت فرایند (مدل فضای حالت) معلوم نیست که آیا $\underline{x}(t)$ نهایتاً به $\underline{x}_{sp}(t)$ می‌رسد یا خیر لذا شاخص J را به شکل زیر بهبود می‌دهند (یک ترم دیگر برای هر چه نزدیکتر شدن $\underline{x}(t_f)$ به $\underline{x}_{sp}(t_f)$ اضافه می‌کنند).

^۱ - Generalization



$$J = (\underline{x}(t_f) - \underline{x}_{sp}(t_f))^T H (\underline{x}(t_f) - \underline{x}_{sp}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} (\underline{x}(t) - \underline{x}_{sp}(t))^T Q (\underline{x}(t) - \underline{x}_{sp}(t)) dt + \int_{t_0}^{t_f} \underline{u}^T(t) R \underline{u}(t) dt \quad (25-)$$

محض یادآوری: جواب مسأله بهگزینی $\underline{u}^{opt}(t)$ است نه \underline{u}_{ss} یعنی دنبال یک تابعیت زمانی \underline{u} یا سیاست اعمال \underline{u} هستیم تا J مینیمم شود.

۵. مسأله رگولاتور (مهم‌ترین و رایج‌ترین کنترل مدرن یک فرایند):

یک حالت از مسأله تعقیب مسأله رگولاسیون است یعنی مقدار مقرر، مقدار ثابتی باشد. یعنی $\underline{x}_{sp}(t) = C'$ باشد یعنی سیاست اعمال \underline{u} بر اساس حفظ سیستم در یک نقطه خاص عملکرد باشد:

$$J = (\underline{x}(t_f) - \underline{c}')^T H (\underline{x}(t_f) - \underline{c}') + \int_{t_0}^{t_f} (\underline{x}(t) - \underline{c}')^T Q (\underline{x}(t) - \underline{c}') dt + \int_{t_0}^{t_f} \underline{u}^T(t) R \underline{u}(t) dt \quad (26-)$$

در ادامه به مقدمات ریاضی و تعاریف تئوری حساب جامع تغییرات می‌پردازیم. این همان پروبال دادن به تکنیک اویلر (با استفاده از تفاضل محدود و حساب جامع کلاسیک) می‌باشد و به تعبیر دیگر می‌خواهیم بطور آکادمیک و استاندارد شرط اویلر (یا اویلر-لاگرانژ) را در متن و بطن نظریه جدید آنالیز (حساب جامع تغییرات) اثبات کنیم.

۳- تعاریف و مقدمات ریاضی حساب جامع تغییرات

۳-۱- تعریف یک فانکشنال

فانکشنال نمونه J یک قانون یا نگاشت است که هر تابع مثل $x(t)$ (با دامنه تعریف X) را به یک عدد حقیقی یگانه متناظر می‌سازد.

با تعریف تابع کلاسیک مقایسه کنید: فانکشن نمونه x یک قانون یا نگاشت است که هر متغیر مثل t (با دامنه تعریف T) را به یک عدد حقیقی یگانه متناظر می‌سازد. مثلاً $x(t) = t^2$ قانونی است که هر t را از T انتخاب کنیم به عددی در x متناظر می‌کند. اسم قانون را مربع می‌گوییم چون کارش مربع کردن متغیر مستقل است تا متغیر تابع را بدهد. تابعیت J با $x(t)$ بصورت فانکشن (تابع) است ولی تابعیت آن با t بصورت فانکشنال (تابع تابع) است. فانکشنال‌ها با متغیر شان (یعنی $x(t)$) رابطه خطی با هم دارند:

$$\left\{ \begin{aligned} J(\alpha x(t)) &= \alpha J(x(t)) \end{aligned} \right. \quad (27-)$$

$$\left\{ \begin{aligned} J(\underline{x}'(t) + \underline{x}''(t)) &= J(\underline{x}'(t)) + J(\underline{x}''(t)) \end{aligned} \right. \quad (28-)$$

۳-۲- تعریف تغییر^۱ یک فانکشنال

برای خواص اکسترممی یک فانکشنال درست مثل نظریه کلاسیک (خواص اکسترممی یک فانکشن) نیازمند تعریف تغییر هستیم:

^۱ - Increment



$$\Delta J = J(\underline{x} + \delta \underline{x}) - J(\underline{x}) = \Delta J(\underline{x}, \delta \underline{x}) \quad (۲۹-)$$

دقت کنید $\delta \underline{x}$ خود تابع زمان است و موسوم به واریاسیون تابع \underline{x} است.

۳-۳- تعریف اولین واریاسیون یک فانکشنال

اگر همان بحث سری تیلور را تعمیم دهیم درست مثل اولین واریاسیون یک فانکشن می‌توانیم اولین واریاسیون یک فانکشنال را تعریف کنیم:

اگر فانکشنال را بسط دهیم تغییر یک فانکشنال را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\Delta J(\underline{x}, \delta \underline{x}) = \delta J(\underline{x}, \delta \underline{x}) + g(\underline{x}, \delta \underline{x}) \|\delta \underline{x}\| \quad (۳۰-)$$

حالا اگر ترم‌های بعدی یعنی $g(\underline{x}, \delta \underline{x})$ را صفر فرض کنیم یعنی:

$$\lim_{\|\delta \underline{x}\| \rightarrow 0} g(\underline{x}, \delta \underline{x}) = 0 \quad (۳۱-)$$

آنگاه J روی \underline{x} مشتق‌پذیر بوده و موسوم به اولین واریاسیون فانکشنال J روی تابع $\underline{X}(t)$ می‌باشد.

۳-۴- تعریف اکسترمم فانکشنال‌ها

یک فانکشنال مثل J با دامنه \mathcal{N} (یعنی تابع \underline{x} که متغیر فانکشنال J است دارای برد است) یک اکسترمم نسبی در \underline{x}^* است اگر وجود داشته باشد یک ε مثبت برای همه توابع ممکن \underline{x} (در \mathcal{N}) در همسایگی \underline{x}^* (یعنی $\|\underline{x} - \underline{x}^*\| < \varepsilon$) به طوری که J ها هم‌علامت باشند بعبارت دیگر اگر مثبت باشد:

$$\Delta J = J(\underline{x}) - J(\underline{x}^*) \geq 0 \quad (۳۲-)$$

آنگاه $J(\underline{x}^*)$ یک مینیمم نسبی در \underline{x}^* است و اگر ΔJ منفی باشد:

$$\Delta J = J(\underline{x}) - J(\underline{x}^*) \leq 0 \quad (۳۳-)$$

آنگاه $J(\underline{x}^*)$ یک ماکزیمم نسبی در \underline{x}^* است.

تعریف اکسترمم مطلق مشابه بحث اکسترمم فانکشنال‌ها موقعی است که بحث بالا برای همه \mathcal{N} باشد نه الزاماً در یک همسایگی محدود.

تعریف حدی دقیق‌تر، نیازمند نوشتن روابط فانکشنالی و به تعبیر دیگر همان روابط کلاسیک است. بهر حال جهت اختصار و همچنین کاربردی بودن مسائل از ذکر آنها خودداری می‌کنیم و فقط به کلاس خاصی از فانکشنال‌ها می‌پردازیم که به کار ما می‌آید و آنهم فانکشنال‌های انتگرالی و باز هم محدودتر فانکشنال‌های انتگرالی تک متغیره یعنی تابع تابع t .



۳-۵- شرط لازم اکسترمم برای فانکشنال های انتگرالی تک متغیره (شرط اوپلر-لاگرانژ)

فرض کنید فانکشنال ذیل به فرم انتگرالی (تک متغیره یا تک انتگرال) زیر تعریف شده باشد:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} F(\underline{x}(t), \underline{\dot{x}}(t), t) dt \quad (34-)$$

بطوریکه t_0 و t_f معلوم هستند و F معروف به انتگران است. با استفاده از تعریف واریاسیون اول J می توان نشان داد که اولین واریاسیون یعنی δJ به شکل زیر است:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{x}} \delta \underline{x} + \frac{\partial F}{\partial \underline{\dot{x}}} \delta \underline{\dot{x}} \right) dt \quad (35-)$$

۳-۶- شرط لازم برای اکسترمم (با استفاده از تعریف حد)

$$\delta J = 0 \Rightarrow \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{x}} \delta \underline{x} + \frac{\partial F}{\partial \underline{\dot{x}}} \delta \underline{\dot{x}} \right) dt = 0 \quad (36-)$$

دقت شود واریاسیون های $\delta \underline{x}$ و $\delta \underline{\dot{x}}$ مستقل نیستند، چون هر تغییر در \underline{x} منجر به تغییر در مشتق آن نیز می شود لذا برای حذف $\delta \underline{\dot{x}}$ از انتگرال جزء به جزء استفاده می کنیم:

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial F}{\partial \underline{\dot{x}}} \delta \underline{\dot{x}} dt = \frac{\partial F}{\partial \underline{\dot{x}}} \delta \underline{x} \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\dot{x}}} \right) \delta \underline{x} dt \quad (37-)$$

با جاگذاری عبارت فوق در شرط لازم اکسترمم:

$$0 = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial F}{\partial \underline{x}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\dot{x}}} \right) \right] \delta \underline{x} dt + \frac{\partial F}{\partial \underline{\dot{x}}} \delta \underline{x} \Big|_{t_0}^{t_f} \quad (38-)$$

برای اینکه عبارت بالا همیشه صفر باشد باید هر دو عبارت سمت راست صفر باشند:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \underline{\dot{x}}} \right] \delta \underline{x} = 0 \quad \text{at } t = t_0 \text{ and } t = t_f \quad (39-)$$

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial F}{\partial \underline{x}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\dot{x}}} \right) \right] \delta \underline{x} dt = 0 \quad (40-)$$

چون $\delta \underline{x}$ نمایش تغییر است پس هم آزاد به تغییر کردن است و هم نامقید، پس در عبارت اول باید $\frac{\partial F}{\partial \underline{\dot{x}}}$ در حالات

حدی (یعنی شرایط مرزی) صفر باشد (بعداً بطور مفصل راجع به شرایط مرزی صحبت می کنیم). عبارت دوم یعنی عبارت انتگرال نیز زمانی همیشه صفر است که انتگران آن صفر باشد:

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{x}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\dot{x}}} \right) = 0 \quad \text{شرط اوپلر-لاگرانژ} \quad (41-)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{\dot{x}}} = 0 \quad \text{at } t = t_0 \text{ and } t = t_f \quad \text{شرط Transversality} \quad (42-)$$



برای جایگزینی این مسأله و نقش انتزاعی آن در ذهن در جدول (۱-۱) فقط لیستی از انواع تعاریف فانکشنال ها همراه با شرط لازم آنها (معادله اویلر) و البته بدون اثبات درج شده است:

فانکشنال	شرط اویلر- لاگرانژ	ملاحظات / توضیحات
$\int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx$	$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0$	همین مسأله خودمان
$\int_a^b f(x, y(x), y'(x), y''(x)) dx$	$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} = 0$	خود گویای همه چیز است
$\int_a^b f(x, y(x), z(x), y'(x), z'(x)) dx$	$\begin{cases} f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0 \\ f_x - \frac{d}{dz} f_{z'} = 0 \end{cases}$	یک متغیر مستقل (یعنی x) و دو تابع نامعلوم
$\iint_{\Omega} f(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) dx dy$	$f_u - \frac{d}{dx} f_{u_x} - \frac{d}{dy} f_{u_y} = 0$	فانکشنال دو متغیره
$\iint_{\Omega} f(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) dx dy$	$f_u - \frac{\partial}{\partial x} f_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{u_y} + \dots = 0$	خود گویای همه چیز است

جدول ۱-

- منظور از f_y همان $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $f_{\dot{y}}$ همان $\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}$ می‌باشد.
 - برای کلی بودن مسأله متغیر مستقل نهایی را با X (بجای x) نمایش می‌دهیم و اگر تابعی نسبت به آن مشتق پذیر بود با علامت Prime بجای Dot نمایش می‌دهیم، به عبارتی y' یعنی $\frac{dy}{dx}$.
- مثال (۱-۱) برای شرط اویلر: فانکشنال زیر را در نظر بگیرید و شرط لازم اکسترمم را بنویسید و در صورت امکان فرم بسته جواب بهگزين را بیابید.

$$\begin{cases} J = \int_0^1 (x^2 + \dot{x}^2) dt \\ x(0) = 0, \quad x(1) = 1 \end{cases}$$

حل: اگر شرط اویلر را برای انتگران بنویسیم:

$$2x - \frac{d}{dt}(2\dot{x}) = 0 \quad (۱)$$

$$\rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} - x = 0 \quad (۲)$$

حل آنالیتیک:

$$x(t) = A \sinh(t) + B \cosh(t) \quad (۳)$$



شرط Transversality می‌گوید δx در مرزها باید صفر باشد یعنی:

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (۴)$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(x^2 + \dot{x}^2) = 0 + 2\dot{x} = 0$$

$$\rightarrow \dot{x} = 0 \rightarrow B, A$$

$$\rightarrow x(t) = \frac{\sinh(t)}{\sinh(1)} \quad (۵)$$

ترجمه: اگر حالت $x(t)$ مسیر فوق را طی کند آنگاه تابع هدف J اکسترمم می‌شود (مینیمم یا ماکزیمم می‌شود).

۳-۷ - شرط Transversality

همانطور که دیدیم شرط لازم اکسترمم بودن یک فانکشنال شامل دو دسته معادله (معمولاً دیفرانسیل) می‌باشد: یکی معروف به شرط اوایلر و دیگری شرط Transversality (یا مرزی). حال بسته به اینکه در صورت مسأله راجع به شرایط مرزی چه صحبتی شده باشد ترکیب‌های متنوعی (همراه با شرایط اوایلر) خواهیم داشت:

۱- حالت نهایی فیکس - زمان نهایی آزاد:

اگر در مسأله بهگزینی فانکشنال، زمان نهایی معلوم نباشد ولی حالت آن معلوم باشد می‌توان ثابت کرد که شرایط لازم برای اکسترمم بودن یا ابزار ریاضی لازم برای حل مسأله شامل چهار عبارت زیر است:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (\text{شرط اوایلر}) \quad (۴۳-)$$

نکته: از این رابطه (۴۳-) برای حل معادله استفاده می‌کنیم و گرنه جزء شرایط لازم نیست بلکه معلوم خود مسأله است.

$$x(t_f) = \underline{x}_f \quad (\text{شرط نهایی}) \quad (۴۴-)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t_0) \delta x(t_0) = 0 \quad (\text{شرط مرزی یا اولیه}) \quad (۴۵-)$$

$$F(t_f) - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t_f) \dot{x}(t_f) = 0 \quad (\text{شرط مرزی یا نهایی}) \quad (۴۶-)$$

۲- حالت نهایی آزاد - زمان نهایی آزاد:

در برخی مسائل دیگر نه تنها زمان نهایی فیکس نشده است بلکه حالت نهایی نیز تابع هیچ قیدی نیست. می‌توان اثبات کرد که مجموعه روابط ریاضی برای این حالت به شکل زیر است:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (\text{شرط اوایلر}) \quad (۴۷-)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t_0) \delta x(t_0) = 0 \quad (\text{شرط مرزی یا اولیه}) \quad (۴۸-)$$



$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t_f) \delta x_f + \left(F(t_f) - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t_f) \dot{x}(t_f) \right) \delta t_f = 0 \quad (\text{شرط مرزی یا نهایی}) \quad (۴۹-)$$

اگر δt_f و δx_f مستقل باشند آنگاه شرط مرزی نهایی به شکل دو عبارت زیر در می‌آید:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t_f) \delta x_f = 0 \\ \left(F(t_f) - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t_f) \dot{x}(t_f) \right) \delta t_f = 0 \end{array} \right. \quad (۵۰-)$$

$$\left(F(t_f) - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t_f) \dot{x}(t_f) \right) \delta t_f = 0 \quad (۵۱-)$$

نکته: همین مباحث را می‌توان برای حالتی که انتگرال تکه‌تکه پیوسته باشد نیز مطرح نمود که منجر به نتایج Weierstrass می‌شود و از حوصله این مقال خارج است.

۳-۸- اکستریم مقید (قید تساوی)

اکثر مسایل ما (کنترل بهینه) مینیمم‌سازی یک فانکشنال انتگرالی است که مقید به قیود تساوی از نوع دیفرانسیلی می‌باشد (همان فضای حالت یا مدل دینامیکی فرایند). لذا تمامی مباحث گذشته عملاً مقدمه‌ای بر همین بحث بوده است. جهت اختصار فقط به همین نکته اکتفا می‌کنیم که درست مثل بهگزینی کلاسیک (بهگزینی استاتیکی) برای لحاظ کردن قیود تساوی سعی می‌کنیم تابع هدف را به گونه‌ای بازآرایی یا تعریف مجدد کنیم که مسأله در قالب اکستریم نامقید بگنجد، یعنی در اینجا نیز همان تعریف لاگرانژین را مجدداً در پیش رو داریم:

اگر بخواهیم فانکشنال J (در زیر) را

$$J = J(\underline{x}(t)) = \int_{t_0}^{t_f} F(t, \underline{x}, \dot{\underline{x}}) dt \quad (۵۲-)$$

تحت قیود m تا معادله دیفرانسیل (قیود مساوی):

$$\underline{\Lambda}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}, t) = \underline{0} \quad (۵۳-)$$

مینیمم (ماگزیمم) کنیم شرایط لازم عبارتند از: (تابع هدف لاگرانژین را به صورت $L = F + \underline{\lambda}^T \underline{\Lambda}$ تعریف کنید).

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{x}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{x}}} \right) = 0 \quad (\text{معادلات اویلر-لانگرانژ}) \quad (۵۴-)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{x}}} \right)^T \delta \underline{x}(t_0) = 0 \quad (\text{شرایط مرزی - اولیه}) \quad (۵۵-)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{x}}} \right)^T \delta \underline{x}_f + \left(L(t_f) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{x}}} \right)^T \dot{\underline{x}}(t_f) \right) \delta t_f = 0 \quad (\text{شرایط مرزی-نهایی}) \quad (۵۶-)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{\lambda}} = 0 \quad \text{or} \quad \underline{\Lambda}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}, t) = 0 \quad (\text{معادلات برآمده از قیود تساوی}) \quad (۵۷-)$$



مثال (۲-): اکسترمم فانکشنال زیر را بیابید.

$$J(\underline{x}, t) = \int_0^1 (\dot{x}_1^2 + t^2) dt$$

تحت قید:

$$x_1^2 - \dot{x}_2 = 0$$

و با شرایط مرزی:

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0$$

$$x_1(1) = 0, \quad x_2(1) = 2$$

حل:

لانگراژین را تعریف می‌کنیم:

$$L = \dot{x}_1^2 + t^2 + \lambda_1 (x_1^2 - \dot{x}_2) \quad (1)$$

دقت شود چون یک معادله دیفرنسیال (یک قید) داشتیم، سائز λ_1 ، یک می‌باشد.

شرط اویلر-لانگرانژ:

$$\frac{d}{dt} \dot{x}_1 - \lambda_1 x_1 = 0 \quad (2)$$

جاگذاری در معادله بالا:

$$\frac{d}{dt} \lambda_1 = 0 \rightarrow \text{Solution} \rightarrow \lambda_1 = -c^2 \quad (3)$$

$$\rightarrow \frac{d^2 x_1}{dt^2} + c^2 x_1 = 0 \rightarrow \text{Solution} \rightarrow x_1(t) = A \sin(ct) + B \cos(ct) \quad (4)$$

$$x_1(0) = 0 \rightarrow x_1(t) = A \sin(n\pi t), n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

برای اینکه از شرایط مرزی x_2 نیز استفاده کنیم، از عبارت قید تساوی (معادله دیفرنسیال) که x_1 را به x_2 مربوط می‌کند، استفاده می‌کنیم، یعنی فرم انتگرالی آنرا بنویسیم:

$$x_2(t) - x_2(0) = A^2 \int_0^1 \sin^2(2\pi t) dt \quad (6)$$

$$\rightarrow B.C. \text{ on } x_2 A = \pm 2 \quad (7)$$

$$\rightarrow x_2(t) = \pm 2 \sin(n\pi t), n = 1, 2, \dots \quad (8)$$