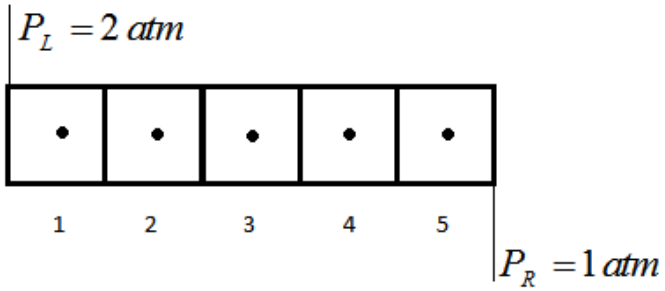
مسئله: یک مخزن نفتی یک بعدی با جریان تک فاز و دارای مرزهای غیر تراوا را در نظر بگیرید. سیستم در ابتدا باز و به فشار اتمسفر وصل است: $P\ for\ all\ x\ @\ t<0 = P_0 = P_R = 1\ atm$. در لحظه صفر آزمایش، فشار ۲ اتمسفری توسط پمپ به آن اعمال می‌کنیم (در سمت چپ، یعنی $P_L = 2\,atm$) و در سمت راست نیز همچنان به اتمسفر وصل است.



طول مغزه یک متر، ضریب فشردگی C، ویسکوزیته آب μ، φ میزان تخلخل، و k تراوایی سنگ است. فرمولاسیون پیوسته به شکل زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \left(\dfrac{\varphi \mu C}{k}\right)\dfrac{\partial P}{\partial t} \\ \varphi = 0.2; \mu = 1\,\text{cp}, C = 10^{-4}\,atm^{-1} \end{cases} \qquad (۱)$$

هدف غایی مسئله **تخمین نقشه تراوایی** (مقدار تراوایی هر بلوک) با استفاده از داده‌های دینامیکی اندازه‌گیری شده است. در واقع می‌خواهیم یک مسئله معکوس را به مسئله بهینه‌سازی تبدیل کرده و آن را حل کنیم. بردار مجهولات را به فرم زیر می‌نویسیم:

$$\underline{x} = \left[P_1^{t+\Delta t} \quad P_2^{t+\Delta t} \quad P_3^{t+\Delta t} \quad P_4^{t+\Delta t} \quad P_5^{t+\Delta t} \quad k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \quad k_5\right]^T \qquad (۲)$$

توجه شود که مجهولات بردار $\underline{x}$ دو دسته‌اند: فشار (P) که یک حالت دینامیکی است و با زمان تغییر می‌کند، و تراوایی (k) که یک پارامتر استاتیکی ثابت با زمان است.

الف) با گسسته سازی فرمولاسیون پیوسته، نشان دهید برای شبیه‌سازی (گسسته سازی کامل، رویکرد تفاضلی مرکزی، و حل کاملاً ضمنی) باید دستگاه جبری زیر به طور برگشتی حل شود:

$$A\underline{x} = \underline{b}; \qquad (۳)$$

که در آن بردار b و ماتریس A به صورت زیر است:

$$\underline{b}_{10\times 1} = \left[P_1^t + \left(2\alpha \Big/ \frac{1}{k_1}\right)P_L \quad P_2^t \quad P_3^t \quad P_4^t \quad P_5^t + \left(2\alpha \Big/ \frac{1}{k_5}\right)P_R \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\right]^T \qquad (۴)$$

$$A_{10\times10}=$$

$$\left[\begin{array}{ccccc:c}
1+\dfrac{2\alpha}{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}}+\dfrac{2\alpha}{\frac{1}{k_1}} & \dfrac{-2\alpha}{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}} & 0 & 0 & 0 & \\
\dfrac{-2\alpha}{\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_1}} & 1+\dfrac{2\alpha}{\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}}+\dfrac{2\alpha}{\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_1}} & \dfrac{-2\alpha}{\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}} & 0 & 0 & \\
0 & \dfrac{-2\alpha}{\frac{1}{k_3}+\frac{1}{k_2}} & 1+\dfrac{2\alpha}{\frac{1}{k_3}+\frac{1}{k_4}}+\dfrac{2\alpha}{\frac{1}{k_3}+\frac{1}{k_2}} & \dfrac{-2\alpha}{\frac{1}{k_3}+\frac{1}{k_4}} & 0 & 0_{5\times5} \\
0 & 0 & \dfrac{-2\alpha}{\frac{1}{k_4}+\frac{1}{k_3}} & 1+\dfrac{2\alpha}{\frac{1}{k_4}+\frac{1}{k_5}}+\dfrac{2\alpha}{\frac{1}{k_4}+\frac{1}{k_3}} & \dfrac{-2\alpha}{\frac{1}{k_4}+\frac{1}{k_5}} & \\
0 & 0 & 0 & \dfrac{-2\alpha}{\frac{1}{k_5}+\frac{1}{k_4}} & 1+\dfrac{2\alpha}{\frac{1}{k_5}}+\dfrac{2\alpha}{\frac{1}{k_5}+\frac{1}{k_4}} & \\
\hdashline
0_{5\times5} & & & & & I_{5\times5}
\end{array}\right] \qquad (۵)$$

و پارامتر α را به صورت زیر تعریف می‌کنیم که Δt طول گام زمانی و Δx طول گام مکانی است:

$$\alpha \equiv \frac{1}{\varphi\,\mu C}\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \qquad (۶)$$

ب) نتایج اندازه‌گیری فشار در بیست و هفت و نیم سانتی‌متری (P_1) و هفتاد و دو و نیم سانتی‌متری (P_2) از چپ و بر حسب میلی‌ثانیه گزارش‌شده‌اند (به **جدول ۱** و **جدول ۲** مراجعه کنید). تابع هدف مسئله بهینه‌سازی را به صورت اختلاف مقادیر اندازه‌گیری و شبیه‌سازی تعریف کنید و نقشه تراوایی را با استفاده از الگوریتم تکاملی ژنتیک تعیین نمایید (می‌توان از جعبه‌ابزار بهینه‌سازی نرم‌افزار MATLAB استفاده کرد).

ج) نقشه تراوایی را با استفاده از روش‌های مبتنی بر جست‌وجو (Nelder-Mead, Trust-Region, BFGS) نیز به دست آورید.

د) با توجه به قسمت‌های قبلی، عملکرد الگوریتم‌های تکاملی را برای حل مسائل معکوس با روش‌های مبتنی بر جست‌وجو مقایسه کنید (تفاوت‌ها، مزایا/معایب، تعداد تکرار، تعداد دفعات فراخوانی تابع، یکتایی جواب بهینه، نرخ همگرایی، گیر افتادن در نقاط کمینه محلی، توانایی لحاظ کردن قیود، ...).

ه) با استفاده از نتایج به دست آمده، توضیح دهید که چرا اصطلاحاً مسائل معکوس را ill-posed می‌گویند؟

و) آیا می‌توانید یک الگوریتم بهینه‌ساز «متوالی» برای این مسئله معکوس ارائه دهید؟ منظور از متوالی اینست که مثلاً صبر نکنیم تا داده‌های اندازه‌گیری جمع شوند تا بعداً بهینه‌سازی انجام دهیم بلکه می‌خواهیم همیشه آخرین مقدار بهینه نقشه تراوایی را داشته باشیم. (راهنمایی: برای شروع به مباحث «شناسایی سیستمها[1]» و «کالمن فیلتر[2]» رجوع کنید)

[1] System Identification
[2] Kalman Filter

جدول ۱— گزارش اندازه‌گیری تا زمان ۱۵۰ میلی‌ثانیه (وقتی $P_L = 2atm$)

t(ms)	$P_1(atm)$	$P_2(atm)$	t(ms)	$P_1(atm)$	$P_2(atm)$	t(ms)	$P_1(atm)$	$P_2(atm)$
1	1.0000	1.0000	51	1.6059	1.1488	101	1.6897	1.2360
2	1.0194	1.0040	52	1.6117	1.1504	102	1.6918	1.2446
3	1.0371	0.9976	53	1.6092	1.1593	103	1.6924	1.2448
4	1.0674	0.9955	54	1.6148	1.1686	104	1.6875	1.2460
5	1.1026	0.9965	55	1.6070	1.1697	105	1.6876	1.2446
6	1.1370	0.9952	56	1.6229	1.1757	106	1.6868	1.2466
7	1.1703	0.9912	57	1.6298	1.1782	107	1.6928	1.2508
8	1.2068	1.0014	58	1.6325	1.1757	108	1.6876	1.2400
9	1.2278	0.9957	59	1.6336	1.1806	109	1.7035	1.2383
10	1.2582	1.0014	60	1.6306	1.1891	110	1.6992	1.2397
11	1.2833	1.0040	61	1.6326	1.1848	111	1.7008	1.2340
12	1.2994	1.0029	62	1.6412	1.1824	112	1.7031	1.2324
13	1.3210	1.0106	63	1.6311	1.1804	113	1.7119	1.2449
14	1.3341	1.0019	64	1.6395	1.1860	114	1.7023	1.2371
15	1.3541	1.0071	65	1.6406	1.1899	115	1.7083	1.2453
16	1.3634	1.0059	66	1.6408	1.1896	116	1.7009	1.2485
17	1.3771	1.0086	67	1.6463	1.1977	117	1.6911	1.2464
18	1.3947	1.0133	68	1.6529	1.1959	118	1.7028	1.2426
19	1.4036	1.0261	69	1.6453	1.1904	119	1.7050	1.2554
20	1.4300	1.0305	70	1.6558	1.1970	120	1.7047	1.2497
21	1.4317	1.0264	71	1.6566	1.2008	121	1.7100	1.2533
22	1.4358	1.0259	72	1.6618	1.1946	122	1.7181	1.2516
23	1.4483	1.0406	73	1.6674	1.2065	123	1.7117	1.2497
24	1.4634	1.0427	74	1.6665	1.2094	124	1.7079	1.2492
25	1.4676	1.0470	75	1.6692	1.2079	125	1.7043	1.2560
26	1.4702	1.0530	76	1.6753	1.2105	126	1.7183	1.2604
27	1.4879	1.0603	77	1.6717	1.2104	127	1.7088	1.2567
28	1.4862	1.0583	78	1.6669	1.2146	128	1.7121	1.2560
29	1.4962	1.0616	79	1.6862	1.2161	129	1.7107	1.2566
30	1.5125	1.0707	80	1.6838	1.2205	130	1.7167	1.2579
31	1.5126	1.0744	81	1.6850	1.2271	131	1.7166	1.2494
32	1.5171	1.0759	82	1.6934	1.2286	132	1.7153	1.2593
33	1.5283	1.0835	83	1.6810	1.2238	133	1.7157	1.2499
34	1.5273	1.0840	84	1.6810	1.2281	134	1.7186	1.2567
35	1.5351	1.0899	85	1.6823	1.2321	135	1.7165	1.2574
36	1.5316	1.1035	86	1.6790	1.2338	136	1.7110	1.2632
37	1.5384	1.1059	87	1.6735	1.2318	137	1.7023	1.2740
38	1.5439	1.1067	88	1.6803	1.2393	138	1.7140	1.2688
39	1.5422	1.1089	89	1.6843	1.2384	139	1.7154	1.2661
40	1.5440	1.1104	90	1.6840	1.2413	140	1.7101	1.2627
41	1.5660	1.1096	91	1.6811	1.2366	141	1.7118	1.2682
42	1.5610	1.1142	92	1.6937	1.2367	142	1.7168	1.2595
43	1.5635	1.1221	93	1.6851	1.2323	143	1.7202	1.2698
44	1.5663	1.1180	94	1.6785	1.2390	144	1.7174	1.2650
45	1.5760	1.1359	95	1.6731	1.2474	145	1.7096	1.2664
46	1.5875	1.1340	96	1.6762	1.2365	146	1.7162	1.2717
47	1.5928	1.1398	97	1.6753	1.2454	147	1.7269	1.2697
48	1.5949	1.1414	98	1.6777	1.2523	148	1.7329	1.2682
49	1.6051	1.1473	99	1.6815	1.2413	149	1.7161	1.2644
50	1.6002	1.1535	100	1.6913	1.2474	150	1.7216	1.2595

جدول ۲— گزارش اندازه‌گیری بعد از زمان ۱۵۰ میلی‌ثانیه (وقتی $P_L = 3atm$)

t*(ms)*	P_1*(atm)*	P_2*(atm)*	t*(ms)*	P_1*(atm)*	P_2*(atm)*	t*(ms)*	P_1*(atm)*	P_2*(atm)*
151	1.7147	1.2576	201	2.3226	1.4317	251	2.4176	1.5238
152	1.7266	1.2546	202	2.3262	1.4328	252	2.4205	1.5224
153	1.7598	1.2589	203	2.3270	1.4464	253	2.4185	1.5197
154	1.7869	1.2674	204	2.3363	1.4452	254	2.4255	1.5208
155	1.8158	1.2712	205	2.3360	1.4541	255	2.4204	1.5217
156	1.8516	1.2708	206	2.3379	1.4451	256	2.4236	1.5242
157	1.8884	1.2695	207	2.3380	1.4515	257	2.4277	1.5255
158	1.9151	1.2707	208	2.3375	1.4591	258	2.4339	1.5281
159	1.9487	1.2739	209	2.3367	1.4506	259	2.4317	1.5326
160	1.9756	1.2713	210	2.3520	1.4624	260	2.4215	1.5330
161	2.0020	1.2809	211	2.3563	1.4697	261	2.4219	1.5381
162	2.0221	1.2848	212	2.3653	1.4702	262	2.4211	1.5377
163	2.0606	1.2802	213	2.3707	1.4673	263	2.4167	1.5398
164	2.0620	1.2824	214	2.3673	1.4801	264	2.4294	1.5395
165	2.0815	1.2777	215	2.3669	1.4728	265	2.4217	1.5372
166	2.0958	1.2943	216	2.3717	1.4713	266	2.4234	1.5312
167	2.1022	1.2938	217	2.3756	1.4738	267	2.4269	1.5398
168	2.1210	1.3002	218	2.3726	1.4801	268	2.4203	1.5439
169	2.1261	1.3074	219	2.3741	1.4769	269	2.4369	1.5443
170	2.1304	1.3088	220	2.3684	1.4740	270	2.4336	1.5470
171	2.1469	1.3105	221	2.3807	1.4699	271	2.4265	1.5491
172	2.1627	1.3082	222	2.3768	1.4851	272	2.4338	1.5375
173	2.1800	1.3101	223	2.3826	1.4825	273	2.4522	1.5351
174	2.1851	1.3189	224	2.3922	1.4848	274	2.4447	1.5369
175	2.1960	1.3262	225	2.3848	1.4914	275	2.4351	1.5333
176	2.2113	1.3309	226	2.3892	1.4819	276	2.4290	1.5425
177	2.2113	1.3327	227	2.3888	1.4991	277	2.4276	1.5463
178	2.2202	1.3476	228	2.3765	1.4977	278	2.4351	1.5463
179	2.2327	1.3431	229	2.3808	1.5062	279	2.4360	1.5425
180	2.2456	1.3554	230	2.3978	1.4984	280	2.4284	1.5387
181	2.2456	1.3627	231	2.4005	1.5006	281	2.4351	1.5299
182	2.2358	1.3618	232	2.3961	1.5094	282	2.4277	1.5395
183	2.2481	1.3664	233	2.3859	1.5013	283	2.4334	1.5418
184	2.2526	1.3670	234	2.3928	1.4984	284	2.4407	1.5368
185	2.2695	1.3810	235	2.4053	1.4991	285	2.4392	1.5426
186	2.2859	1.3798	236	2.4039	1.5047	286	2.4321	1.5420
187	2.2817	1.3865	237	2.4210	1.4985	287	2.4356	1.5367
188	2.2851	1.3854	238	2.4203	1.5118	288	2.4325	1.5435
189	2.2876	1.3974	239	2.4143	1.5042	289	2.4397	1.5399
190	2.2829	1.3956	240	2.4097	1.5150	290	2.4512	1.5459
191	2.2952	1.4032	241	2.4127	1.5130	291	2.4526	1.5432
192	2.2957	1.4034	242	2.4055	1.5061	292	2.4519	1.5484
193	2.2963	1.4049	243	2.4162	1.5144	293	2.4560	1.5476
194	2.2979	1.4075	244	2.4097	1.5070	294	2.4518	1.5505
195	2.2967	1.4179	245	2.4172	1.5082	295	2.4537	1.5481
196	2.3024	1.4269	246	2.4113	1.5127	296	2.4537	1.5529
197	2.3086	1.4260	247	2.4048	1.5104	297	2.4506	1.5531
198	2.3133	1.4197	248	2.4020	1.5145	298	2.4462	1.5575
199	2.3160	1.4242	249	2.4124	1.5260	299	2.4440	1.5587
200	2.3119	1.4328	250	2.4215	1.5184	300	2.4502	1.5431