کیهان‌شناسی - جلسه ۵   ۸۶/۱۲/۱۱

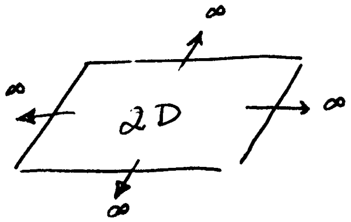
هندسه عالم

متریک فریدمن رابرتسون واکر

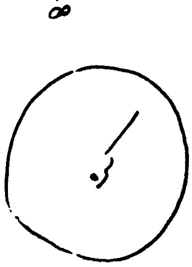
$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\, dl^2$$

کیهان 2+1 بعدی در نظر بگیریم که بدون مرز است در نتیجه انبساط یکنواخت است.

فرض: قسمت فضایی متریک همگن است.

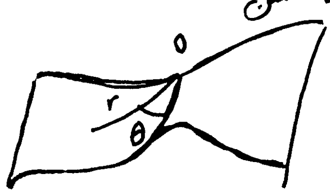


کیهان 2D همگن
- فضای تخت
- کره
- هذلولوی



برای چه فضاهایی انحنا فضا مستقل از مکان است.

رویه دلخواه همگن



$$ds^2 = g_{11}\, dx_1^2 + g_{22}\, dx_2^2 + 2g_{12}\, dx_1 dx_2$$

متریک در حالت کلی

برای رویه همگن، اگر دستگاه مختصات را در هر مکانی قرار دهیم رویه را همگن باید ببینیم در نتیجه رویه همسانگرد است.

$$ds^2 = g_{rr}\, dr^2 + 2g_{r\theta}\, dr\, d\theta + g_{\theta\theta}\, d\theta^2$$

مختصات قطبی

$$\begin{cases} x_1 \longrightarrow r \\ x_2 \longrightarrow \theta \end{cases}$$

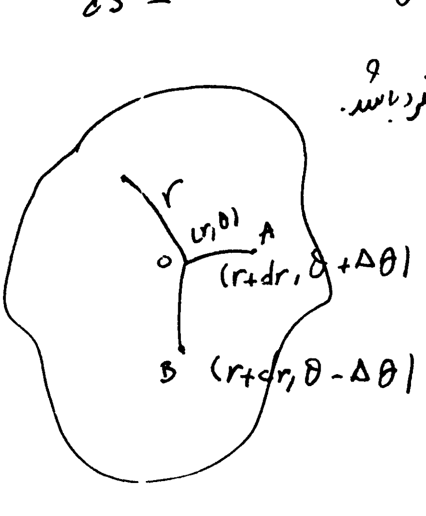
$$\theta = 0 \;\rightarrow\; ds = g_{rr}^{\frac{1}{2}}\, dr \longrightarrow dr'$$

$$ds^2 = dr'^2 + 2g'_{r\theta}\, dr' d\theta + g'_{\theta\theta}\, d\theta^2$$

اگر همسانگرد باشد: $ds_{OA} = ds_{OB}$ $\longrightarrow$ $2g'_{r\theta}\, dr' d\theta = 0$

↓

(مستقل از جهت) شعاع یکسان



در نتیجه $\longrightarrow$ $ds^2 = dr^2 + g^2_{\theta\theta}(r)\, d\theta^2$

↓

فقط تابعی از r

تمرین: اسکالر ریچی را برای متریک $ds^2 = dr^2 + g_{\theta\theta}(r)\, d\theta^2$ را بدست آورید.

$[R] = \text{طول}^{-2}$ ؛ شعاع انحنای گوسی $\equiv K$ بزرگ انحنای نسبت فضا: (ناشی از مکان نباشد) $R = K$ (

راهنمایی دوم به مسئله: در ابتدا جمله $g_{r\theta}(r,\theta)\, dr\, d\theta$ را برابر صفر قرار می‌دهیم.

در نتیجه

$$ds^2 = g_{rr}(r)\, dr^2 + g_{\theta\theta}(r)\, d\theta^2$$

تغییر متغیر $g_{\theta\theta}(r) \longrightarrow r'^2$

$$ds^2 = f(r')\, dr'^2 + r'^2\, d\theta^2$$

تمرین: اسکالر ریچی را برای متریک فوق بدست آورید.

اگر $R = K \to f(r) = \dfrac{1}{1-Kr^2}$

در نتیجه

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2\, d\theta^2$$

برای محاسبه انحنای نسبت فضای متریک، از مجموع زوایای یک مثلث یا نسبت محیط به شعاع دایره می‌توان استفاده کرد.

$K = 0 \to ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2$ 　 $\boxed{\Delta \ \text{تخت}}$ 　 $\dfrac{\text{محیط}}{\text{شعاع}} = 2\pi$

$\alpha + \beta + \gamma = \pi$ 　 مجموعه زوایا $= 180^\circ$

$$K > 0 \longrightarrow ds^2 = \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2\, d\theta^2$$

$$r = K^{-1/2}\, r' \longrightarrow ds^2 = K^{-1}\left[\frac{dr'^2}{1-r'^2} + r'^2\, d\theta^2\right]$$

$-1 < r' < 1 \to 0 < r'^2 < 1$ (ضریب متریک باید مثبت باشد.)

$$r' = \sin\chi \to ds^2 = K^{-1}\left[\frac{\cos^2\chi\, d\chi^2}{\cos^2\chi} + \sin^2\chi\, d\theta^2\right]$$

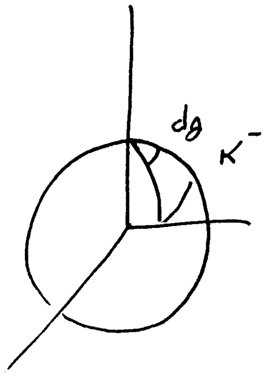
$$ds^2 = K^{-1}\left[d\chi^2 + \sin^2\chi\, d\theta^2\right]$$

$\chi \longrightarrow \theta$

$\theta \longrightarrow \varphi$

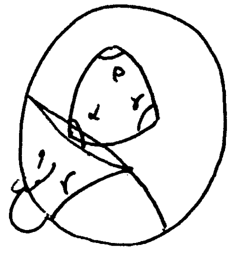
متریک کره $R^2 = K^{-1}$

$$ds^2 = R^2 [d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2] \qquad 0 < \theta < \pi$$



$d\theta$ $\quad K^{-1/2} d\theta$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma > \pi \\ \dfrac{S}{R} < 2\pi \end{cases}$$



لته حاسم

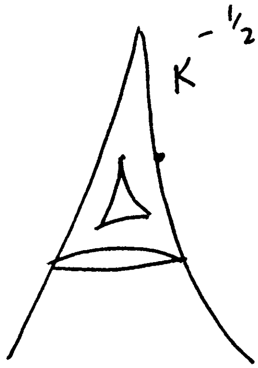
$$K < 0 \quad \rightarrow \quad ds^2 = \frac{dr'^2}{1+r'^2} + r'^2 d\theta^2$$

$$0 < r'^2 < \infty \quad \rightarrow \quad -\infty < r' < \infty$$

$$r' = \sinh \chi \quad \rightarrow \quad ds^2 = K^{-1} [d\theta^2 + \sinh^2\theta \, d\varphi]$$

$$\begin{matrix} \chi \rightarrow \theta \\ \theta \rightarrow \varphi \end{matrix} \qquad \begin{cases} 0 < \varphi < 2\pi \\ -\infty < \theta < +\infty \end{cases}$$

$K^{-1/2} d\theta$



$K^{-1/2} d\theta =$ فاصله تا مبدأ

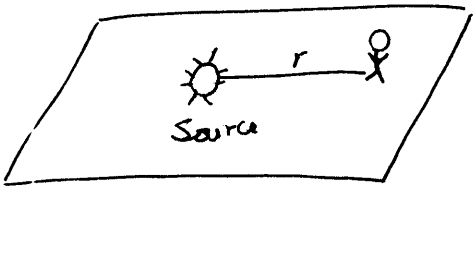
$\varphi = 0$: بدون تغییر زاویه

$\sinh\theta \, d\varphi =$ شعاع

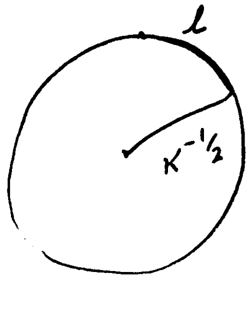
$d\theta = 0$ ، فاصله ثابت

$$\alpha+\beta+\gamma < \pi$$

$$\frac{S}{R} > 2\pi$$



$$\underset{\text{شار}}{S} = \frac{\phi_0}{2\pi r}$$



$$F = \frac{\phi_0}{2\pi K^{-1/2} \sin\theta} \quad , \quad l = K^{-1/2}\theta$$

$$F = \frac{\phi}{2\pi K^{-1/2} \sin\left(\frac{l}{K^{-1/2}}\right)}$$

4,

شار در فضای هذلولی

$$F = \frac{\phi}{2\pi K^{-1/2} \sinh\left(\frac{l}{K^{-1/2}}\right)}$$

شار دریافتی فضای کروی $>$ شار دریافتی فضای تخت $<$ شار دریافتی فضای هذلولی

$$S_K = \begin{cases} 2\pi l & K=0 \\ 2\pi K^{-1/2} \sin(l K^{1/2}) & K>0 \\ 2\pi K^{-1/2} \sinh(l K^{1/2}) & K<0 \end{cases}$$

محیط

متفاوت S_K

شعاع انحنا $R = K^{-1/2}$, $l \gg K^{-1/2}$

اگر $l \ll K^{-1/2} \rightarrow l K^{1/2} \ll 1 \rightarrow S_K = 2\pi l$ for all K

در ۳ بعد

$$ds^2 = f(r)\, dr^2 + r^2 d\Omega$$

از محیط قطبی در 2D $\longrightarrow$ محیط کره‌ای در 3D

$$S_K = \begin{cases} 4\pi r^2 & K=0 \\ 4\pi K^{-1} \sin^2(l K^{1/2}) & K>0 \\ 4\pi K^{-1} \sinh^2(l K^{1/2}) & K<0 \end{cases}$$

سطح

- ارتباط بین کمیت‌ها در فضا با ابعاد

l : فاصله چشمه تا ناظر

$K^{-1/2}$: شعاع انحنا

$$K \neq 0 \quad ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{d\chi^2}{1-Kr^2} + \begin{Bmatrix} \chi^2 \\ \sin^2\chi \\ \sinh^2\chi \end{Bmatrix} d\Omega \right]$$

فاصله بین کهکشان و ناظر با این فرض که رویداد نورگونه باشد $ds = 0$

$ds = 0 \to d\theta = d\varphi = 0$ مسیر شعاعی $\qquad \mathcal{K}^{-1} \equiv \frac{1}{1-kr^2}$

$$+dt^2 = a^2(t)\underbrace{\mathcal{K}^{-1} d\chi^2}_{\text{طول فیزیکی}} \to dt^2 = a^2(t)\, d\chi^2$$

$$\to \chi = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_t^{t_0} \frac{dt}{da}\cdot\frac{da}{a} = \int_a^1 \frac{da}{H(a)\,a^2}$$

$$a^{-1} = 1+z \to \frac{-da}{a^2} = dz \to \chi = \int_0^{z_{obs}} \frac{dz}{H(z)}$$

"انتقال به سرخ"

دارای دینامیک

اگر فاصله شیء رصدی از ناظر خیلی کم باشد می‌توانیم فرض کنیم که پارامتر هابل کم تغییر می‌کند پس می‌توانیم آن را بسط دهیم

$$H(z) = H(z=0) + \left.\frac{dH}{dz}\right|_{z=0} z + \frac{1}{2}\frac{d^2H}{dz^2} z^2 + \cdots$$

$'$: مشتق نسبت به z

$$\chi = \int \frac{dz}{H_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{H_0'}{H_0} z + \frac{1}{2}\frac{H_0''}{H} z^2}$$

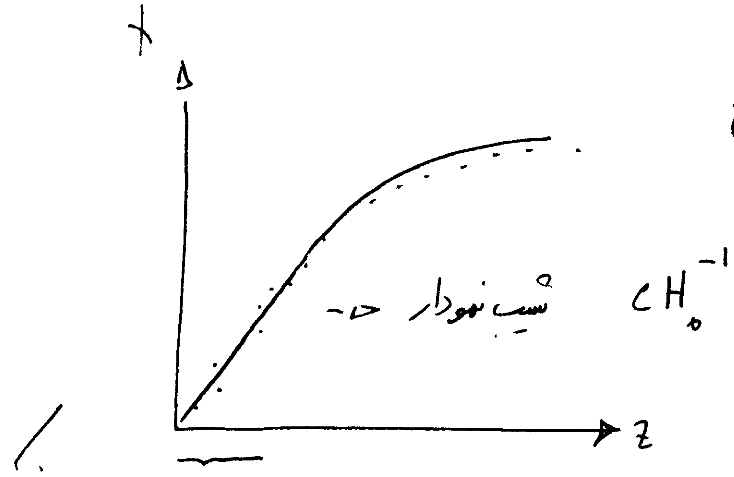
$$\chi = \frac{1}{H_0}\int_0^z \left(1 - \frac{H_0'}{H_0} z - \frac{1}{2}\frac{H_0''}{H}\right) dz$$

$$\chi = \frac{(c)\,1}{H_0}\left(z - \frac{H_0'}{2H_0} z^2 - \frac{1}{6}\frac{H_0''}{H_0} z^3 + \cdots\right)$$

سرعت نور به محاسبه فیزیکی

$$z \ll 1 \to \chi = c H_0^{-1} z$$

6,



انتقال به سرخ کم - z

نمودار ایزواختر - فاصله بر حسب انتقال به سرخ

$$\chi \simeq cH_0^{-1} z$$

$$H_0 = 100 \frac{Km}{SMpc} h$$

$h \sim 0.7$

$$\chi = \frac{1}{100h} \frac{Mpc}{Km/s} \cdot 300{,}000 \, km/s \; z \rightarrow \boxed{\chi = \frac{3000}{h} z} \, Mpc$$

$$z \simeq 0.01 \rightarrow \chi = 30/0.7 \, Mpc$$