1,

کیهان‌شناسی - جلسه ۶ ۸۶/۱۲/۱۳

سطح

$$S_K = 4\pi K^{-1} f^2(\chi K^{\frac{1}{2}})$$

هندسه کیهان

$$f(\chi K^{\frac{1}{2}}) = \begin{cases} \chi K^{\frac{1}{2}} & K=0 \\ \sin(\chi K^{+\frac{1}{2}}) & K=1 \\ \sinh(\chi K^{+\frac{1}{2}}) & K=-1 \end{cases}$$

$$\chi = \int_0^{z_{obs}} \frac{dz}{H(z)}$$

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 K^{-1} dl^2$$

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 K^{-1}\left[\frac{dr^2}{1+K'r^2} + r^2 d\Omega\right] \qquad K' = 0, \pm 1$$

متریک را در معادلات انیشتین قرار می‌دهیم.

$$G_{\mu\nu} = K T_{\mu\nu}$$

$$\xrightarrow{\text{مؤلفه } (0,0)} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

زمان حال

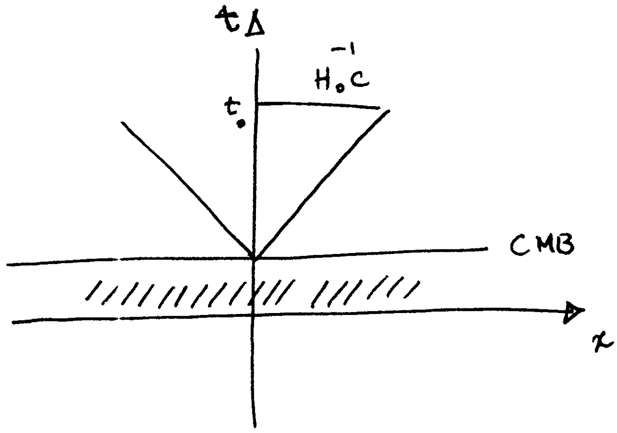
$$H_0^2 + K = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

مقدار مسافتی که نور از آغاز کیهان پیموده است ~ H_0^{-1} $c=1$

تمرین: مسافت طی شده توسط فوتون از $t=0$ تا t_0 تقریباً برابر است با $d_{H_0} \sim H_0^{-1}c$ ، این ادعا را اثبات کنید. (افق رویداد انفجار بزرگ)

↓
افق

نکته: چون در زمان قبل از واجفتیدگی، کیهان کدر بوده است و فوتون‌ها مسیر زیادی را طی نکرده‌اند پس تعریف دقیق‌تر d_H عبارت است از افق رویداد جدا شدن ماده از تابش



$$d_{H_0} \sim H_0^{-1}c = \frac{300{,}000\ \mathrm{Km/s}}{100\ \mathrm{km/s/Mpc}\ h} = 3000\ \mathrm{Mpc}$$

معادله فریدمن را بازنویسی می‌کنیم.

$$\left(\frac{1}{d_{H_0}}\right)^2 + \frac{1}{\underset{\downarrow}{R}} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

انحنای قسمت فضایی کیهان

پیدا کردن Topology کیهان بسیار دشوار است. سوال ساده‌تر پیدا کردن نسبت انحنای قسمت فضایی به شعاع افق رویداد می‌باشد.

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

$$= \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_M^{(0)} a^{-3} + \rho_r^{(0)} a^{-4}\right)$$

$a=1$ زمان حال : $H_0^2 + K = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_M^{(0)} + \rho_R^{(0)}\right)$

$$\rightarrow K = H_0^2\left[\frac{8\pi G}{3}\cdot\frac{\rho_m^{(0)}}{H_0^2} + \frac{8\pi G}{3}\cdot\frac{\rho_r^{(0)}}{H_0^2} - 1\right]$$

چگالی بحرانی تعریف می‌کنیم

$$K = H_0^2\left[\frac{\rho_m^{(0)}}{\rho_c^{(0)}} + \frac{\rho_R^{(0)}}{\rho_c^{(0)}} - 1\right]$$

$$\frac{3H_0^2}{8\pi G} = \rho_c^{(0)} \qquad K = H_0^2\left[\Omega_m^{(0)} + \Omega_R^{(0)} - 1\right] \rightarrow \boxed{K = H_0^2\,\Omega_K}$$

اگر $\Omega_m^{(0)} + \Omega_R^{(0)} > 1 \xrightarrow[\text{در نتیجه}]{} K > 0$ باز

$$\text{شعاع انحنا } R = \frac{d_{H_0}}{\sqrt{\Omega_m^{(0)} + \Omega_r^{(0)} - 1}}$$

$$\frac{K}{H_0^2} = \frac{\text{شعاع افق}}{\text{شعاع انحنا}}$$

$$\begin{cases} \Omega_m + \Omega_r \simeq 1.1 \\ \rightarrow \underset{\text{شعاع کیهان}}{R} = 3\,\underset{\text{افق}}{d_{H_0}} \end{cases}$$

* از طرفی این رابطه $K = H_0^2\left[\Omega_t^{(0)} - 1\right]$

$$\Omega_t^{(0)} - \frac{K}{H_0^2} = 1 \rightarrow \Omega_R^{(0)} + \Omega_m^{(0)} + \Omega_K^{(0)} = 1$$

$$S_K = \begin{cases} 4\pi \chi^2 & K=0 \\ \dfrac{4\pi}{H_0^2 \Omega_K} \sin^2\left(\chi H_0 \sqrt{|\Omega_K|}\right) \\ \dfrac{4\pi}{H_0^2 |\Omega_K|} \sin^2\left(\chi H_0 \sqrt{|\Omega_K|}\right) \end{cases}$$

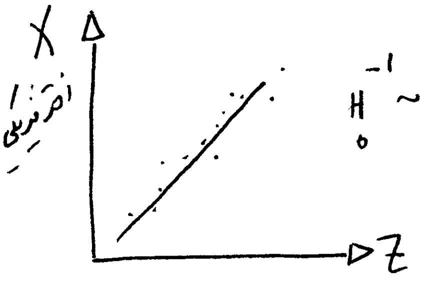
با داشتن H_0 و ماده موجود در کیهان از رابطه $\Omega_R^{(0)} + \Omega_m^{(0)} + \Omega_K = 1$ S_K را محاسبه کرد.

سؤال: Ω_K ، Ω_t ، H_0 چه مقدار است؟

• اندازه‌گیری H_0 $\chi = c H_0^{-1} z$ در انتقال به سرخ نزدیک

روش‌های اختر فیزیکی ← χ ؛ z ← با استفاده از طیف‌سنجی

- ستاره‌های قیفاووسی
- شمع‌های استاندارد



شیب $\sim H_0^{-1}$

طیف‌سنجی

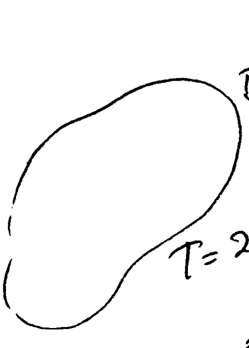
روش دیگر اندازه‌گیری پارامترها: همگرایی گرانشی است.

• اندازه‌گیری Ωها

اگر Ω مربوط به ماده و تابش را داشته باشیم Ω_K را می‌توانیم به دست آوریم.

Ω_R: با استفاده از اندازه‌گیری تابش پس‌زمینه کیهانی به وسیله فرضیه تابش جسم سیاه.

Black-Body $\rho \propto T^4$ (ترمودینامیک)



$T = 2.7\,K$

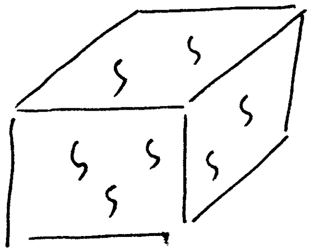
$$\Omega_R = \frac{8\pi G}{3} \cdot \frac{\rho_R^{(0)}}{H_0^2} \rightarrow \sim T^4$$

دلیل این که تابش پس‌زمینه جسم سیاه است این است که از آغاز کیهان تا زمان واجفتیدگی، به تعداد بسیار زیاد برخوردی انجام شده است و تابع توزیع دلخواه را گرفته است.

$$\Omega_R \equiv \frac{8\pi G}{3} \cdot \frac{T^4}{H_0^2} = 10^{-5}$$

اندازه گیری Ω_m :

- حجم از کیهان را در نظر می گیرم با شمارش تعداد کهکشان ها
و با علم به تعداد ستاره های موجود در کهکشان نوعی
می توانیم Ω_m را محاسبه کنیم.

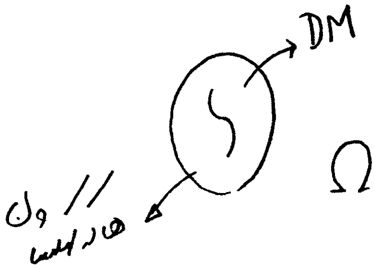


$$\Omega_m = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho}{H_0^2} \sim 0.01 \ !$$

اگر تا همین حد کیهان شناسی بدانیم ، نتیجه می گیرم $\Omega_K = 0.99$

* پروژه : در سایت CDS ، کاتالوگ 2dF ، تا انتقال به سرخ مشخص ، تعداد کهکشان ها
را بشمارید با این فرض که هر کهکشان 10^{11} ستاره با جرم متوسط $0.3M_\odot$ ، Ω_M را بیابید.

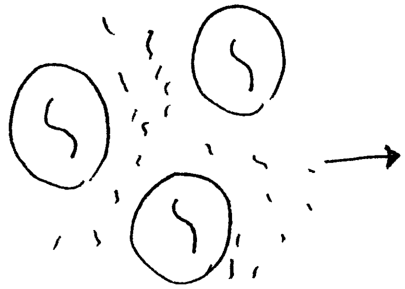
ماده تاریک : در هاله ای توپی به صورت کروی حول کهکشان ها



با در نظر گرفتن هاله کهکشان ها

$$\Omega_{Halo} = 0.1$$

$$\Omega_{DM} \sim 10\,\Omega_{lumi}.$$



ماده تاریک بین کهکشان ها) با استفاده از تکنیک های همگرایی گرانشی

$$\Omega_{Matter} = 0.3$$

استفاده از داده های ابرنواختر نوع Ia

ابرنواختر نوع I : همرستی کوتوله سفید و غول سرخ که جرم از غول سرخ به سمت کوتوله سفید سرازیر می شود و هنگامی که جرم کوتوله سفید به حد چاندرا $M = 1.4 M_\odot$ برسد، کوتوله سفید متلاشی می شود و ابرنواختر نوع I می شود که شمع استاندارد داشت.

قدر $\quad m = -2.5 \log F + c$

شار (درخشندگی چشمه)

قرار دادن ستاره در فاصله $10pc$

قدر مطلق $\quad M = -2.5 \log F(d = 10pc) + c$

$$\mu = m - M = -2.5 \log \left(\frac{F(d)}{F(d = 10pc)} \right) = -2.5 \log \left(\frac{10}{d} \right)^2$$

$$m - M = 5 \log \left(\frac{d}{10pc} \right) \equiv \mu$$

"مدول فاصله" distance modulus.

اگر قدر ظاهری و قدر مطلق را بدانیم $\longrightarrow$ می توانیم فاصله را تعیین کنیم

مثال : LMC ابرماژلانی بزرگ در فاصله $d = 50\ Kpc$

$$\mu = 5 \log \left(\frac{50 \times 10^3}{10} \right) = 5 (3 + \log 5) = 18$$

نجومی $\quad \mu = 5 \log \left(\frac{d}{10pc} \right) \longrightarrow$ فاصله : $\int \frac{dz}{H(z)}$

از رصد می دانیم

شامل پارامتر آزاد $(\Omega_m, \Omega_K, \dots)$

61

انحنا منفی : تصحیح ۱

معادل فاصله در کیهان‌شناسی :

$$\mu = -2.5 \log \frac{\frac{\phi}{S_K}}{\frac{\phi}{4\pi(10pc)^2}} = -2.5 \log \left(\frac{4\pi(10pc)^2}{S_K} \right)$$

$\phi \rightarrow$ توان

نکته بسیار مهم : توان ابرنواختر در فواصل دور کمتر است دلیل آن که در کیهان گذشته زمان ها کندتر بودند

$$\underset{\text{زمان کشیده شده}}{\Delta t} \sim \frac{\Delta t_0}{a} \sim \Delta t_0 (1+z)$$

تصحیح ۲ : کند بودن زمان

$$\mu = -2.5 \log \frac{\frac{\phi/(1+z)}{S_K}}{\frac{\phi}{4\pi(10pc)^2}}$$

نکته بسیار مهم : انرژی فوتون های کشیده شده نیز به دلیل انبساط کم می‌شود.

تصحیح ۳ : کم شدن انرژی فوتون ها

$$\mu = -2.5 \log \frac{\phi/(1+z)^2}{\phi/4\pi(10pc)^2}$$

$$\begin{cases} \mu = -2.5 \log \left[\dfrac{4\pi(10pc)^2}{(1+z)^2 S_K} \right] \\ S_K \equiv 4\pi C_K^2 \\ \chi = \displaystyle\int_0^z \frac{dz}{H(z)} \end{cases} \Rightarrow \mu = 5 \log \left[\frac{(1+z) H_0^{-1} |\Omega_K|^{-1/2}}{10pc} f(\chi) \right]$$

$$f(x) = \begin{cases} \chi H_0 \sqrt{\Omega_K} \\ \sin\chi (H_0 \sqrt{\Omega_K}) \\ \sinh(\chi H_0 \sqrt{\Omega_K}) \end{cases}$$

$$H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_M^{(0)} a^{-3}$$

$$\Rightarrow H^2 = H_0^2 \left[\Omega_M a^{-3} + \Omega_K a^{-2} \right]$$

7

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_m^{(0)} (1+z)^3 + \Omega_K (1+z)^2 \right]$$

نتیجه :

$$\chi = \frac{1}{H_0} \int \frac{dz}{\left[\Omega_m^{(0)} (1+z)^3 + \Omega_K (1+z)^2 \right]^{1/2}}$$

$$\downarrow$$

رصد SuperNova

حال باید پارامترها را آنقدر تغییر داد تا بهترین برازش را داشته باشیم.

$$\mu = \mu(\chi)$$

$$\downarrow$$

رصد

برای تئوریک

$$\mu = 5 \log\left[\left(\frac{\chi}{10pc}\right)(1+z)\right]$$

$$= 5 \log\left[(1+z) \frac{H_0^{-1}}{10pc} \frac{1}{\sqrt{\Omega_m^{(0)}}} 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)\right]$$

$$= 5 \log\left[\frac{2(1+z)}{\sqrt{\Omega_m h^2}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right) \frac{\overset{\rightarrow H_0^{-1}}{3000\, Mpc}}{10\, pc} \right]$$

$$= 5 \log\left[\frac{2(1+z)}{\sqrt{\Omega_m h^2}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)\right] + 5 \log 3 \times 10^8$$

$$\mu \cong 42.5 + 5 \log\left[\frac{2(1+z)}{\sqrt{\Omega_m^{(0)} h^2}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)\right]$$

تمرین : نمودار μ برحسب z رسم کنید.

الف) $\Omega_m = 1$

$h \in [0.1, 2]$

ب) Gold Sample SNIa

μ برحسب z را رسم کنید.