

# مدل استاندارد کیهان شناسی و ترمودینامیک کیهان اولیه

سهراب راهوار

دانشکده‌ی فیزیک دانشگاه صنعتی شریف

و

پژوهشکده فیزیک

پژوهشگاه دانشهای بنیادی

۲۰ مرداد ۱۳۸۴

چکیده: در این درسنامه مدل استاندارد کیهان شناسی و ترمودینامیک حاکم بر کیهان اولیه تا زمان واجفتیدگی فوتون های تابش زمینه ای کیهان و تشکیل اتمهای اولیه معرفی خواهد شد.

## ۱ مقدمه

کیهان شناسی علم بررسی دینامیک کیهان به عنوان یک سیستم مکانیکی می باشد. در این علم با شناخت شرایط مرزی حاکم بر دینامیک و با در دست داشتن معادلات حاکم بر آن می توان تحول کیهان را برای زمان های آینده و گذشته به دست آورد. با توجه به محدود بودن سرعت نور، خوشبختانه می توان وقایع رخ داده در گذشته ی کیهان را با رصد مخروط نوری گذشته ثبت کرد. بنابراین شرایط مرزی این سیستم را برای مقاطع مختلف زمانی خواهیم داشت. مهم ترین آنها، زمان حال به مفهوم رصد اجرام کیهانی تا فاصله چند صد

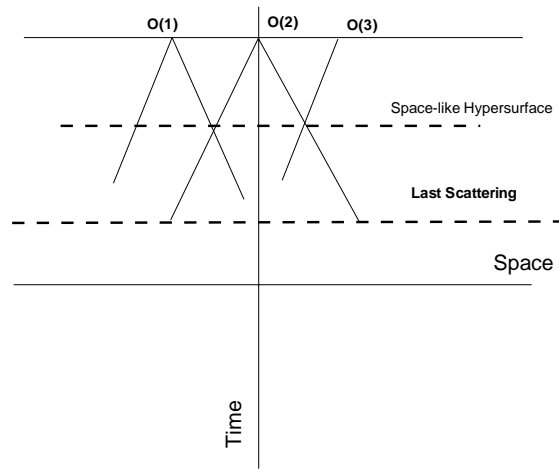
مگا پارسکی و زمان واجفتیدگی فوتونهای کیهان از شماره پلاسمای کیهانی می باشد. تا قبل از ساخت تلسکوپهای بزرگ در اوایل قرن بیستم، فیزیک دانها تصوّر بسیار کوچکی از مقیاس کیهانی داشتند. تنها در سال ۱۹۳۶ بود که هابل نشان داد کهکشانشها مجموعه ای از صد ها میلیارد ستاره می باشند که در حال دور شدن از هم هستند. با ساخت CCD ها به عنوان آشکارسازهای حساس، انقلاب دیگری در کیهان شناسی رخ داد که منجر به رصد اجرام بسیار کم سو و دور دست کیهانی شد. این اندازه گیریهای دقیق منجر به آشکار شدن مساله ماده و انرژی تاریک شده است. مشکل ماده تاریک بدین معنی است که اجرام روشن مشاهده شده، از جرم دینامیکی ساختارها به مراتب کمتر است. در مقیاس کهکشانی این کمبود یک مرتبه مقداری و در مقیاس کیهانی دو مرتبه مقداری می باشد. مشکل غامض دوم وجود انرژی تاریک می باشد که از طرق مختلف تایید شده است. انرژی تاریک ماده‌ی ناشناخته‌ای در حیطه‌ی فیزیک متعارف است که ۷۰ درصد از جرم کیهان را اشغال کرده و دارای فشاری منفی است. این فشار منفی باعث شده کهکشانشها به عوض کاهش سرعت ناشی از گرانش متقابل، شتابی تند شونده داشته و در نتیجه افزایش سرعت داشته باشند.

در بخش اول این درس نامه مدل استاندارد کیهانی به عنوان مدلی موفق در توصیف مشاهدات کیهان شناختی معرفی می شود. در بخش دوم نیز ترمودینامیک کیهان اولیه تا زمان واجفتیدگی بررسی خواهد شد.

## ۲ مدل استاندارد کیهانی

کیهان شناخت استاندارد با اصل همگنی آغاز می گردد. به زبان نسبیت عامی شرط همگنی کیهان بدین معنی است که قسمت فضایی متریک حاکم بر دینامیک کیهان مستقل از مکان بوده و یا اسکالر ریچی تنها تابع زمان می باشد،  $R = R(t)$ . اصل کیهان شناسی را می توان از مبانی رصدی نیز به دست آورد. با توجه به توزیع یکنواخت ساختارهای کیهانی بر حسب فاصله آنها از ناظر زمینی در مقیاسهای بزرگ کیهانی می توان کیهان را برای ناظر زمینی یک ساختار همسانگرد در نظر گرفت.

از طرف دیگر تصوّر مرکزیت زمین از زمان کپرنیک تا کشف انبساط هابلی در مقیاس های بزرگ، ضعیف تر و ضعیف تر شده است. در ابتدا بشر تصوّر مرکزیت زمین را برای سامانه‌ی زمین و خورشید و سیارات داشت که با کشف حرکت سیارات، زمین یک مرتبه موقعیت خود را از دست داده و تبدیل به یکی از سیارات عادی منظومه شمسی شد. با کشف موقعیت خورشید در کهکشانشها راه شیری، خورشید به عنوان یک ستاره عادی از صد میلیارد ستاره‌ی راه شیری موقعیت ممتاز خود را بار دیگر از دست داد. نهایتاً با کشف میلیونها کهکشانشها دیگر به طور یقین می توان نتیجه گرفت که زمین در نقطه ممتازی از کیهان قرار نگرفته است.



شکل ۱: با در نظر گرفتن ناظر غیر ممتاز، مخروط نوری گذشته‌ی ناظرها بر روی ابر سطحهای فضا-گونه هم پوشانی داشته و در نتیجه چگالی کیهان بر روی این ابر سطحهای همگن خواهد بود.

حال با دو اصل (الف) همسانگردی کیهان برای ناظر زمینی و (ب) ممتاز نبودن زمین، می توان همگنی کیهان را نتیجه گرفت. شکل (۱) محل تقاطع دو مخروط نوری گذشته را برای ناظر زمینی و ناظر دلخواه نشان می دهد. در محل تقاطع این دو مخروط نوری بر روی یک ابر سطح فضا-گونه طبق اصل ممتاز نبودن زمین، ناظر دوم نیز می بایست مقدار یکسانی از چگالی ماده را مشاهده بکنند. با حرکت دادن ناظر دوم برای پوشاندن تمامی ابر سطح فضا گونه چگالی ماده بر روی این ابر سطح آنچنان که در شکلی (۱) با خط چین نشان داده شده، یکسان خواهد بود. در نتیجه با دو اصل یاد شده، می توان همگنی کیهان را نتیجه گرفت.

همچنین شرط حفظ همگنی کیهان یکسان بودن نرخ انبساط کیهان در تمامی جهات است،  $(\partial_x v_x = \partial_y v_y = \partial_z v_z)$ . شکل (۲) دو سری از مجموعه نقاط یکسان را نشان می دهد که با مقیاس مشخصی بزرگ نمایی شده و محل یکی از نقاط تغییر نکرده است. این آزمایش که انبساط یک فضای دو بعدی را نشان می دهد می توان به صورت زیر انجام گیرد: بر روی یک صفحه شفاف (transparency) تعدادی نقطه را به عنوان اجرام روی فضای دو بعدی علامت گذاری کرده و توسط دستگاه زیراکس از همان صفحه با مقیاسی متفاوت بر روی برگه‌ی شفاف دوم کپی بگیریم. حال می توان با استفاده از یک Overhead با روی هم گذاشتن دو برگه‌ی شفاف تغییر ساختار را مقایسه کرد. دو برگه را آنچنان بر هم می گذاریم که دو نقطه‌ی یکسان از دو برگه بر هم منطبق بوده و راستای صفحات نیز هم امتداد باشد. براحتی دیده می شود که اولاً انبساط شعاعی بوده و جابجایی نقاط در اثر تغییر مقیاس نیز متناسب با فاصله از مبدا محتصات می باشد. ثانیاً با جابجا کردن مبدا محتصات

شکل ۲: تاثیر انبساط کیهان بر روی فاصله بین کهکشان‌ها. به طوری که مشاهده می‌شود، فاصله بین کهکشان‌ها متناسب با فاصله‌ی آنها از یک ناظر دلخواه گسترده شده که مبین قانون هابل است. نکته دومی که در این شکل دیده می‌شود عدم مولفه‌ی غیر شعاعی در جریان هابلی است.

این قانون برای تمامی نقاط روی صفحه‌ی دوبعدی حاکم است. نتیجه‌ی این آزمایش به زبان ریاضی سرعت دور شدن ذرات روی صفحه از مبدا مختصات را  $v \propto r$  به دست می‌دهد. برای راحتی در محاسبات معمولاً از دو نوع دستگاه مختصات فیزیکی و همراه استفاده می‌کنند. فاصله بین دو نقطه در ابرسطح فضاگونه را در زمان حال طبق تعریف طول همراه نامیده و ارتباط آن با طول فیزیکی به صورت  $r(t) = a(t)\chi$  می‌باشد. در اینجا  $r(t)$  مختصات فیزیکی،  $a(t)$  فاکتور مقیاس و  $\chi$  طول همراه است. می‌توان کیهان را در یک بعد به صورت کشی تصور کرد که با کشیدن آن فاصله بین نقاط افزایش می‌یابد حال آنکه مقیاس‌های نشانه گذاری شده بر روی کش همواره ثابت است.

## ۱.۲ کیهان شناخت نیوتنی

در فرمول بندی نیوتنی، کیهان محدود و بدون مرزی را در نظر می‌گیریم. با انتخاب یک دستگاه مختصات دلخواه قضیه گاوس را می‌توان برای کره‌ای به شعاع  $r$  به صورت زیر نوشت [۱-۳]:

$$\vec{g} = -\frac{GM(r)}{r^3} \vec{r} = -\frac{4\pi}{3} G\rho \vec{r} \quad (1)$$

به طوری که  $\rho$  چگالی کیهان و  $G$  ثابت گرانش است. با جاگذاری مختصات همراه با مختصات فیزیکی معادله نیرو به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \rho \quad (2)$$

با ملاحظات نسبیت عامی به عوض  $\rho$  جمله‌ی  $\rho + 3P$  را در سمت راست معادله‌ی (۲) خواهیم داشت<sup>۱</sup>. عدم حضور جمله فشار به معنی غیرنسبیتی بودن شماره است. در صورت نسبیتی بودن شماره، جرم موثر گرانشی آن به دلیل سرعت ترمودینامیکی افزایش یافته و نتیجتاً باعث افزایش اثر گرانشی شماره‌ی کیهانی خواهد شد. عبارت (۲) برای شماره نیوتنی ( $P = 0$ ) در چارچوب نسبیت عام صادق است. برای پایستگی انرژی در واحد جرم در مختصات همراه نیز خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{2E}{\chi^2 a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad (3)$$

در اینجا  $E$  انرژی در واحد جرم می باشد. حال می توان دینامیک کیهان را بر حسب شرط انرژی بررسی کرد. برای حالت  $E > 0$  ما کیهان باز و یا انبساط تا ابد را خواهیم داشت. مثبت بودن  $E$  به معنی منفی بودن علامت جمله دوم در دست چپ معادله‌ی (۳) می باشد. با مقایسه معادله‌ی (۳) با معادله فریدمن-رابرتسون-واکر  $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + k/a^2 = 8\pi G/3\rho$  که نتیجه‌ی محاسبات نسبیت عامی می باشد، تعبیر نیوتنی  $k$  به معنی انحنا قسمت فضایی متریک به صورت انرژی سیستم کیهانی به دست می آید. با مقایسه‌ی معادله‌ی فریدمن و معادله‌ی پایستگی انرژی در مکانیک نیوتنی، ارتباط بین  $k$  و  $E$  را می توان به صورت زیر خلاصه کرد:

- $E < 0 \equiv k > 0$
- $E > 0 \equiv k < 0$
- $E = 0 \equiv k = 0$

## ۲.۲ کیهان شناخت نسبیتی

تعمیم نسبیت خاص به دستگاه های نالخت و استفاده از اصل هم ارزی موضعی بین میدان گرانش و دستگاه نالخت منجر به فرمول بندی نسبیت عام شد. در چارچوب نسبیت عام، فضا و زمان توسط متریکی توصیف می شود که می تواند بسته به انتخاب ناظر تغییر بکند. وجود ماده باعث خمیده شدن فضا و زمان شده و این انحنا فضا است که می تواند دینامیک ماده را مشخص بکند. در اینجا برهمکنشی بین هندسه به عنوان یک میدان مستقل با ماده وجود نداشته، بلکه این خود ماده است که هندسه فضا-زمان و مسیر حرکت ذرات را با استفاده از معادله‌ی انشتین مشخص می کند. با اعمال همسانگردی برای ناظر همراه

<sup>۱</sup> در اینجا  $c$  سرعت نور واحد در نظر گرفته شده است.

شماره‌ی کیهانی و تقاضای همگن بودن ابرسحهای فضا-گونه، متریک کیهان همگن غیر ایستا به صورت زیر به دست می‌آید [۹-۴]:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[ \frac{dx^2}{1 - kr^2} + x^2 d\Omega \right] \quad (4)$$

به طوری که  $k$  می‌تواند مقادیر صفر و  $\pm 1$  را به خود بگیرد. قسمت فضایی متریک بدون فاکتور مقیاس طول همراه نام دارد. معمولاً برای راحتی در محاسبه با تعریف زمان همدیس به صورت  $dt = a(t)d\eta$  متریک فریدمن را به صورت همدیس یک متریک مستقل از زمان می‌نویسند. یکی از پارامترهایی که در کیهان‌شناسی استاندارد استفاده می‌شود، پارامتر هابل و یا نرخ انبساط کیهان می‌باشد که به صورت  $H = \dot{a}/a$  تعریف می‌شود. پارامتر دیگری که از آن در سنجش طول استفاده می‌شود انتقال به سرخ نام دارد که با  $z$  نشان می‌دهند. پارامتر انتقال به سرخ ارتباط مستقیم با جابجایی طیف منبعی دارد که در فاصله معینی از ناظر قرار گرفته است. منشا این انتقال به سرخ اتساع زمان در میدان گرانش قوی تر نسبت به ناظر می‌باشد، پدیده‌ای که برای مثال برای دو ناظر یکی در نزدیکی یک سیاهچاله و دیگری در فاصله‌ی بی‌نهایت دور از آن رخ می‌دهد. در مورد کیهان نیز، با مشاهده‌ی مخروط نوری گذشته، کیهان را متراکم تر از زمان فعلی آن خواهیم دید که نتیجه آن افزایش اسکالر ریچی و در نتیجه کند کار کردن نسبی ساعت‌ها برای گذشته‌ی کیهانی خواهد بود. اثر سرخ‌گرایی فوتون‌های گسیل شده از یک منبع در فاصله‌ی کیهانی قابل رصد بوده و از آن به عنوان معیاری برای اندازه‌گیری فاصله استفاده می‌کنند. با استفاده از متریک معرفی شده برای کیهان میزان سرخ‌گرایی را می‌توان به دست آورد. تصور کنیم، منبعی دو پالس نوری پشت سر هم را به فاصله‌ی زمانی  $\delta t$ ، در زمان  $t$  به سمت ناظر در حال دور شدن از منبع گسیل کرده و در زمان  $t_0$  و به فاصله‌ی زمانی  $\delta t_0$  توسط ناظر دریافت شود.

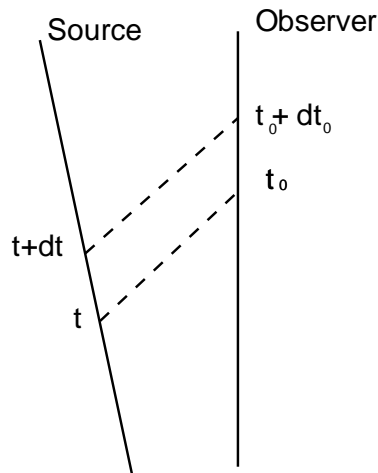
برای یک جهان خط نورگونه، ارتباط بین طول همراه ناظر-منبع و زمان سپری شده برای رسیدن پرتو نور به ناظر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{1 - kr^2} \quad (5)$$

برای سری دوم پرتو نوری که در زمان  $t + dt$  گسیل و در زمان  $t_0 + dt_0$  دریافت شده، طول همراه (سمت راست معادله‌ی (۵)) با گذشت زمان عوض نمی‌شود و در نتیجه برای سمت چپ معادله‌ی (۵) خواهیم داشت:

$$\int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t+dt}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (6)$$

نتیجه‌ی این انتگرال برای المان بی‌نهایت کوچک زمانی در مقایسه با عمر کیهانی، ارتباط اتساع زمان را بر حسب انتقال به سرخ به صورت  $\frac{\Delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\Delta t}{a(t)}$  به دست می‌دهد.



شکل ۳: دو پالس نوری به طور پشت سر هم توسط منبعی گسیل و توسط ناظر دریافت می شود.

بنابراین فرکانس امواج الکترومغناطیس دریافت شده توسط ناظر بسته به زمان ارسال فوتون ها متفاوت خواهد بود. نتیجه این اتساع زمانی، اتساع در طول موج دریافتی فوتون ها است که از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{a_0}{a} = 1 + z \quad (7)$$

فاکتور مقیاس در زمان حال را می توان هر مقدار دلخواه اختیار کرد، چرا که تنها تغییرات آن معنی فیزیکی دارد. معمولاً فاکتور مقیاس را برای زمان حال یک در نظر می گیرند. می توان با بسط فاکتور مقیاس  $a(t)$  حول  $a_0$ ، فاصله اجرام را بر حسب  $z$  برای انتقال به سرخ های کوچک به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned} a(t) &= 1 + \dot{a}(t - t_0) = 1 + z \\ \Delta t H_0 &= z \\ l &= \frac{cz}{H_0} \end{aligned} \quad (8)$$

در اینجا  $l$  فاصله ناظر از منبع،  $c$  سرعت نور و  $H_0 = 100 h \times km/sec/Mpc$  ثابت هابل در زمان حال می باشد. آخرین نتایج رصدی  $h = 0.7$  را به دست می دهد [10]. برای نمونه ابر نواختری با  $z = 0.1$  تقریباً در فاصله ی  $400 Mpc$  قرار دارد. با جا گذاری متریک در سمت چپ معادله ی انشتین  $G^{\mu\nu} = 8\pi GT^{\mu\nu}$  و در نظر گرفتن سیال کامل برای شاره ی کیهانی با تانسور انرژی - تکانه ی  $T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu + Pg^{\mu\nu}$ ، معادلات فریدمن همانند محاسبات نیوتنی با یک جمله ی اضافی در معادله ی (۲) به صورت زیر ظاهر می شود:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \quad (9)$$

با توجه به اینکه کیهان از مولفه‌های ماده‌ی باریونی، ماده‌ی تاریک سرد-گرم، تابش و انرژی تاریک تشکیل شده است، با استفاده از معادلات فریدمن تحول هر یک از این مولفه‌ها را می‌توان به دست آورد. با ترکیب معادله‌ی اول و دوم فریدمن می‌توان معادله‌ی پیوستگی را به صورت زیر نوشت:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (10)$$

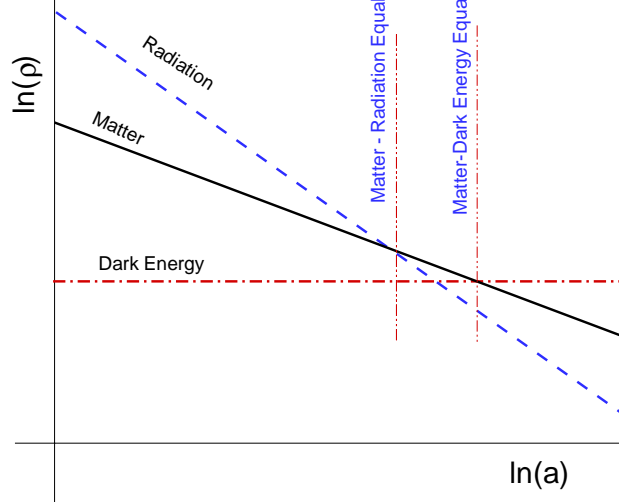
با توجه به معادله‌ی حالت ماده  $P = 0$ ، تابش  $P = 1/3\rho$  و انرژی تاریک  $P = -\rho$  تحول چگالی انرژی در هر یک از این مولفه‌ها نسبت به فاکتور مقیاس به ترتیب به صورت  $\rho \propto a^{-4}$ ،  $\rho \propto a^{-3}$  و  $\rho = constant$  خواهد بود. در اینجا لازم به یادآوری است که سیالی فرانسبیتی مانند تابش از معادله‌ی حالت  $p = 1/3\rho$  پیروی می‌کند. برای ماده، با افزایش حجم چگالی جرمی و عددی با نسبت معکوس با آن کم می‌شود. در مورد تابش و یا سیال فرانسبیتی چگالی عددی نیز با معکوس حجم یعنی  $a^{-3}$  متناسب است لکن با توجه اینکه طول موج فوتون‌ها به نسبت فاکتور مقیاس افزایش و یا انرژی آن با عکس فاکتور مقیاس کم می‌شود، نتیجه‌ی آن کاهش چگالی انرژی به نسبت  $a^{-4}$  خواهد بود. اندازه‌گیریهای تابش زمینه‌ای کیهانی و ابرنواخترهای نوع یک سهم مولفه‌های سازنده‌ی کیهان را در حال حاضر به صورت زیر به دست می‌دهد: ماده حدود ۳۰٪، انرژی تاریک حدود ۷۰٪ و تابش  $10^{-2}$ ٪. با توجه به معادله‌ی تحول چگالی ماده، تغییرات هر یک از مولفه‌های کیهانی بر حسب فاکتور مقیاس به صورت شکل (۴) تغییر می‌کند.

با توجه به رفتار هر یک از مولفه‌های سازنده کیهان بر حسب فاکتور مقیاس می‌توان نتیجه گرفت که برای  $z = 1.3$  ماده و انرژی تاریک سهم یکسانی از چگالی انرژی را داشته و بعد از این دوران کیهان وارد دوره‌ی انرژی تاریک غالب شده است. به همین ترتیب برای دوران قبل از  $z = 10000$  نیز دوران تابش غالب را برای کیهان خواهیم داشت.

کمیت دیگری که در کیهان شناسی مورد استفاده قرار می‌گیرد، نسبت چگالی تشکیل دهنده‌ی کیهان به چگالی بحرانی آن است،  $\Omega = \rho/\rho_c$ . چگالی بحرانی به ازای یک ثابت هابل داده شده، برای حالت  $k = 0$  به صورت  $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$  تعریف می‌شود. در این صورت انحنا‌ی قسمت فضایی متریک در معادله‌ی فریدمن را می‌توان بر حسب ثابت هابل و  $\Omega$  به صورت زیر نوشت:

$$\frac{k}{a^2} = H^2(\Omega - 1) \quad (11)$$





شکل ۴: تحول چگالی انرژی ماده (خط پیوسته)، انرژی تاریک (خط چین - نقطه) و تابش (خط چین) بر حسب فاکتور مقیاس در مقیاس لگاریتمی. خطوط عمودی زمان برابری ماده-تابش در  $z = 10000$  و ماده-انرژی تاریک را در حدود  $z = 1.3$  نشان می دهد.

از آنجایی که  $k$  انحنا قسمت فضایی متریک مستقل از زمان می باشد، سمت راست معادله ی (۱۱) را می توان برای دو دوره ی زمانی حال و هر زمانی در گذشته به دست آورد:

$$H_0^2 a_0^2 (\Omega_0 - 1) = H^2 a^2 (\Omega - 1) \quad (12)$$

از آنجا که پارامتر هابل به صورت  $H \propto 1/t$  و فاکتور مقیاس  $a \propto t^n$  با  $n < 1$  نسبت به زمان تغییر می کند، تابعیت  $\Omega$  نسبت به زمان به صورت  $t^{2(n-1)}$  خواهد بود. شرط اینکه مقدار  $\Omega$  در زمان حال از مرتبه ی یک باشد این است که مقدار آن در آغاز عالم به صورت بسیار ظریف تنظیم شده باشد. این مشکل مدل استاندارد کیهان شناسی با معرفی مدل تورمی قابل رفع است.

با توجه به سه مولفه ی متعارف برای شاره ی کیهانی، مقدار ماده تشکیل دهنده ی کیهان در معادله ی فریدمن را می توان به صورت مجموع مولفه ها به صورت  $\rho = \rho_m + \rho_\Lambda + \rho_r$  بیان کرد. با توجه به نحوه ی تحول هر یک از مولفه ها، چگالی کل به صورت زیر تغییر خواهد کرد:

$$\rho = \rho_m^{(0)} a^{-3} + \rho_r^{(0)} a^{-4} + \rho_\Lambda^{(0)}, \quad (13)$$

اندیس صفر مبین مقادیر چگالی ها در زمان حال است. با تقسیم طرفین تساوی به چگالی بحرانی، چگالی کل را می توان بر حسب  $\Omega$ ی هر یک از مولفه ها نوشت:

$$\rho = \rho_c (\Omega_m a^{-3} + \Omega_r a^{-4} + \Omega_\Lambda) \quad (14)$$

حال ما عبارت (۱۴) را در معادله‌ی فریدمن قرار داده و به جای انحنای قسمت فضایی متریک نیز عبارت  $k = H_0^2(\Omega_{total} - 1)$  را جاگذاری می‌کنیم. در این صورت پارامتر هابل بر حسب فاکتور مقیاس به صورت زیر به دست می‌آید:

$$H^2 = H_0^2[\Omega_m a^{-3} + \Omega_r a^{-4} + \Omega_\Lambda - (\Omega_{total} - 1)a^{-2}] \quad (15)$$

برای حالت‌های حدی معادله‌ی فوق در کیهان اولیه با توجه به غالب بودن جمله‌ی تابش، پارامتر هابل به صورت  $H \propto a^{-2}$  متحول می‌شود. از طرف دیگر برای  $a \rightarrow \infty$  نیز با حضور ثابت کیهان شناسی، کیهان به سمت فاز دو-سیتر میل خواهد کرد. یکی از کمیت‌های مهم در کیهان شناسی، اندازه‌گیری طول همراه بر حسب انتقال به سرخ داده شده است. محاسبه‌ی طول همراه در پژوهش‌های اخیر در زمینه‌ی ابرناخترهای نوع یک حائز اهمیت است. با توجه به ارتباط طول همراه و زمان لازم برای رسیدن نور به ناظر بر روی یک ژئودزی نور-گونه ( $ds^2 = 0$ )، طول همراه از طریق  $dt = a(t)d\chi$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\chi = \int \frac{dt}{a(t)} \quad (16)$$

$$\chi = \int_a^1 \frac{da}{a^2 H(a)} \quad (17)$$

$$\chi = \int_a^1 \frac{da}{a^2} H_0^{-1} [\Omega_m a^{-3} + \Omega_r a^{-4} + \Omega_\Lambda - (\Omega_{total} - 1)a^{-2}]^{-1/2} \quad (18)$$

باتغییر متغییر فاکتور مقیاس به انتقال به سرخ  $1 + z = a^{-1}$  برای طول همراه خواهیم داشت:

$$\chi(z_{obs}) = \int_0^{z_{obs}} \frac{dz}{H_0} [\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_r (1+z)^4 + \Omega_\Lambda - (\Omega_{total} - 1)(1+z)^2]^{-1/2} \quad (19)$$

یکی از کاربردهای طول همراه، محاسبه‌ی شدت نور منبعی است که در  $z$  مشخص قرار دارد. منبع نوری را در نظر می‌گیریم که فوتون‌هایی با انرژی  $h\nu$  با نرخ  $dn/dt$  گسیل می‌کند. از دیدگاه ناظری که در  $z = 0$  قرار گرفته است، با توجه به اتساع زمان نرخ گسیل فوتون‌ها با فاکتور  $1/(1+z)$  کاهش می‌یابد. از طرف دیگر انرژی هر فوتون نیز به دلیل انتقال به سرخ با فاکتور  $1/(1+z)$  کم می‌شود. بنابراین میزان انرژی گسیل شده،  $dE/dt$  نسبت به ناظر  $z = 0$  با فاکتور  $1/(1+z)^2$  کم خواهد شد. حال ناظر روی زمین شار انرژی منبع را که بر روی کره‌ای به شعاع ناظر تا منبع پخش شده دریافت می‌کند. فاصله‌ی طی شده از منبع تا ناظر برابر است با حاصل ضرب طول همراه در فاکتور مقیاس

در زمان حال ( $a_0 = 1$ ) که این فاصله برابر با همان طول همراه می باشد (معادله ی ۱۹). میزان شار انرژی که بدین ترتیب به ناظر  $z = 0$  می رسد برابر خواهد بود با:

$$\mathcal{L} = \frac{\phi}{4\pi(1+z)^2\chi(z)^2} \quad (20)$$

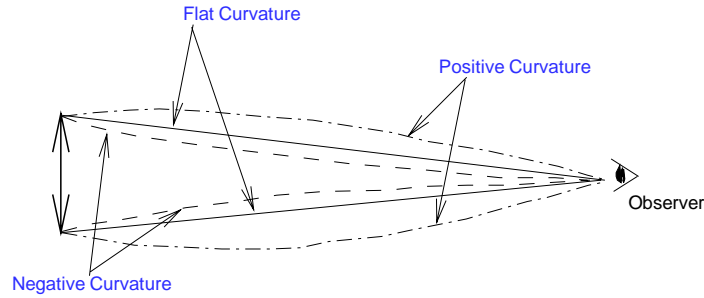
کمیت  $dL = (1+z)\chi(z; \Omega_m, \Omega_\Lambda)$  را فاصله ی درخشندگی<sup>۲</sup> می نامند. عمده ترین روش مشخص کردن وجود انرژی تاریک همانا اندازه گیری درخشندگی ظاهری شمع های استاندارد در مقیاس کیهانی است. در اینجا با برآزش داده های تجربی با قدر شمع استاندارد اندازه گیری شده، می توان پارامترهای کیهان شناختی را مقید کرد [۱۱]. کمیت رصدی دیگری که به پارامترهای کیهان شناسی حساس می باشد، زاویه ی فضایی رصدی اجرام با ابعاد مشخص است. از آنجا که چگالی شاره ی کیهانی مستقیما بر روی انحنای قسمت فضایی متریک تاثیر می گذارد، اندازه گیری انحنای هندسی کیهان می تواند مقدار مواد تشکیل دهنده ی کیهان را به دست دهد. برای متریک داده شده به صورت معادله ی (۴) که در آن پرتوهای نور-گونه به صورت شعاعی فاصله ی منبع تا ناظر طی می کنند ( $dt = a(t)d\chi = a(t)\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$ )، اندازه ی یک جسم تحت زاویه ای فضایی  $\Omega$  برابر با  $r d\Omega$  خواهد بود. بسته به اینکه انحنای فضا  $k$ ،  $+$ ،  $0$ ،  $-$  باشد، مختصه ی  $r$  بر حسب طول همراه به صورت زیر به دست می آید:

- if  $k = +1$ , then:  $r = \sin(\chi)$
- if  $k = 0$ , then:  $r = \chi$
- if  $k = -1$ , then:  $r = \sinh(\chi)$

بنابراین در صورت مشاهده ی جسمی به طول  $L$  که در مختصات همراه به فاصله ی  $z$  از ناظر قرار گرفته باشد، زاویه ی مشاهده به صورت  $\Omega = \frac{L}{r(\chi)}$  خواهد بود. اندازه گیری زاویه ای طول های مشخصه، مثلا بر روی تابش زمینه ای کیهان، می تواند انحنای فضا را به دست دهد. متناظر دو بعدی فضاهایی با انحنای مثبت، منفی و یا صفر به ترتیب سطح یک کره، زین اسبی و سطح صاف می باشند. با ترسیم ژئودزی ها از دو سر یک پاره خط به یک نقطه دلخواه (راس یک مثلث)، زاویه ی تقاطع آنها بسته به انحنای سطح متفاوت خواهد بود (شکل ۵).

---

<sup>۲</sup>Luminosity distance



شکل ۵: تاثیر هندسه فضا بر روی مسیر پرتوهای نوری که از یک پاره خطبه سوی ناظر گسیل می شود. برای هندسه بسته همانند رویه یک کره، ناظر پاره خط را بزرگتر و در حالت هندسه ی باز مانند زین اسبی کوچکتر از فضای تخت خواهد دید.

### ۳.۲ تحول اندازه حرکت ذرات در کیهان منبسط شونده

بعد از دوران بسیار داغ کیهان اولیه، ذرات به تدریج در اثر انبساط کیهانی انرژی خود را از دست داده و سرد تر شدند. کاهش انرژی ذرات را می توان در چاقوب کاهش اندازه حرکت ذرات از دیدگاه نسبیتی توضیح داد. شاره ی کیهانی را در نظر بگیریم که از دید ناظر لخت اندازه گیری می شود. این ناظر سرعت سراسری شاره ی کیهانی را بر روی مبدا مختصات خویش صفر خواهد دید، لکن به دلیل دمای غیر صفر کیهان، تمامی ذرات موجود در این شاره انحراف از جریان هابلی خواهند داشت که حرکت آنها توسط معادله ژئودزی به صورت زیر داده می شود.

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = 0, \quad (21)$$

به طوری که مشتق نسبت به زمان همراه  $\tau$  گرفته شده و  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$  نیز نماد کریستوفل در متریک فریدمن-رابرتسون-واکر می باشد. برای مولفه ی غیر صفر  $\Gamma_{it}^i = \dot{a}/a$ ، معادله ژئودزی برای مولفه ی  $i$  نام سرعت  $v^i = dx^i/d\tau$  به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \delta v^i &= -2 \frac{\dot{a}}{a} v^i \delta t \\ \frac{\delta v^i}{v^i} &= -2 \frac{\delta a}{a} \end{aligned} \quad (22)$$

بدین ترتیب از حل معادله ی دیفرانسیل  $v \propto a^{-2}$  به دست می آید. به طوری که  $v = dx/d\tau$  می باشد. حال سرعت فیزیکی  $V$  را می توان برابر با حاصل ضرب فاکتور

مقیاس در  $dx/dt$  نوشت. بنابراین سرعت فیزیکی  $V$  بر حسب  $v$  به صورت زیر به دست می آید:

$$V = a \frac{dx}{dt} = a \frac{dx}{d\tau} \times \frac{d\tau}{dt} = a \frac{d\tau}{dt} v \quad (23)$$

از طرف دیگر رابطه‌ی زمان ویژه و زمان فیزیکی را می توان به صورت  $d\tau^2 = dt^2 - a^2 dx^2$  نوشت. بدین ترتیب  $\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - V^2}$  را در رابطه فوق جاگذاری کرده و در نهایت رابطه‌ی سرعت فیزیکی بر حسب فاکتور مقیاس به صورت زیر به دست می آید:

$$\frac{V}{\sqrt{1 - V^2}} \propto \frac{1}{a} \quad (24)$$

با ضرب کردن جرم سکون در طرفین این معادله  $\frac{m_0 V}{\sqrt{1 - V^2}} \propto \frac{1}{a}$  اندازه‌ی حرکت به صورت

$$P \propto \frac{1}{a} \quad (25)$$

تغییر خواهد کرد [۱۱]. حال انرژی جنبشی سیال کیهانی بسته به اینکه نسبیتی، (به معنی  $E = pc$ ) و یا نیوتنی  $E = p^2/2m$  باشد به ترتیب به صورت  $1/a$  و  $1/a^2$  کم خواهد شد. با توجه به ارتباط مستقیم متوسط انرژی جنبشی ذرات یک سیال به دمای آن، دمای شاره‌ی نسبیتی و نیوتنی به صورت  $1/T$  و  $1/T^2$  افت خواهد کرد.

### ۳ ترمودینامیک کیهان

در این فصل ترمودینامیک حاکم بر کیهان به عنوان یک سیستم بسته با مولفه‌های ماده و تابش را بررسی می کنیم. مولفه‌های تشکیل دهنده کیهان در دوران آغازین دارای ماهیتی متفاوت نسبت به زمان حال بود. با برگشت به آغاز کیهان، در دماهای حدود  $eV$  شاره کیهانی به صورت یونیزه در آمده و زمانی که دمای کیهان در حد  $MeV$  بود، فوتون‌های کیهانی توانستند زوج الکترون-پوزیترون‌ها را تولید بکنند. برای انرژی‌های بالاتر دمای شاره‌ی کیهانی به اندازه‌ای بالا بود که هسته‌های عناصر سبک نمی توانستند پایدار بمانند. برای این دوران پروتون و نوترون‌های آزاد بودند و بالاخره با نزدیک شدن به زمان آغاز کیهان انتظار داریم شاره‌ی کیهانی به صورت سوپ کوارکی باشد.

برای دوره‌های مختلف تحول کیهانی، ذرات با جمعیت و گونه‌های متفاوت ظاهر خواهند شد. این ذرات می توانند با برهمکنش انرژی خود را مبادله کرده و یا احتمالاً به یکدیگر تبدیل شوند. لکن با انبساط کیهان این برهمکنش‌ها به دلیل کاهش چگالی شاره کیهانی

وانرژی جنبشی ذرات متوقف شده و بعد از یک زمان مشخص که به آن زمان واجفتیدگی<sup>۲</sup> نیز گویند، ذرات بین دو گونه از شاره و یا ذرات بین یک شاره دیگر نمی توانند با یکدیگر برهمکنش داشته باشند. اگر  $\sigma$  سطح مقطع برخورد بین ذرات و  $n$  نیز چگالی عددی ذرات هدف و سرعت نسبی بین آنها نیز  $v$  باشد، در این صورت نرخ برهمکنش ذرات از رابطه‌ی  $\Gamma = n\sigma v$  به دست می آید. رابطه فوق را می توان از پویش آزاد میانگین،  $l = (n\sigma)^{-1}$  به دست آورد. برای دورانی از کیهان که نرخ برهمکنش بین ذرات از نرخ انبساط عالم  $H = \dot{a}/a$  کمتر باشد پویش آزاد میانگین ذرات بزرگتر از طول افق بوده  $l > H^{-1}c$  و ذرات بدون برهمکنش می توانند بر روی مسیر ژئودزی خود حرکت بکنند. آستانه‌ی زمان واجفتیدگی ذرات را بر حسب انتقال به سرخ با  $z_{dec}$  نشان می دهند.

برای مطالعه‌ی ترمودینامیک کیهان، تابع توزیع هر یک از مولفه‌ها ضروری می باشد. از آنجا که کیهان اولیه به میزان بالایی همگن است، لذا تابع توزیع مستقل از مکان به صورت  $f(p, x, t) = f(p, t)$  می باشد. برای ذرات فرمیونی و بوزونی تابع توزیع به صورت زیر می باشد:

$$f(p, t) d^3 p = \frac{g_A}{(2\pi)^3} \left[ \exp\left(\frac{E - \mu_A}{T} \pm 1\right) \right]^{-1} d^3 p \quad (26)$$

به طوری که  $g_A$  درجات آزادی اسپین  $\mu_A$  پتانسیل شیمیایی و  $E = (p^2 + m^2)^{1/2}$  انرژی ذرات می باشد. بعد از واجفتیدگی ذرات تعداد کل ذرات می تواند پایسته بماند:  $\mathcal{N} = \int f(p, t) d^3 p d^3 x$ . با توجه به ناوردایی المان فضای فاز  $d^3 p d^3 x$ ، بعد از واجفتیدگی تابع توزیع نیز ناوردا خواهد ماند. به بیان دیگر  $f(p(a_{dec}), t_{dec}) = f(p, t)$ . برای تابع توزیع داده شده، چگالی عددی، جرمی و فشار را می توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$n = \int f(p, t) d^3 p \quad (27)$$

$$\rho = \int f(p, t) E d^3 p \quad (28)$$

$$P = \int f(p, t) \frac{1}{3} \frac{p^2}{E} d^3 p \quad (29)$$

$$(30)$$

برای سیال فرا نسبیتی  $E = p$  با انتگرال گیری از عبارات فوق چگالی عددی و چگالی جرمی به ترتیب به صورت  $n \propto T^3$  و  $\rho \propto T^4$  به دست می آید. با توجه به اینکه برای ذرات نسبیتی فاکتور مقیاس با دمای سیال به صورت  $T \propto 1/a$  تغییر می کند، چگالی عددی و انرژی را می توان به صورت  $n \propto 1/a^3$  و  $\rho \propto 1/a^4$  نوشت. کاهش چگالی سیال بر حسب عکس حجم بدیهی است؛ لکن به دلیل کاهش انرژی برای ذرات فرانسبیتی به صورت  $1/a$ ، چگالی انرژی به صورت  $1/a^4$  کم خواهد شد. تابش زمینه ای کیهان

decoupling time<sup>۲</sup>

نیزار این قانون کاهش انرژی تبعیت می کند. در کیهان شناسی شماره‌ای که دارای انرژی فرانسبتی بوده یعنی معادله‌ی حالتی به  $P = 1/3\rho$  داشته باشد، اصطلاحاً تابش می نامند. برای ذرات فرانسبتی در دوره‌ی تابش غالب با جاگذاری چگالی انرژی بر حسب دما  $\rho = kg\frac{\pi^2}{30}T^4$  (برای بوزون ها  $k = 1$  و برای فرمیون ها  $k = 7/8$  می باشد)، پارمتر هابل و ارتباط بین عمر کیهان و دمای آن را می توان به صورت زیر به دست آورد:

$$H^2(T) = \frac{8\pi G}{3} \left(g \frac{\pi^2}{30}\right) T^4 \quad (31)$$

با جاگذاری ثابت گرانش بر حسب جرم پلانک  $G^{-1/2} = m_{pl}$ ، پارمتر هابل به صورت  $H = 1.66g\left(\frac{T}{m_{pl}}\right)$  به دست می آید. با توجه به اینکه برای دوران تابش غالب فاکتور مقیاس  $a \propto t^{1/2}$  تغییر می کند، لذا با جاگذاری در معادله‌ی فریدمن و باز نویسی انرژی بر حسب MeV خواهیم داشت  $t = g\left(\frac{1MeV}{T}\right)^2 \times 1sec$ . در سمت راست معادله‌ی فریدمن گونه‌های مختلف شماره‌ی کیهانی در دینامیک شرکت می کنند به طوری که چگالی کل از مجموع سهم مولفه‌های مختلف به دست آمده است. با در نظر گرفتن درجات آزادی کل ذرات به صورت مجموع درجات آزادی هریک از مولفه‌ها، درجه آزادی کل با کاهش دمای کیهانی کم می شود. برای مثال برای  $T > 300 GeV$ ،  $g \sim 10^2$ ، برای  $100 MeV < T < 1 MeV$ ،  $g \sim 3$ ،  $T = 1 - 100 MeV$ ،  $g \sim 10$  و برای  $T < 1 MeV$ ،  $g \sim 3$  می باشد.

### ۱.۳ رویدادهای مهم در کیهان اولیه

با توجه به مدل های فیزیک ذرات، برهمکنش ها را بر حسب انرژی شان می توان به سه دسته‌ی زیر تقسیم کرد:

(۱) انرژی های کمتر از  $1 GeV$  به طوری که فیزیک مسئله در این انرژی ها کاملاً شناخته شده است.

(۲) انرژی های بین  $1 GeV$  و  $10^{16} GeV$ ، به طوری در قطعیت تئوری های موجود به طور کامل یقین نداریم.

(۳) و انرژی های نزدیک پلانک.

برای انرژی های در حد  $1 GeV$  مجموعه‌ی ذرات الکترون و پوزیترون، همچنین در صورت جرم دار بودن نوترینوهای الکترون، میون و تاو با جرم های  $13eV$ ،  $0.25 MeV$  و  $35 MeV$  را می توان فرانسبتی در نظر گرفت. یکی از برهمکنش های موجود در این انرژی، برهمکنش بین نوترینوها با الکترون و پوزیترون ها به صورت  $\nu + \bar{\nu} \longleftrightarrow e^- + e^+$  می باشد. سطح مقطع این برهمکنش که از نوع هسته‌ای ضعیف می باشد، به صورت  $\sigma = \alpha^2 E^2 / m_x^4$  داده می شود، به طوری که  $\alpha = 2.8 \times 10^{-2}$  و  $m_x = 50 GeV$  جرم بوزون حامل میدان برهمکنش ضعیف است. با تعریف ضریب برهمکنش فرمی به صورت  $G_F = \alpha^2 / m_x^4$ ، سطح مقطع برهمکنش را می توان به صورت  $\sigma = G_F E^2$  بیان کرد. با

توجه به اینکه چگالی فرمیونها به صورت  $n \propto a^{-3} \propto T^3$  تغییر می کند، نرخ برهمکنش به صورت  $\Gamma \propto T^5$  و به صورت دقیق تر به صورت زیر خواهد بود:

$$\Gamma = 1.3 G_F^2 T^5 \quad (32)$$

برای زمانی که  $\Gamma = H$  باشد، برهمکنش بین نوترینوها و الکترون ها قطع خواهد شد. با تقسیم رابطه ی (32) به (31) آستانه ی واجفتیدگی نوترینوها برابر خواهد بود با:

$$\frac{\Gamma}{H} = 0.24 T^3 \frac{m_{pl}}{G_F^2} \simeq \left( \frac{T}{1.4 MeV} \right)^3 \quad (33)$$

بنابراین در دماهای حدود  $1 MeV$  نوترینوها از شاره ی کیهانی جدا می شود. فرآیند دیگری که برای انرژی های بالاتر از  $1 MeV$  حائز اهمیت می باشد، برهمکنش الکترون و پوزیترون با فوتون های زمینه ی کیهان به صورت  $e + e^+ \leftrightarrow 2\gamma$  می باشد. باتوجه به پایستگی پتانسیل شیمیایی در این فرایند و صفر بودن پتانسیل شیمیایی فوتون، خواهیم داشت  $\mu_e + \mu_{e^+} = 0$ . با جاگذاری پتانسیل شیمیایی  $\mu_{e^+} = -\mu_e$ ، اختلاف چگالی عددی بین الکترون و پوزیترون به صورت زیر به دست می آید:

$$n_e - n_{e^+} = \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty E(E^2 - m^2) \left[ \frac{1}{\exp(E - \mu)/T + 1} - \frac{1}{\exp(E + \mu)/T + 1} \right] dE \quad (34)$$

برای دمای  $T < m_e$  عبارت فوق به سمت  $\left[ \pi^2 (\mu/T) + (\mu/T)^2 \right] / (6\pi^2)$  میل خواهد کرد. برهمکنش بین الکترون ها و پوزیترون ها برای زمانی که پویش آزاد میانگین آنها برابر با طول افق باشد، متوقف شده و در نهایت مقداری پوزیترون آزاد در پرتوهای کیهانی باقی خواهد ماند. زمان واجفتیدگی مربوطه با استفاده از برهمکنش کولمبی قابل محاسبه است، لکن با توجه به خنثی بودن کیهان از نظر بار الکتریکی، می توان نتیجه گرفت که اختلاف چگالی الکترون و پوزیترون های موجود در کیهان می بایست با پروتون های کیهان یکسان باشد. بنابراین  $n_e - n_{e^+} = n_p$  خواهد بود. از طرف دیگر چگالی عددی پروتون های کیهانی را می توان از روی نسبت چگالی عددی ماده باریونی به شاره ی فوتونی به صورت  $n_p/n_\gamma = (\rho_b/m_p)/(\rho_\gamma/(h\nu_0))$  به دست آورد. با تقسیم صورت و مخرج سمت راست عبارت به چگالی بحرانی خواهیم داشت:

$$\frac{n_p}{n_\gamma} = \left( \frac{\Omega_b^0}{m_p} \right) \times \left( \frac{\Omega_\gamma^0}{h\nu_0} \right)^{-1} \quad (35)$$

به طوری که اندیس های  $b$  و  $\gamma$  مشخص کننده ی ماده باریونی و تابش زمینه ای کیهان است.  $m_p$  نیز جرم پروتون و اندیس صفر مشخص کننده ی پارامترهای کیهان شناسی



در زمان حال می باشد. با توجه به اینکه  $\Omega_b = 0.04$  و زمان برابری ماده و تابش  $z_{eq} \approx 10000$  می باشد، بنابراین  $\Omega_M/\Omega_\gamma \approx 10^4$  و یا  $\Omega_b/\Omega_\gamma \approx 10^{-6}$  خواهد بود. با جاگذاری در معادله ی (۳۵) نسبت تعداد پروتون به فوتون های زمینه ای کیهان برابر با  $n_p/n_\gamma \approx 10^{-8}$  به دست می آید. نتیجه ی به دست آمده مبین این نکته است که اختلاف بین پوزیترون-الکترون کیهانی به چگالی فوتون های زمینه ای کیهان نیز می بایست از این مرتبه باشد.

می توان بازگرمایش کیهانی ناشی از حذف پوزیترون ها در فرایند نابودی با الکترون ها را با احتساب تقریبی حذف تمامی الکترون و پوزیترون ها به دست آورد. با توجه به اینکه در این برهمکنش به ازای یک الکترون و پوزیترون دو فوتون گاما تولید می شود، لذا تعداد ذرات کل قبل و بعد از واپاشی تغییر نمی کند. درجه ی آزادی کل ذرات را می توان به صورت  $g = g_b + 7/8 g_f$  نوشت. با توجه به اینکه بوزون های موجود فقط فوتون ها می باشند، درجه ی آزادی آنها ۲ و برای الکترون و پوزیترون نیز  $2 + 2$  درجه ی آزادی خواهیم داشت. بنابراین تعداد درجات آزادی قبل از واپاشی الکترون-پوزیترون ها  $11/2 = 2 + 7/8 \times 4 = 11/2$  خواهد بود. از طرف دیگر بعد از واپاشی الکترون-پوزیترون تعداد درجات آزادی ذرات برابر با ۲ خواهد شد. با توجه به پایستگی تعداد ذرات قبل و بعد از نابودی پوزیترون ها داریم:

$$n = g_b T_b^3 = g_a T_a^3 \quad (36)$$

با جاگذاری درجات آزادی در عبارت فوق  $1.4 T_b = T_a = T_b \times (11/4)^{1/3} = 1.4 T_b$  به طوریکه مشاهده می شود، بعد از حذف شدن پوزیترون ها از شاره ی کیهانی دمای بازگرمایش تابش زمینه ای کیهان به اندازه ی ۱.۴ برابر افزایش می یابد. نوترینوها قبل از این رویداد از شاره ی کیهانی جدا شده اند، بنابراین انتظار داریم دمای تابش زمینه ای کیهان نسبت به دمای نوترینوی کیهانی ۱.۴ برابر گرم تر باشد. با در نظر گرفتن دمای تابش زمینه ای کیهان در زمان حال برابر با  $2.7K$ ، دمای نوترینوی کیهانی می بایست  $1.9K$  باشد.

### ۲.۳ تابش زمینه ای کیهان

یکی دیگر از رویدادهایی که در کیهان شناسی رصدی دارای اهمیت زیادی است، زمان واجفتیدگی فوتون ها از پلاسمای کیهانی می باشد. برای انرژی های بالای الکترون ولت، بیشتر شاره ی باریونی کیهان به صورت یونیزه است. به دلیل بالا بودن سطح مقطع برخورد فوتون با الکترون های آزاد نسبت به اتم خنثی، انتظار داریم بعد از تشکیل عناصر خنثی کیهانی، فوتون ها نیز از شاره ی کیهانی واجفتیده شوند. پیشتر دیدیم که پلاسمای کیهانی سریع تر از فوتون های زمینه ای کیهانی سرد می شود، لذا

شرایط لازم برای همدماایی شاره‌ی کیهانی با در نظر گرفتن تبادل حرارتی بین فوتون‌ها و محیط یونیزه را می‌توان مطالعه کرد. این برهمکنش‌ها می‌توانند بین پلاسمای کیهانی و یا بین پلازما و فوتون‌های زمینه‌ای باشد. ابتدا نرخ برهمکنش بین ذرات باردار پلازما را بررسی می‌کنیم: برای ذرات یونیزه‌ی کیهانی که به صورت الکترون‌ها و پروتون‌ها آزاد می‌باشند، برهمکنش بین ذرات از نوع کولمبی بوده و برای این برهمکنش سطح مقطع را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sigma_c = \left(\frac{e^2}{T}\right)^2 \pi \ln \Lambda \quad (37)$$

$\ln \Lambda$  معیاری از پارامتر برخورد بوده و در اینجا آن را  $30$  در نظر می‌گیریم. زمان برهمکنش با توجه به آنچه پیشتر اشاره کردیم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$t_c = (n_e \sigma_c v)^{-1} \quad (38)$$

$$= n_e^{-1} \left(\frac{m}{T}\right)^{1/2} \left(\frac{e^2}{T}\right)^{-2} \frac{1}{\pi \ln \Lambda} \quad (39)$$

با توجه به اینکه چگالی الکترون‌های آزاد با کاهش دمای کیهان به دلیل تشکیل اتمهای خنثی کاهش می‌یابد، می‌توان به عوض  $n_e$  از  $x_e n_b$  نیز استفاده کرد. در اینجا  $x_e$  نسبت چگالی الکترون‌های آزاد به چگالی باریونی،  $n_b$  می‌باشد. بدین ترتیب زمان برهمکنش بین الکترون‌های آزاد با قرار دادن مقادیر مربوطه به صورت  $t_c = 1.35 (T/1eV)^{-(3/2)} (x_e \Omega_b h^2)^{-1} sec$  با مقایسه این عدد با زمان هابلی  $H^{-1} = 1.13 \times 10^{12} (\Omega h^2)^{-1/2} (T/1eV)^{-(3/2)}$  مشاهده می‌شود که تا انرژی‌های الکترون ولت ذرات موجود در پلازما به اندازه‌ی کافی با یکدیگر برهمکنش داشته و الکترون‌ها تابع توزیع خود را حفظ می‌کنند.

فوتون‌های تابش زمینه‌ای کیهان مولفه‌ی دوم در تبادل حرارتی با پلاسمای کیهانی می‌باشد. این تبادل انرژی بین الکترون‌ها و تابش در اثر پراکندگی فوتون‌ها رخ می‌دهد. به دلیل انرژی پایین الکترون‌ها و فوتون‌ها، پراکندگی را از نوع تامسون در نظر می‌گیریم. بدین ترتیب زمان برهمکنش را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$t_{Th} = (n_e \sigma_T c)^{-1} = 6.14 \times 10^9 \left(\frac{T}{1eV}\right)^{-3} (x_e \Omega_b h^2)^{-1} \quad (40)$$

در اینجا  $\sigma_T = (\frac{8\pi}{3})(\frac{e^2}{m})^2$  سطح مقطع تامسون است. حال در هر برخورد فوتون با الکترون‌هایی به دمای  $T$ ، فرکانس آنها به صورت  $(T/m)$   $\simeq (v/c)^2$  عوض خواهد شد. رابطه‌ی تغییر فرکانس را به تقریب می‌توان با استفاده از اثر دوپلر به دست آورد. الکترون‌های در حال حرکت فوتون را جذب کرده و در موقع نشر مقداری از انرژی خود را به آن منتقل می‌کنند. برای الکترون‌هایی با دمای الکترون ولت، نسبت تغییر

فرکانس در هر برخورد برابر با  $10^{-6} \sim (eV/MeV) \sim (T/m) \sim \delta\nu/\nu$  خواهد بود. حال شرط لازم برای اینکه تابش که سریع تر از ماده‌ی باریونی سرد می شود با آن در تعادل حرارتی باقی بماند، تعداد برهمکنش های به اندازه‌ی کافی بالا است. می توان از این فرض ساده استفاده کرده و تعداد برهمکنش ها را تخمین زد. بنابراین برهمکنش ها می بایست به اندازه‌ی باشد تا در نهایت انرژی فوتون پراکنده به اندازه‌ی انرژی فوتون اولیه تغییر نکند، به بیان دیگر  $\delta\nu/\nu \simeq 1$ . برای محاسبه‌ی جابجایی در فرکانس فوتون هامی توان از حرکت ول گشت<sup>۴</sup> با تغییر فرکانس مثبت و یا منفی با گام یکسان  $T/m$  استفاده کرد. بعد از  $N$  برخورد تغییر فرکانس فوتون ها می بایست برابر با  $\Delta\nu/\nu = \sqrt{N}(T/m)$  باشد. از طرف دیگر مسافتی که فوتون بدین ترتیب طی خواهد کرد برابر با  $L = \sqrt{N}\lambda$  می باشد که در اینجا  $\lambda = (n\sigma)^{-1}$  پویش آزاد میانگین فوتون ها است. با جاگذاری در مسافت پیموده شده خواهیم داشت  $L = (m/T)(n\sigma)^{-1}$ . حال برای  $L < H^{-1}$  فوتون ها فرصت کافی برای پراکنده شدن در داخل افق را داشته و می توانند با پلاسمای کیهانی هم دما شوند. دمای خروج از تعادل حرارتی با مساوی قرار دادن دو مقیاس طولی ذکر شده برابر خواهد بود با:  $T = 4.5x_e^{-1}(\Omega_b h^2)^{-1/2} eV$ . بنابراین برای انرژی های تقریباً بزرگتر از  $5eV$  تعادل دمای بین پلازما و ستاره‌ی فوتونی به هم خواهد خورد.

با کاهش دمای کیهان به انرژی های الکترون ولت، الکترون های آزاد می توانند جذب پروتون های آزاد شده و اتمهای خنثی را تشکیل بدهند. برای محاسبه‌ی الکترون های آزاد در هر زمانی از دو فرض تعادل ترمودینامیکی کیهان و تشکیل اتم هیدروژن از طریق جذب در تراز پایه اتم هیدروژن استفاده می کنیم. چگالی عددی بر حسب جرم، دما و پتانسیل شیمیایی در گستره‌ی نیوتنی برابر است با:

$$n_i = g_i \left(\frac{m_i T}{\sqrt{2}\pi}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{\mu_i - m_i}{T}\right) \quad (41)$$

در اینجا اندیس  $i$  می تواند مربوط به اتمهای هیدروژن، الکترون و یا پروتون باشد. برای فرآیند  $p + e \rightarrow H + \gamma$  پتانسیل شیمیایی کمیتهی پایستار است. با استفاده  $\mu_p + \mu_e = \mu_H$  و احتساب اختلاف جرم سکون الکترون و پروتون با اتم هیدروژن به عنوان انرژی پیوندی  $m_p + m_e - m_H = Q = 13.eV$  چگالی الکترون های آزاد بر حسب دما را می توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\frac{1 - x_e}{x_e^2} \simeq \eta \left(\frac{T}{m_e}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{Q}{T}\right) \quad (42)$$

$$= 3.84 \eta \left(\frac{T}{m_e}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{Q}{T}\right) \quad (43)$$

به طوری که  $\eta = 2.68 \times 10^{-8} \Omega_b h^2$  نسبت چگالی عددی باریون ها به فوتون های زمینه‌ی کیهان است. می توان زمان تشکیل اتمها را زمانی در نظر گرفت که نود درصد از

<sup>۴</sup> random walk

الکترون ها و پروتون ها ترکیب شده باشند، به بیان دیگر  $x_e = 0.1$  باشد. با قرار دادن  $\Omega_b \simeq 0.01$  دمای مربوط به ده درصد از یونش برابر  $0.292 eV$  به دست می آید. یکی از نکات مهم در خصوص تشکیل اتمهای هیدروژن امکان قطع فرایند ترکیب به دلیل افزایش پویش آزاد الکترون ها از مرتبه ی شعاع هابل است. سطح مقطع برهمکنش در فرایند ترکیب را می توان مربع طول موج دویروی الکترون آزاد،  $\sigma = \lambda^2$  در نظر گرفت. در صورت قرار گرفتن پروتون بر سر راه الکترون توسط آن جذب شده و تشکیل اتم هیدروژن را خواهد داد. بنابراین پویش آزاد الکترون ها برابر است با  $l = (n_b x_e)^{-1} \lambda^{-2}$  خواهد بود. برای چگالی چگالی پایین الکترون ها، معادله ی (۴۳) را می توان به صورت زیر به دست آورد:

$$x_e \simeq \eta^{-1/2} (T/m_e)^{-3/4} \exp\left(-\frac{6.8}{\tau}\right) \quad (44)$$

در اینجا  $\tau$  دما می باشد که بر حسب الکترون-ولت نوشته شده است. با برابر قرار دادن پویش آزاد میانگین الکترون ها و شعاع هابل دمای واجفتیدگی به صورت زیر به دست می آید:

$$\tau^{-1} = 4.316 - 0.074 \ln\left(\frac{\Omega}{\Omega_b}\right) \quad (45)$$

برای مقادیر  $\Omega_b = 0.04$  و  $\Omega = 1$  دمای واجفتیدگی برابر با  $\tau = 0.24 eV$  خواهد بود. با قرار دادن دمای واجفتیدگی در معادله ی (۴۵) میزان یونش در زمان واجفتیدگی  $x_e \sim 10^{-5}$  به دست می آید. به بیان دیگر کیهان به میزان بسیار کمی بعد از تشکیل اتمهای خنثی یونیزه خواهد بود. با توجه به ارتباط بین دمای کیهان و انتقال به سرخ، برای زمان واجفتیدگی  $z_{dec} = 1033$  می باشد. البته زمان واجفتیدگی در یک آن از عمر کیهان رخ نداده و برای این دوران یک زمان گذر می توان تعریف کرد. این زمان گذر بر روی آخرین سطح پراکندگی برای ناظر زمینی به صورت کره ای با ضخامت کم دیده می شود. به زبان نسبت عامی آخرین سطح پراکندگی یک ابر سطح فضا گونه ی ضخیم است که دو ناحیه ی کدر و شفاف عالم را به هم وصل می کند.

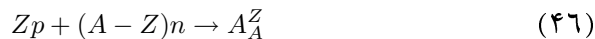
علاقه مندی جامعه ی کیهان شناسی به تابش زمینه ای کیهان که توسط ماهواره ها و بالون های زیادی رصد می شود، مطالعه ی افت و خیزهای دما بر روی آخرین سطح پراکندگی می باشد. این افت و خیزهای دمایی را می توان جوانه های اولیه ی ساختارهای بزرگ مقیاس کیهان در نظر گرفت که در اثر گذشت زمان بر اثر ناپایداری گرانشی شروع به رمبیدن کرده و ساختارهای فعلی را تشکیل داده اند. منشاین ساختارها توسط مدل تورمی داده می شود. در چارچوب مدل تورمی افت و خیزهای کوانتمی ناشی از یک میدان اسکالر می تواند از افق بزرگ تر شده و اصطلاحاً یخ بزند. این افت و خیزها می توانند همانند افت و خیزهای کلاسیک رشد کرده و ساختارهای بزرگ مقیاس را درست بکنند. اولین محل قابل

مشاهده‌ی این ساختارهای نوزاد، به صورت افت و خیز بر روی تابش زمینه ای کیهان است که اخیراً توسط ماهواره‌ی WMAP با دقت بالایی مشاهده شده است [۱۲].

### ۳.۳ سنتز عناصر سبک در کیهان شناسی

یکی دیگر از موفقیت های مدل استاندارد کیهان شناسی پیش بینی فراوانی عناصر سبک سنتز شده در کیهان اولیه می باشد. برای عالم اولیه ذرات پروتون و نوترون را داریم که در تعادل ترمودینامیکی با تابش زمینه ای کیهان می باشند و در اثر برخورد باریون ها برهم برهمکنش های هسته ای رخ می دهد. از یک طرف ذرات در صورت داشتن انرژی لازم برای غلبه بر سد کولمبی می توانند در واکنش هسته ای شرکت کنند، از طرف دیگر فوتون های پراثرژی می توانند با هسته ها برخورد کرده و سبب واپاشی مجدد آنها بشوند. تفاوت عمده در برهمکنش های هسته ای در کیهان منبسط شونده با فیزیک هسته ای متعارف، گسترش فضا، کاهش دما و چگالی برای ذرات برهمکنش کننده در کیهان اولیه است.

انرژی پیوندی عناصر دوتریم، تریتیوم، هلیوم سه، هلیوم چهار به ترتیب برابر با  $2.22\text{Mev}$ ،  $6.92\text{Mev}$ ،  $7.72\text{Mev}$  و  $28.3\text{Mev}$  می باشد. این عناصر با کاهش دمای کیهان و کم شدن انرژی ذرات کیهانی می توانند شکل بگیرند. بررسی فراوانی عناصر سبک تولید شده در کیهان اولیه می تواند اطلاعات زیادی در مورد دینامیک کیهان همچنین مقدار ماده‌ی باریونی موجود در آن را به دست دهد. با توجه به آنتروپی بالای کیهان به دلیل وجود فوتون های زمینه ای کیهانی، عناصر سبک در دماهای متعارف آزمایشگاهی پایدار نبوده و توسط فوتون ها متلاشی خواهند شد. بنابراین سنتز هسته ای عملاً در دمای کم و در حدود  $T \simeq 0.1\text{MeV}$  رخ می دهد. برای به دست آوردن نرخ عناصر تشکیل شده در برهم کنش های هسته ای از معادله‌ی بولتزمن که چگالی عددی عناصر بر حسب دما را به دست می دهد استفاده می کنیم. در اینجا مولفه های موجود در برهم کنش، پروتون، نوترون و عنصر سنتز شده دارای عدد اتمی  $Z$  و عدد جرمی  $A$  می باشد. نتیجه‌ی واکنش به صورت زیر است:



با توجه به پایستگی پتانسیل شیمیایی در این برهمکنش خواهیم داشت:

$$\mu_A = Z\mu_p + (A - Z)\mu_n \quad (47)$$

با جاگذاری تابع توزیع مربوط به چگالی عددی از معادله (۴۱) در معادله‌ی فوق، چگالی عددی عنصر تشکیل شده با کمی محاسبات جبری به صورت زیر حساب می شود:

$$n_A = g_A 2^{-A} A^{3/2} \left(\frac{2\pi}{m_B T}\right)^{3(A-1)/2} n_p^Z n_n^{A-Z} \exp(B_A/T) \quad (48)$$

در اینجا  $n_B$  تقریباً برابر با جرم پروتون و نوترون و  $B_A = (Zm_p + (A - Z)m_n - M_A)c^2$  انرژی پیوندی اتم می باشد. می توان فراوانی جرمی عنصر سنتز شده را بر حسب  $X_A = An_A/n_B$  به دست آورد.  $n_B$  چگالی عددی باریون ها بوده و برای پرهیز از پیچیده شدن محاسبه چگالی عددی باریونی را با استفاده از نسبت آن به چگالی عددی فوتونی بیان می کنیم. چگالی عددی باریونی بر حسب فوتونی به صورت  $n_B = \eta n_\gamma$  داده می شود به طوری که  $\eta = 2.68 \times 10^{-8}$  می باشد. با جاگذاری در معادله ی (۴۸) نسبت جرمی اتم به ماده ی باریونی به صورت زیر به دست می آید:

$$X_A = \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{m_B T}\right)^{2(A-1)} A^{5/2} X_p^Z X_n^{A-Z} \eta^{A-1} n_\gamma^{A-1} \exp(B_A/T) \quad (49)$$

در اینجا چگالی عددی فوتون ها  $n_\gamma$  را می توان با جاگذاری معادله ی (۲۶) در (۲۷) به صورت  $n_\gamma = 2\zeta(3)/\pi^2 T^3$  به دست آورد. فاکتور  $\eta$  در معادله ی (۴۹) نقش کاهنده ی فرآیند را بازی می کند. دمای مربوط به تشکیل اتم های سبک را می توان با قرار دادن  $X_A \simeq 1$  به معنی تبدیل تمامی مواد باریونی به هسته های سبک به دست آورد. این دما برای  ${}^2H$ ،  ${}^3He$  و  ${}^4He$  به ترتیب برابر با  $0.07 Mev$ ،  $0.11 Mev$  و  $0.27 Mev$  می باشد.

یکی از فرآیندهای دارای اهمیت در تئوری سنتز هسته ای، مسئله ی تولید هلیوم با استفاده از برهمکنش بین پروتون و نوترون می باشد. شارهای پروتون و نوترون در کیهان اولیه می تواند با استفاده از برهمکنش هسته ای ضعیف به صورت  $n + \bar{e} \longleftrightarrow p + \bar{\nu}$  در تعادل حرارتی باشند. برای این برهمکنش نیز پایداری پتانسیل شیمیایی را داریم. از آنجا که پتانسیل شیمیایی الکترون و نوترینو تقریباً صفر می باشد، لذا نسبت چگالی نوترون به پروتون با در نظر گرفتن  $\mu_p = \mu_n$  برابر با:

$$\frac{n_n}{n_p} = \exp(-Q/T) \quad (50)$$

خواهد بود. به طوری که  $Q = m_n - m_p$  می باشد. با توجه به سطح مقطع برهمکنش بین پروتون و نوترون و نرخ برهمکنش  $\Gamma$  از فیزیک ذرات آستانه ی جدایی پروتون و نوترون را می توان به دست آورد. با استفاده از معادله ی فریدمن  $H(T) = 5.5(T^2/m_{pl})$  و  $\Gamma(T)$  دمای واجفتیدگی برابر با  $T_D \simeq 0.7 Mev$  به دست می آید. برای زمان واجفتیدگی نسبت چگالی نوترون به پروتون برابر با  $1/6$   $n_n/n_p = \exp(-Q/T_D) \simeq 1/6$  می باشد. برای دمای  $0.7 Mev$  انرژی ذرات باریونی به اندازه کافی پایین نیست تا همجوشی هسته ای و تولید عناصر سبک رخ بدهد، بنابراین بعد از واجفتیدگی، نوترون ها به صورت  $n_n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$  شروع به واپاشی خواهند کرد. همراه با کم شدن چگالی نوترون ها، دمای کیهان نیز شروع به نزول می کند به طوری که ذرات دمای لازم برای همجوشی پیدا نکنند. دمای لازم

برای تشکیل هلیوم  $0.28 MeV$  می باشد با توجه به نیمه‌ی عمر نوترون، تا زمان تشکیل هلیوم نوترون‌ها به نسبت  $\exp(-t/\tau) \simeq 0.8$  واپاشی خواهند کرد. بنابراین در زمان تشکیل اتم‌های هلیوم نسبت نوترون به پرتون  $n/p \sim 1/6 \times 0.8 \sim 1/7$  خواهد بود. حال برای تشکیل اتم‌های هلیوم به ازای یک عدد نوترون هفت پرتون داریم. با فرض جذب تمامی نوترون‌های موجود در هسته‌ی اتم هلیوم که فرض درستی با توجه به بزرگ سطح مقطع برخورد می باشد، نسبت جرمی هلیوم به کل ماده‌ی باریونی را می توان به دست آورد. با توجه به محاسبه‌ی فوق به ازای دوازده پرتون دو عدد نوترون خواهیم داشت که با ترکیب نوترون‌ها با پرتون‌ها نسبت جرمی هلیوم به کل ماده‌ی باریونی برابر با  $0.25 \sim 4/16$  به دست می آید. داده‌های رصدی این نسبت را تایید می کند.

## ۴ مرجع‌ها

- [۱] Milne E., 1934, Quart. J. Math, 5, 64
- [۲] McCrea W. H., Milne E., 1934, Quart. J. Math, 5, 73
- [۳] Jordan, T. F. "Cosmology calculations almost without general relativity"; (astro-ph/0309756)
- [۴] Bertschinger, E., "Cosmological Dynamics", astro-ph/9503125
- [۵] Stephani, H. "General Relativity", 1990, Cambridge University Press
- [۶] D'Inverno, R., "Introducing Einstein's Relativity", 1992, Oxford University Press
- [۷] Weinberg, S., "Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity", 1972, Wiley-VCH
- [۸] Padmanabhan, T., "Structure Formation in the Universe", 1993, Cambridge University Press.
- [۹] Padmanabhan, T., "Cosmology and Particle Physics Through Problems", 1996, Cambridge University Press.

- [10] Spergel, D., et al.; " First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observation: Determination of Cosmological Parameters", ApJS, 148, 161
- [11] Rahvar, S., " Cooling in the expanding Universe", submitted in American Journal of Physics (2005)
- [12] Spergel, D. N. et al., 2003, ApJS, 148, 175