بررسی ساختارهای غیر خطی

سهراب راهوار

دانشکده‌ی فیزیکِ دانشگاه صنعتی شریف

آذر ۱۳۸۵

در این بخش، به رشد غیر خطی ساختارهای بزرگ مقیاس با رهیافت های مدل کلاه شاپویی، تقریب زلدویچ و شبیه سازی N ذره ای خواهیم پرداخت.

۱ مقدمه

با توجه به رشد ساختارها به صورت خطی انتظار داریم ساختارها با حضور ماده‌ی تاریک به صورت خطی رشد کرده و در زمان حال تباین چگالی از مرتبه‌ی یک باشد. لکن به دلیل عوامل فیزیکی دیگر از قبیل سرمایش در ساختارها (غیر آدیاباتیک بودن) و رشد خالی جاها، ساختارهای غیر خطی می‌توانند شکل بگیرند و ساختارهایی با تباین چگالی بزرگتر از یک تشکیل بشوند. مطالعه‌ی این ساختارها با توجه به تقریب خطی امکان پذیر نیست و ماناگزیر به استفاده از روش های دیگر برای مطالعه‌ی رشد این ساختارها هستیم. ساختارهایی مانند کهکشان ها و خوشه های کهکشانی با توجه به جرم و چگالی آنها غیر خطی بوده و ما برای بررسی رشد این ساختارها از رهیافت غیر خطی استفاده خواهیم کرد.

۲ مدل ساده‌ی کلاه شاپویی برای تحول ساختارها

این مدل بسیار ساده شده ای از یک ساختار با تقارن کروی و چگالی یکنواخت است. به دلیل افت و خیز بسیار کم چگالی برای زمان آغاز نسبت به زمینه، انتظار داریم انرژی آغازین این سیستم نسبت به زمینه کمی متفاوت بوده و در نتیجه رشد این ساختار نسبت به

زمینه کند تر و یا تندتر بر حسب تباین اولیه‌ی مثبت و یا منفی ساختار باشد. برای ساختاری در اندازه های کوچکتر از افق، پایستگی انرژی را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^{2}-\frac{GM}{r}=E \tag{1}$$

دراین جا r شعاع ساختار، M جرم آن و E انرژی می باشد. به ازای $E > 0$ ساختار تا ابد منبسط شده و و منجر به ساختار نخواهد شد. برای $E < 0$ شعاع این ساختار به بیشینه‌ی خود رسیده و برخواهد گشت. به دلیل غیر صفر بودن انرژی جنبشی ذرات ساختار بعد از ویریالی شدن از رمبش باز خواهد ایستاد.

برای تباین چگالی متوسط اولیه برابر با $\bar{\delta}_i$، جرم ساختار نسبت به زمینه به اندازه‌ی

$$M_i = M_i^b + \delta M_i \tag{2}$$

متفاوت خواهد بود. با فرض پایستار بودن جرم داخل کره‌ای به شعاع r و صرفنظر کردن از جریان ماده به داخل و یا خارج از ساختار، پایستگی انرژی در طول تحول بر قرار بوده و انرژی ساختار را می توان برابر با

$$E = K_i + \delta K_i - \frac{G(M_i+\delta M_i)}{r_i} \tag{3}$$

در نظر گرفت. برای سهم انرژی پتانسیل می توان با استفاده از معادله‌ی حاکم بر زمینه می توان عبارت زیر را بیان کرد:

$$|U| = \Omega_i K_i(1+\delta_i) \tag{4}$$

برای سهم انرژی جنبشی نیز با توجه به سرعت خاصه‌ی ساختار می تواند به صورت زیر باشد:

$$K_i = 1/2(\dot{r}_i + v_p)^2 \tag{5}$$

با توجه به ارتباط سرعت خاصه و تباین چگالی می توان برای سرعت خاصه عبارت $v_p = -H_i r_i \delta_i$ را جاگذاری کرده و با به توان رسیدن عبارت فوق و صرفنظ کردن از جملات مرتبه‌ی بالاتر، انرژی جنبشی ساختار بر حسب زمینه به صورت زیر به دست می آید:

$$K_i = K_i^b(1 - 2\delta_i) \tag{6}$$

با جاگذاری در معادله‌ی انرژی، انرژی کل ساختار برابر با عبارت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} E &= K_i^{(b)} - K_i^{(b)}\Omega_i(1+\delta_i+2\delta_i\Omega_i^{-1}) \\ &= -K_i^{(b)}\Omega_i(1+\delta_i+2\delta_i\Omega_i^{-1}-\Omega_i^{-1}) \end{aligned} \tag{7}$$

انتخاب تباین چگالی اولیه برابر با $\delta_i = (\Omega_i^{-1} - 1)/(1 + 2\Omega_i^{-1})$ مرز رشد ساختار و خالی را نشان می دهد. برای کیهان تخت این مرز با مثبت و یا منفی بودن تباین چگالی اولیه و انرژی ساختار نیز برابر با $E = -3K_i^{(b)}\Omega_i\delta_i$ داده می شود. برای ساختار فراچگال، ساختار با رسیدن به بیشینه‌ی شعاع دارای انرژی جنبشی صفر بوده و با در نظر گرفتن پایستگی انرژی، بیشینه‌ی شعاع انبساط را می توان از $-GM/r_{max} = E$ به دست آورد. بنابراین بیشینه‌ی شعاع ساختار برابر با

$$\begin{aligned} r_{max}/r_i &= -\frac{|U_i|}{E} \\ &= \frac{1 + \bar{\delta}_i}{1 + \bar{\delta}_i + 2\bar{\delta}_i\Omega_i^{-1} - \Omega_i^{-1}} \end{aligned} \tag{8}$$

معادلات حاکم بر دینامیک ساختار را می توان با حل معادله‌ی انرژی (۱) به دست آورد. برای ساختار بسته با انرژی منفی $|GM/r| > |E|$ می باشد و با تعریف $Er/GM = \cos^2\phi$ زمان را می توان بر حسب پارامتر $\theta = 2\phi$ به صورت زیر به دست آورد:

$$t = T + B(\theta - \sin\theta) \tag{9}$$

با جاگذاری زاویه‌ی θ در معادله رابط بین شعاع و زاویه، شعاع ساختار برحسب زاویه به صورت زیر به دست می آید:

$$r = A(1 - \cos\theta) \tag{10}$$

برای ساختار با انرژی مثبت تغییر متغیر به جای $\cos\theta$، $\cosh\theta$ خواهد بود. انرژی مثبت می تواند برای مطالعه‌ی خالی جاها مورد استفاده قرار بگیرد. بیشینه‌ی شعاع ساختار در این حالت در $\theta = \pi$ رخ می دهد و در این حالت $r = 2A$ بوده و ارتباط آن با انرژی ساختار برابر است با: $A = GM/(2|E|)$ و ارتباط بین A و B برابر است با $A^3 = GMB^2$. با توجه به معادله (۸) مقدار B برابر با عبارت زیر خواهد شد:

$$B = \frac{r_i}{2}\frac{1 + \bar{\delta}_i}{1 + \bar{\delta}_i + 2\bar{\delta}_i\Omega_i^{-1} - \Omega_i^{-1}} \tag{11}$$

با جاگذاری مجدد این عبارت در معادله‌ی حاکم بر شعاع ساختار، فاز اولیه در زمان شروع مطالعه‌ی دینامیک ساختار، θ_i به دست می آید. مقدار θ_i برحسب تباین چگالی اولیه ساختار برابر با $\theta_i = 2\sqrt{\delta_i\Omega_i^{-1}}$ به دست می آید. با توجه به اینکه برای آغاز کیهان $\Omega_i \simeq 1$ می باشد، می توان فازاولیه را به صورت $\theta_i = 2\sqrt{\delta_i}$ در نظر گرفت. با توجه به کوچک بودن فاز اولیه، زمان آغاز برای مطالعه برابر با $t_i = T$ خواهد بود.

حال هدف ما محاسبه‌ی تباین چگالی برای ساختار نسبت به زمینه است. برای کیهان بسته، کره‌ای به شعاع r_i در زمینه با انرژی منفی در نظر می گیریم. در این صورت معادله

تحول آن همانند معادله‌ی (۸) بوده و در نتیجه انتظار داریم نسبت شعاع ساختار به زمینه همواره ثابت بماند. بنابراین در این حالت تباین چگالی ساختار رشد نخواهد کرد. برای حالت کیهان باز و یا تخت رشد زمینه سریع تر از ساختار بوده و ما انتظار داریم تباین چگالی به صورت تابعی از زمان رشد بکند. برای حالت کیهان تخت، با توجه به معادله‌ی (۱) تحول شعاع کره‌ای در زمینه‌ی همگن بر حسب زمان به صورت زیر خواهد بود:

$$r_b = (۳/۲t)^{۲/۳}(۲GM)^{۱/۳} \tag{۱۲}$$

با جاگذاری t بر حسب فاز θ و صرف نظر کردن از T، دینامیک r_b قابل محاسبه است. بنابراین تباین چگالی را می توان از نسبت شعاع های دو کره به دست آورد. در این حالت به دلیل رشد سریع تر زمینه نسبت به ساختار انتظار داریم تباین چگالی بر حسب زمان رشد بکند. تباین چگالی به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\rho}{\rho_b} - ۱ \\ &= (\frac{r_b}{r})^{۳} - ۱ \\ &= \frac{۹}{۲}\frac{(\theta - \sin\theta)^{۲}}{(۱ - \cos\theta)^{۳}} - ۱ \end{aligned} \tag{۱۳}$$

تمرین:

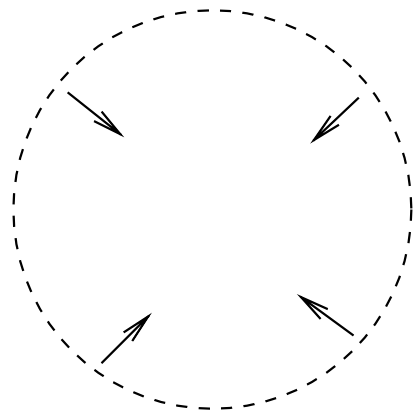
۱. تباین چگالی را برای کیهان باز به دست آورید.

۲. برای یک خالی جا با انرژی کل اولیه‌ی منفی تحول تباین چگالی را برای سه حالت کیهان باز، بسته و تخت به دست آورید.

برای دوران اولیه که ساختار در گستره‌ی خطی قرار دارد، تباین چگالی با بسط معادله‌ی (۱۳) به صورت $\delta \propto \theta^{۲}$ به دست می آید. با مقایسه‌ی رشد زمینه بر حسب θ، تباین چگالی بر حسب فاکتور مقیاس به صورت $\delta \propto a(t)$ به دست خواهد آمد. برای کیهان تخت ارتباط بین θ و انتقال به سرخ را می توان با توجه به ارتباط فاکتور مقیاس به زمان به صورت $a(t) \propto t^{۲/۳}$ به دست آورد. در این صورت نسبت فاکتور مقیاس به فاکتور مقیاس در زمان حال برابر خواهد بود با: $(t/t_i)^{۲/۳} = (۱ + z_i)/(z + ۱)$. برای پارامتر زمان با قرار دادن $t = t_i$ در زمان شروع $B = ۳/۴ t_i \delta_i^{-۳/۲}$ به دست می آید. در این صورت انتقال به سرخ بر حسب پارامتر θ به صورت زیر به دست آورد:

$$۱ + z = (\frac{۴}{۳})^{۲/۳}\delta_i \frac{۱ + z_i}{(\theta - \sin\theta)^{۲/۳}} \tag{۱۴}$$

با توجه به اینکه بیشینه‌ی شعاع ساختار در $\theta = \pi$ رخ می دهد، انتقال به سرخ مربوط به این فاز برابر با $۱ + z_m = (\frac{۴}{۳})^{۲/۳}\delta_i \frac{۱+z_i}{(۱+\pi)^{۲/۳}}$ حساب می شود. برای ساختاری بر روی



شکل ۱: رمبش ساختار حلقوی در گرانش دو بعدی

تابش زمینه ای کیهانی با انتقال به سرخ $z = ۱۱۰۰$ و تباین چگالی $\delta_i = ۱۰^{-۳}\delta_k^{(i)}$، بیشینه‌ی شعاع ساختار در انتقال به سرخ زیر رخ می دهد:

$$۱ + z_m = ۰.۵۱\delta_k^{(i)} \quad (۱۵)$$

در این جا $\delta_k^{(i)}$ از روی طیف توان بر روی آخرین سطح پراکندگی تعیین می شود. ساختارهایی با $\delta_i = ۱۰^{-۳}$ در زمان حال در گستره‌ی خطی به سر می برند و در آینده به بیشینه‌ی شعاع خود خواهند رسید. با توجه به معادلات حاکم بر دینامیک کره‌ی فراچگال انتظار داریم در فاز $\theta = ۲\pi$ ساختار در $r = ۰$ رمبیده و تکینگی رخ دهد. برای ساختار ماده تاریک سرد که بدون برهمکش می باشد انتظار داریم سرعت ذرات با رمبیدن ساختار بیشتر شده و بعد از گذر از مبدا دوباره به وضعیت اولیه بر گردند. این وضعیت تنها برای یک سیستم کاملاً متقارن درست بوده و در حالتی که این سیستم را کمی مختل کنیم نظم ذرات در سقوط آزاد به هم ریخته و ذارت کاملاً حرکت کاتوره‌ای به خود خواهند گرفت. به دلیل آشوبناک بودن سیستم، شاید بررسی تحلیلی مسئله امکان پذیر نبوده و به روش عددی بتوان آن را بررسی کرد. برای مطالعه‌ی عددی فرآیند آشوبناک شدن سیستم که به آن ویریالی شدن نیز می گویند می توان در دو بعد مسئله را به روش شبیه سازی N—ذره‌ای بررسی کرد. حلقه‌ای از ذرات غیر برخوردی با گرانش دو بعدی $a \propto -۱/r$ در نظر بگیریم که در اثر خود—گرانش برمبد. در این شبیه سازی هر ذره $N - ۱$ ذره‌ی اطراف خود را می بیند. در صورت تقارن کامل اولیه این حلقه تقارن خود را حفظ کرده و نوسان خواهد کرد. حال اختلال کوچکی را اعمال کرده و زمان لازم برای کاتوره شدن ذرات را حساب می کنیم.

شکل (۱) رمبش دو بعدی ساختار حلقوی را نشان می دهد. زمان ویریالی شدن برای سیستم های بس ذره ای در شرط انرژی $V = -۲K$ رخ می دهد. این شرط را می توان از طریق قضیه‌ی بولتزمن به عنوان شرط لازم برای یک ساختار پایا به دست آورد.

اثبات قضیه‌ی ویریال:
با ضرب کردن طرفین این معادله‌ی بولتزمن در v^j و انتگرال گیری از آن بر روی فضای سرعت عبارت زیر را می توان به دست می آید:

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} v^j dv^۳ + \frac{\partial}{\partial x^i}\int f v^i v^j dv^۳ + \dot{v}^i \int \frac{\partial f}{\partial v^i} v^j dv^۳ = ۰ \qquad (۱۶)$$

با توجه به پایا بودن شاره، مشتق پاره‌ای در هر نقطه صفر است و برای جمله دوم عبارت $\partial_i(\rho(x)\overline{v^i v^j})$ و برای جمله‌ی سوم نیز $-\partial^j \phi \rho(x)$ را جای گذرای می کنیم. با معرفی تانسور انرژی تکانه به صورت $T^{ij} = \rho(x)\overline{v^i v^j}$ معادله‌ی بولتزمن را می توان به صورت زیر نوشت:

$$T^{ij}{}_{,i} = \rho \phi_,{}^{j} \qquad (۱۷)$$

(تمرین: در حد میدان ضعیف با استفاده از پایستگی انرژی تکانه در نسبیت عام عبارت فوق را به دست آورید). حال با انتگرال گیری از عبارت فوق تانسور انرژی تکانه را می توان بر حسب انرژی پتانسیل باز نویسی کرد. با رد گیری تانسور انرژی تکانه عبارت زیر را خواهیم داشت:

$$T^i{}_i = \int \rho(x) d\phi \qquad (۱۸)$$

با انتگرال گیری جزء به جزء، و تعریف چگالی انرژی جنبشی به صورت $K = ۱/۲ T^i{}_i$ و انرژی پتانسیل به صورت $V = \int \phi d\rho$ برای شرط تعادل خواهیم داشت $V = -۲K$. انرژی جنبشی کره‌ی فراچگال برابر با $K = \frac{\dot{r}^۲}{۲} = \frac{A^۲}{۲B^۲}\frac{\sin\theta^۲}{(۱-\cos\theta)^۲}$ و انرژی پتانسیل برابر با $V = -\frac{GM}{A(۱-\cos\theta)}$ را در معادله‌ی حاکم بر شرط ویریالی جاگذاری کرده، در زاویه‌ی $\theta = \frac{۳\pi}{۲}$ شراط ویریالی به دست می آید. برای یک ساختار به جرم $M = ۱۰^{۱۲} M_\odot$ که شامل جرم یک کهکشان (ماده باریونی + هاله) و ابعادی در اندازه‌ی چند ده کیلو—پارسک می باشد، انرژی جنبشی شاره‌ی کیهانی توسط انرژی پتانسیل هاله داده می شود. محاسبه‌ی این انرژی نشان می دهد که دمای هاله‌ی کهکشان می بایست از مرتبه چند هزار درجه باشد که در این شرایط، گاز باریونی می بایست به صورت یونیزه باشد. مهم ترین فرآیند های موجود برای سرمایش هاله‌ی کهکشان بعد از ویریالی شدن تابش ترمزی و باز ترکیب اتم های می باشد. ساختار با تابش به آرامی شعاع خود را کم کرده تا مرحله‌ای که زمان سرمایش به بیش از عمر کیهان می رسد. با توجه به طیف توان ساختارهای غیر خطی دمای ویریالی و سرعت پخشی ذرات را می توان محاسبه کرد.

یکی از روش های متعارف در بررسی سرمایش ساختار مقایسه‌ی زمان رمبش با زمان سرمایش برای یک ساختار در حال شکل گیری است. در صورتی که یک ساختار انرژی گرمایی خود را با نرخ $\dot{E} = \Lambda(T)$ از دست دهد، زمان سرمایش را می توان به صورت $t_{cool} = E/\dot{E}$ محاسبه کرد. در این جا $E = ۳/۲nkT$، چگالی انرژی گرمایی می باشد. حال این زمان مشخصه‌ی سرمایش را می توان با زمان رمبش سنجید. زمان رمبش به صورت $t_{dyn} = (\rho G)^{-۱/۲} = ۵ \times ۱۰^{۷} yr (n/۱cm^{۳})^{-۱/۲}$ داده می شود و برای $t_{cool} < t_{dyn}$ ساختار می تواند برمبد. با جاگذاری دو فرآیند تابش در $\dot{E}$ از طریق تابش ترمزی و بازترکیب و در نظر گرفتن تابش حرارتی، زمان سرمایش برابر با عبارت زیر به دست می آید:

$$t_{cool} = ۸ \times ۱۰^{٦} yr (\frac{n}{۱cm^{-۳}})^{-۱} [(\frac{T}{۱۰^{٦}K})^{-۱/۲} + ۱.۵ f_m (\frac{T}{۱۰^{٦}K})^{-۳/۲}]^{-۱} \quad (۱۹)$$

به طوری که جمله اول مولفه‌ی سرمایش ناشی از تابش ترمزی و جمله دوم سهم بازترکیب رانشان می دهد. برای $T > ۱۰^{٦}K$، تابش ترمزی مولفه‌ی غالب در سرمایش شاره و برای دمای $T < ۱۰^{٦}$ باز ترکیب و تابش اتمی باعث سرد شدن پلاسما خواهد شد. ضریب f_m نیز میزان عناصر سنگین را در شاره نشان می دهد. برای شاره‌ی بودن عناصر سنگین $f_m \simeq ۱$ و برای شاره‌ای با ترکیب شیمیائی خورشید این مقدار $f_m \simeq ۳۰$ می باشد. با برابر قرار دادن دو زمان مشخصه، چگالی اتمی عناصر شاره را بر حسب دمای آن می توان به دست آورد. دو فاز سرمایش را جداگانه بررسی می کنیم. برای $T < ۱۰^{٦}K$ باز ترکیب و تابش اتمی غالب بوده و

۳ مدل سقوط آزاد—هسته‌ی تکین برای پیش کهکشان ها

در مدل رمبش کروی تشکیل کهکشان هایکی سوالات مطرح این است که در صورت فراهم آمدن شرط سقوط آزاد ذارت تشکیل دهنده‌ی مرکز کره زمان تکینگی را آیا می توان محاسبه کرد؟ با توجه به دینامیک کره‌ی متقارن، هر کدام از پوسته های تشکیل دهنده‌ی کره دارای دینامیک زیر است

$$\begin{aligned} r &= \frac{a}{۲}(۱ - \cos\theta) \\ t &= \sqrt{\frac{۳}{۳۲\pi}\frac{۱}{G\bar{\rho}(a)}}(\theta - \sin\theta) \end{aligned} \quad (۲۰)$$

به طوری که $\bar{\rho}(a)$ چگالی متوسط در کره‌ی به شعاع a در بیشینه‌ی شعاع هر لایه می باشد. با توجه به کاهش چگالی متوسط ساختار نسبت به شعاع، انتظار داریم مرکز ساختار زودتر به بیشینه رسیده و زودتر نیز برمبد. زمان اولین رمبش به تابعیت $\bar{\rho}(a)$ بستگی دارد. فرض

کنیم میانگین چگالی به بیشنه چگالی تحت تابع $\bar{\rho}(a) = \rho_0(1 - a^2/A^2)$ ارتباط داشته باشد. حال شتاب هر یک از لایه ها را می توان از روی $g = -GM/r^2$ به دست آورد. با توجه به اینکه توزیع چگالی را در بیشینه‌ی شعاع می دانیم، شتاب هر یک از لایه ها در بیشینه‌ی شعاع برابر خواهد بود با $g = -G\rho_0(1/a^2 - A^2/a^2)$ خواهد بود. برای شعاع $a = A$ شتاب صفر بوده و با رفتن به مرکز این شعاع بیشتر خواهد شد. با توجه به فرآیند ویریالی شدن، انتظار داریم در مرکز این کره ویریالی شدن به دلیل شتاب سریع رمبش ممکن است رخ ندهد. این مسئله را می توان با شبیه سازی رمبش ساختار کروی که در بخش قبل توضیح دادیم مطالعه کرد. مکانیسم آشوبناک بودن مسئله‌ی ویریالی با افزایش شتاب رمبش کاهش یافته و ساختار می تواند در شتاب های بالا برمبد. این مورد از رمبش بدون ویریالی شدن در فرآیند رمبش مرکز ستارگان برای تبدیل به ستاره‌ی نوترونی رخ می دهد. برای شتاب های بالا در رمبش، اختلال بسیار کوچک در شرایط اولیه برای رسیدن به شرایط ویریالی کافی نیست.

برای مرکز کره قبل از زمان رمبش برای پارامتر $\theta = 2\pi - \epsilon$، زمان رمبش را می توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$t_{coll} = \sqrt{\frac{3}{32\pi}\frac{1}{G\rho_0}}(1 + \frac{a^2}{2A^2})(2\pi - \epsilon^3/6) \qquad (21)$$

بنابراین با توجه به اینکه جملات ظاهر شده در زمان رمبش به صورت اختلالی می باشند، می توان فاز را بر حسب a به صورت $\epsilon = (3a^2/A^2)^{1/3}$ به دست آورد. این فاز زمان رمبش را بر حسب بیشینه‌ی شعاع لایه نشان می دهد. بنابراین در زمان بی نهایت کوچک قبل از رمبش شعاع لایه ها به صورت $r = a/2\epsilon^2/2 \propto a^{7/3}$ خواهد بود. با نگاشت ماده از کره‌ی در بیشینه‌ی شعاع به شعاع r، داریم $\bar{\rho}(a)a^2da = \rho(r)r^2dr$. برای نقاط نزدیک به تکین چگالی $\rho(r) \propto r^{-12/7}$ بدین صورت به دست می آید. می توان سرعت رمبش را نیز از روی ارتباط شعاع کره و زمان با پارامتر آزاد مسئله به دست آورد. سرعت بر حسب ϵ برابر است با: $v = -2 \times a/2/B\epsilon$ که با جاگذاری دامنه‌ی مربوط به زمان سرعت رمبش بر حسب شعاع برابر با $v \propto -r^{1/7}$ به دست می آید.