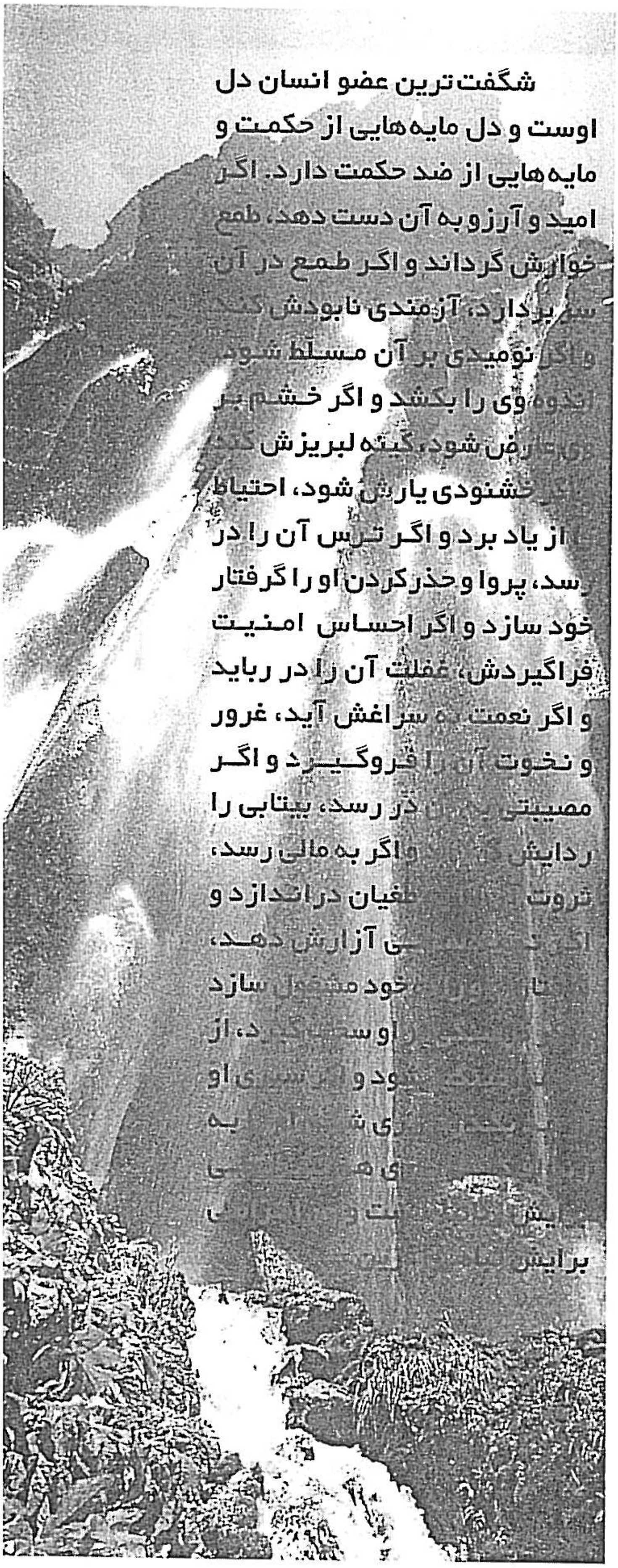
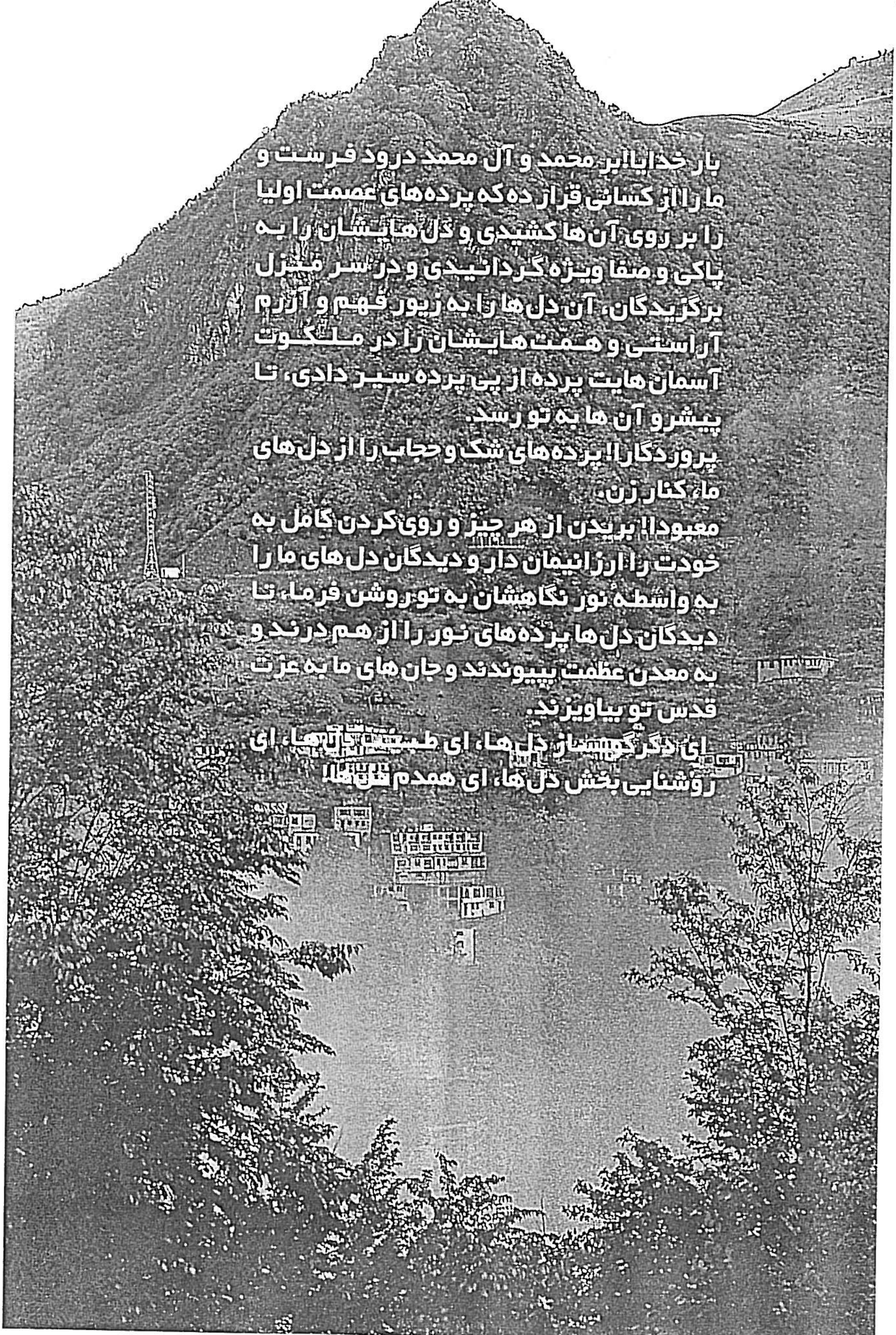

شگفت‌ترین عضو انسان دل
اوست و دل مایه‌هایی از حکمت و
مایه‌هایی از ضد حکمت دارد. اگر
امید و آرزو به آن دست دهد، طمع
خوارش گرداند و اگر طمع در آن
سر بردارد، آزمندی نابودش کند
و اگر نومیدی بر آن مسلط شود،
اندوه وی را بکشد و اگر خشم بر
وی عارض شود، کینه لبریزش کند
خشنودی یارش شود، احتیاط
از یاد برد و اگر ترس آن را در
رسد، پروا و حذرکردن او را گرفتار
خود سازد و اگر احساس امنیت
فراگیردش، غفلت آن را در رباید
و اگر نعمت به سراغش آید، غرور
و نخوت آن را فروگیرد و اگر
مصیبتی در رسد، بیتابی را
و اگر به مالی رسد،
طغیان دراندازد و
آزارش دهد،
خود مشغول سازد



بار خدایا! بر محمد و آل محمد درود فرست و ما را از کسانی قرار ده که پرده‌های عصمت اولیا را بر روی آن‌ها کشیدی و دل‌هایشان را به پاکی و صفا ویژه گردانیدی و در سر منزل برگزیدگان، آن دل‌ها را به زیور فهم و آزرم آراستی و همت‌هایشان را در ملکوت آسمان‌هایت پرده از پی پرده سیر دادی، تا پیشرو آن‌ها به تو رسد.

پروردگارا! پرده‌های شک و حجاب را از دل‌های ما، کنار زن.

معبودا! بریدن از هر چیز و روی کردن کامل به خودت را ارزانیمان دار و دیدگان دل‌های ما را به واسطهٔ نور نگاهشان به تو روشن فرما، تا دیدگان دل‌ها پرده‌های نور را از هم درند و به معدن عظمت بپیوندند و جان‌های ما به عزت قدس تو بیاویزند.

ای دگرگون‌ساز دل‌ها، ای طبیب جان‌ها، ای روشنایی بخش دل‌ها، ای همدم تن‌ها!

فصل ۱

همه می‌توانند مسئله حل کنند

قدیمی‌ترین سند تاریخی از یک فرآیند حل مسئله که تا امروز به‌دست آمده است، رساله‌ای از فیلسوف شهیر افلاطون است. او واضع مدرسه و مکتب فکری جدیدی بود که اقلیدس در آن تحصیل کرد. این رساله به زبان یک مکالمهٔ فرضی بین سقراط، معلم افلاطون و مِنو، یک اشراف‌زادهٔ جوان و یک پسر که بردهٔ مِنوی جوان بوده، تنظیم شده است.

مِنو : چگونه می‌توان به‌دنبال چیزی گشت بدون کوچکترین اطلاعی از اینکه آن چیز چیست؟ آیا هرگز ممکن است چیزی را که نمی‌دانیم موضوع جستجو و کنکاش خود قرار دهیم؟ اگر بخواهم نظرم را طور دیگر بیان کنم، باید بگوییم از کجا می‌توانیم بدانیم آنچه را یافته‌ایم از پیش نمی‌دانسته‌ایم؟

سقراط : منظورت را متوجه می‌شوم. سؤالی که می‌پرسی همان استدلال مکارانه است که انسان نمی‌تواند سعی کند آنچه را می‌داند یا آنچه را نمی‌داند کشف نماید. چون آنچه را می‌داند، نیازی به جستجو ندارد و آنچه را نمی‌داند، چگونه به‌دنبال آنچه نمی‌داند جستجو نماید.

مِنو : بسیار خوب، آیا این استدلال درستی نیست؟

سقراط : خیر.

مِنو : می‌توانید توضیح دهید چگونه این استدلال شکست می‌خورد؟

سقراط : من اعتقاد دارم ما فقط آنچه را می‌دانیم به یاد می‌آوریم. این طرز تفکر نظریه‌ای است که باعث می‌شود دانش‌جویان با سخت‌کوشی برای یادگیری تلاش نمایند.

مِنو : بنابراین، به‌نظر شما آنچه ما یادگیری می‌نامیم چیزی جز به‌یادآوردن نیست. آیا می‌توانی این را به من ثابت کنی؟

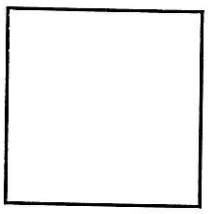
سقراط : این کار ساده‌ای نیست. با این حال از آنجا که تو از من درخواست کرده‌ای، سعی می‌کنم این کار را انجام دهم. یکی از بردگانی را که به همراه داری صدا کن؛ هرکدام را که دوست داری و من با کمک او آنچه می‌خواهی به تو ثابت خواهم کرد.

مِنو : البته ... پسر بیا اینجا.

سقراط : پس به‌دقت مناظرهٔ مارا زیر نظر بگیر تا ببینی آیا من چیزی به او یاد می‌دهم یا او خود به‌خاطر می‌آورد.

مِنو : چنین خواهم کرد.

سقراط : خوب پسر : می‌دانی که مربع شکلی این‌چنین است؟

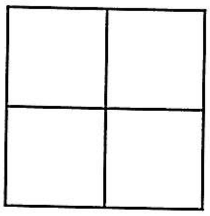


پسر : بله.

سقراط : و اینکه هرچهارضلع آن برابر است؟

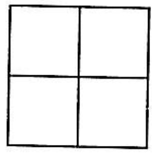
پسر : بله.

سقراط : و این خطهایی که وسط اضلاع را به‌هم وصل می‌کنند برابرند؟



پسر : بله.

سقراط : و این شکل می‌تواند کوچک‌تر یا بزرگ‌تر باشد؟

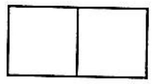


پسر : بله.

سقراط : حالا اگر طول یک ضلع دو قدم باشد و ضلع دیگر به همان‌اندازه باشد، مساحت مربع چقدر می‌شود؟

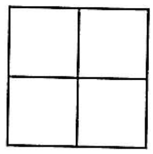
پسر : ...

سقراط : بگذار اینطور بپرسم اگر یک ضلع دو قدم باشد و ضلع دیگر یک قدم آیا مساحت شکل دو قدم مربع نمی‌شود؟



پسر : بله.

سقراط : اما حالا که طول ضلع دوم دو قدم است آیا مساحت کل دو برابر نمی‌شود؟



پسر : بله.

سقراط : دو برابر مساحت دو قدم مربع چقدر می‌شود؟ حساب کن و به من بگو.

پسر : چهار.

سقراط : حالا آیا می‌توان شکلی شبیه همین مربع پیدا کرد که کمی بزرگ‌تر باشد و مساحت آن دو برابر این مربع باشد؟

پسر : بله.

سقراط : مساحت آن چند قدم مربع خواهد بود؟

پسر : هشت.

سقراط : حالا سعی کن به من بگویی طول هر ضلع آن چقدر خواهد بود؟

پسر : معلوم است که هر ضلع آن هم دو برابر خواهد بود.

سقراط : مِنوی جوان، می‌بینی که من به او چیزی یاد نمی‌دهم و فقط از او سؤال می‌کنم. او اکنون فکر می‌کند که طول ضلع مربعی به مساحت هشت قدم مربع را می‌داند.

منو : بله.

سقراط : اما آیا او می‌داند؟

منو : البته که نه.

سقراط : او فکر می‌کند که طول ضلع آن دو برابر آن مربع اولی است.

منو : بله.

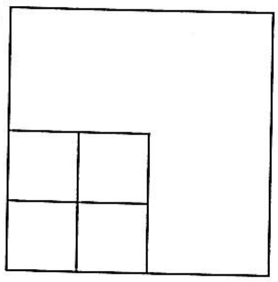
سقراط : حال نگاه کن که چگونه او به خاطر می‌آورد ...

پسر! تو می‌گویی که ضلعهای دو برابر شده، مربعی به مساحت دو برابر تولید می‌کنند.

پسر : بله. اینطور فکر می‌کنم.

سقراط : پس ضلعهای پایینی و سمت چپ این شکل را ادامه بده تا طول آنها دو برابر شود و بر این دو ضلع مربعی بساز.

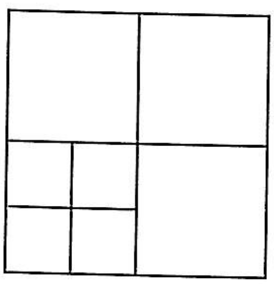
پسر چنین شکلی رسم کرد :



سقراط : بنابر آنچه گفتی مربعی که درست شد باید هشت قدم مربع مساحت داشته باشد.

پسر : بله.

سقراط : اما آیا این چهار مربع بزرگ هرکدام مساحتی برابر با مربع اصلی ندارند؟



پسر : بله.

سقراط : پس این مربع چقدر بزرگ است؟ آیا چهار برابر مربع اولیه نخواهد بود؟

پسر : بله.

سقراط : اما چهار برابر مربع اولیه، شانزده قدم مربع مساحت خواهد داشت.

پسر : بله.

سقراط : آیا یک مربع به مساحت هشت قدم مربع نیمی از این مربع و دو برابر مربع اولیه مساحت ندارد؟

پسر : چرا دارد.

سقراط : پس ضلعی کوچک‌تر از این مربع و بزرگ‌تر از مربع اولیه ندارد؟

پسر : چرا. باید اینطور باشد. اینطور فکر می‌کنم.

سقراط : خیلی خوب. همیشه همان را که فکر می‌کنی بگو. آیا ضلع مربع اولیه دو قدم و ضلع این مربع چهار قدم نیست؟

پسر : چرا هست.

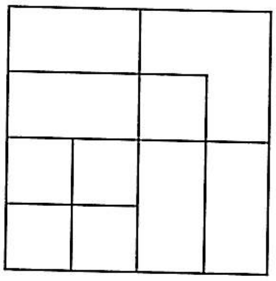
سقراط : بنابراین ضلع مربعی به مساحت هشت قدم مربع از چهار قدم کوچک‌تر و از دو قدم بزرگ‌تر نیست؟

پسر : بله.

سقراط : سعی کن بگویی طول ضلع این مربع چقدر است؟

پسر : سه قدم.

سقراط : اگر مربعی به ضلع سه قدم بسازیم مساحت آن چقدر



می‌شود؟ سه قدم در سه قدم چه‌قدر می‌شود؟

پسر : نه قدم مربع.

سقراط : ولی قرار بود این مربع مساحتی برابر چند قدم مربع داشته باشد؟

پسر : هشت قدم مربع.

سقراط : امّا هنوز مربعی به مساحت هشت قدم مربع نساخته‌ایم.

پسر : نه.

سقراط : پس طول ضلع چنین مربعی چقدر است؟ سعی کن آن را دقیقاً بگویی. اگر نمی‌خواهی آن را بشماری آن را در تصویر نشان بده

پسر : فایده‌ای ندارد، پاسخ آن را نمی‌دانم.

سقراط : مِنوی جوان! توجه کن که او در این مرحله به مسیر یادآوری رسیده است. در آغاز او نمی‌دانست ضلع مربع به مساحت هشت قدم مربع چقدر می‌شود ؛ حالا هم نمی‌داند. اما او فکر می‌کرد که پاسخ سؤال را به‌راحتی به‌دست می‌آورد و شکی در خود راه نداد. اما حالا اظهار نادانی می‌کند. نه تنها جواب را نمی‌داند، بلکه فکر هم نمی‌کند که می‌داند.

مِنو : کاملاً صحیح است.

سقراط : آیا ما در به‌شک انداختن او ضرری به او رسانده‌ایم؟

مِنو : فکر نمی‌کنم.

سقراط : درواقع به او کمک هم کرده‌ایم که به سمت یادآوری جواب صحیح پیش رود. اما او اکنون نه‌تنها از جواب صحیح غافل است بلکه خوشحال می‌شود به جستجوی آن برود. تا کنون او با اطمینان و روانی چنان صحبت می‌کرد که گویی می‌توان همین اظهارات را در برابر جمعیتی از شنوندگان ارائه نماید.

مِنو : بدون شک.

سقراط : آیا فکر می‌کنی او تلاش می‌کرد به‌دنبال دانش جستجو و کنکاش کند تا آنچه را که فکر می‌کرد می‌داند، بفهمد؟

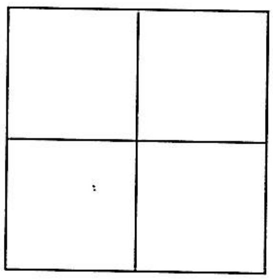
مِنو : خیر.

سقراط : پس روند به شک انداختن او برایش مفید بود.

مِنو : قبول دارم.

سقراط : حال توجه کن که با شروع از این حالت شک او با همراهی من حقیقت را کشف خواهد کرد. اگرچه من بدون درس دادن به او. تنها از او سؤالاتی می‌کنم آماده باش که اگر به او چیزی یاد دهم مرا متوقف کنی.

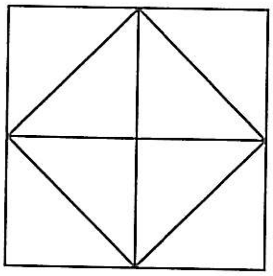
حالا به من بگو پسر که این مربع به ضلع چهار قدم را می‌توان این‌گونه چهار برابر کرد؟



پسر : بله

سقراط : حال اگر این خطوط از گوشه‌ای به گوشه‌ای کشیده شود هرکدام از مربع‌ها را نصف می‌کند؟

پسر : بله



سقراط : آیا این چهار خطی که کشیدیم برابر نیستند؟

پسر : بله

سقراط : مساحتی که این خطوط محصور می‌کنند چقدر است؟

پسر : نمی‌فهمم.

سقراط : آیا این چهارمربع هریک با یک خط به دو نیمه تقسیم شده‌اند که یکی از آن نیمه‌ها درون مربع قرار دارد؟

پسر : بله

سقراط : چند تا از این نیمه‌ها در این وسط داریم؟

پسر : چهار

سقراط : در هریک از مربع‌ها چند تا از این نیمه‌ها داریم

پسر : دو

سقراط : پس این شکل درونی چقدر بزرگ است؟

پسر : هشت قدم مربع.

سقراط : مربع به چه‌ضلعی؟

پسر : به ضلع همین خطی که گوشه‌ها را وصل می‌کند.

سقراط : پس می‌بینیم که مربعی که ضلع آن برابر قطر مربعی داده شده باشد، مساحتی دو برابر آن دارد.

پسر : همینطور است.

سقراط : منوی جوان! چطور فکر می‌کنی؟ آیا او با نظری غیر از عقیده شخصی خود پاسخ داده است؟

مِنو : نه! همه‌اش نظرات خودش بود.

سقراط : اما با این حال او نمی‌دانست. همانطور که خودش چند دقیقه قبل گفت.

مِنو : همینطور است.

۱ـ۱ـ الگویابی در اشکال هندسی

فعالیت

با مقوا مربعی بسازید که مساحت آن دقیقاً دو برابر مساحت مربع مقوایی داده شده باشد. دوست دارید این مسئله را با چه ایده‌ای حل کنید؟

احمد : دوست دارم بجای اینکه مساحت را دو برابر کنم، با قیچی‌کردن از این مربع مربعی با مساحت نصف به‌دست آورم. آنگاه می‌شود با برعکس کردن این روند مسئله را حل کرد.

مرتضی : می‌خواهم با قیچی دو مربع مساوی را به قسمتهای کوچک‌تری چنان تقسیم کنم که بتوانم با کنار گذاشتن آنها مربع بزرگ‌تری بسازم.

داود : نیمی از مربع را که یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، با قیچی و کنارهم چیدن تبدیل به مربع می‌کنم. بعد همین روند را برعکس می‌کنم.

خود را بیازماییم

با مقوا مربعی بسازید که مساحت آن پنج برابر مساحت مربع مقوایی داده شده باشد.

خود را بیازماییم

با مقوا مستطیلی متشابه با مستطیل داده شده بسازید که مساحت آن دقیقاً دو برابر مساحت مستطیل داده شده باشد.

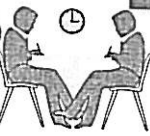
خود را بیازماییم

با مقوا مثلثی قائم‌الزاویه متشابه با مثلث قائم‌الزاویه داده شده بسازید که مساحت آن دقیقاً دو برابر مثلث قائم‌الزاویه داده شده باشد.

خود را بیازماییم

با مقوا مثلثی متشابه با مثلث داده شده بسازید که مساحت آن دقیقاً دو برابر مثلث داده شده باشد.

۷



فعالیت

(قضیه فیثاغورث) با قیچی کردن مربعهایی که روی اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه، بنا می‌شوند، نشان دهید مربع وتر برابر است با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر.

معلم : در مورد بحث سقراط و منو چه فکر می‌کنید؟

شادی : من با حل مسئله مشکل دارم!

شیرین : و من با صورت مسئله مشکل دارم!

معلم : منظورتان چیست؟

شادی : من فکر نمی‌کنم برای آنکه چیزی را پیدا کنیم حتماً لازم باشد آن را بدانیم. همانطور که در یک اتاق قدم می‌گذارید و چیزهایی می‌بینید که نمی‌دانستید آنجا هستند.

معلم : اما آن اشیاء واقعاً جدید نیستند. آنها تقریباً همان اشیای آشنا هستند. به یک نوزاد فکر کنید. او چگونه یاد می‌گیرد که از جهان درک معناداری داشته باشد؟

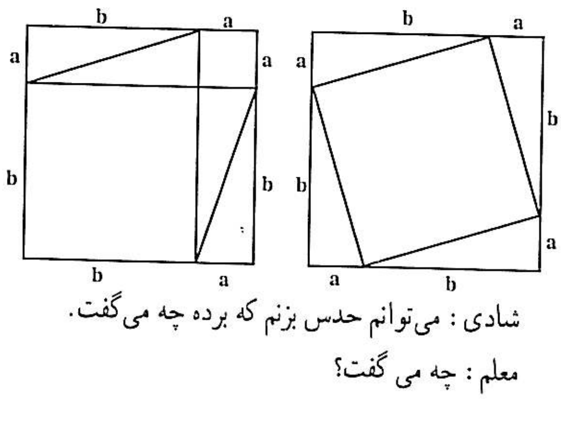
شیرین : به سختی.

معلم : اما بالاخره موفق می‌شود. اما اگر به یک کامپیوتر، یک دوربین تلویزیون وصل کنیم چنین اتفاقی نمی‌افتد.

شیرین : اما اگر کامپیوتر برنامه‌ریزی شده باشد، یاد خواهد گرفت. نوزاد هم برای یادگیری برنامه‌ریزی شده است.

معلم : پس نظریه سقراط این است که ما یاد می‌گیریم چون به‌خاطر می‌آوریم و نظریه شیرین این است که ما یاد می‌گیریم چون اینطور برنامه‌ریزی شده‌ایم! البته این تنها نکته‌ای نیست که سقراط مطرح می‌کند. بلکه او چگونگی استدلال را هم مورد توجه قرار می‌دهد.

مثلاً اگر برده، به اندازه کافی استراحت می‌کرد هیچ بعید نبود سقراط این دو شکل را در برابر دید او قرار دهد.



شادی : می‌توانم حدس بزنم که برده چه می‌گفت.

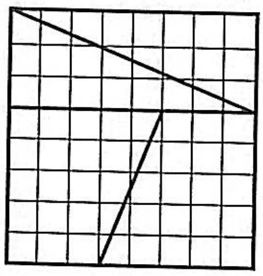
معلم : چه می گفت؟

شادی : من هشت مثلث قائم‌الزاویه می‌بینم که اضلاع زاویه قائمه آنها a و b هستند. پس همهٔ آنها برابرند. پس همه یک مساحت دارند و دو مربع می‌بینم که هر ضلع آنها a + b است پس این دو مربع نیز با هم برابرند. پس مساحت برابر دارند. حالا اگر از این دو مربع برابر مساحت مثلثها را که برابر هستند حذف کنیم، مساحتهای برابر باقی می‌ماند. یعنی اگر وتر این مثلث قائم‌الزاویه را c بگیریم، مربعهایی به ضلع a و b جمعاً مساحتی برابر مربعی به ضلع c خواهند داشت.

شیرین : منوی جوان! می‌بینی که حتی یک برده تحصیل‌نکرده می‌تواند چیزهای خوبی بفهمد. اما تو ای بردهٔ جوان مگر این چینه معروف را ندیده‌ای که در آن با برش دادن یک مربع ۸×۸ و دوباره به‌هم چسباندن قطعات یکی از مساحتش کم می‌شود؟

خود را بیازماییم

یکی از «حیله‌های هندسی» معروف این است که مربعی با ابعاد ۸×۸ را بر طبق شکل سمت زیر در امتداد خطوط درشت می‌برند و قطعات حاصل را به طریقی دیگر در کنار هم قرار می‌دهند. به‌ظاهر مستطیلی با ابعاد ۱۳×۵ به‌دست می‌آید. بنابراین ۸×۸ = ۱۳×۵ .آیا می‌توانید بگویید اشکال این استدلال کجاست؟

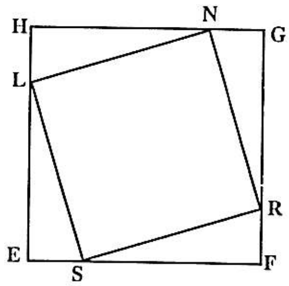


شادی : سقراط بزرگ آن یک حقهٔ هندسی بود اما این نیست.

شیرین : این را تو می گویی بردهٔ جوان. اما من باور ندارم.

معلم : به نظر من سقراط یا باید اشکالی در استدلال بیابد یا اینکه آن را بپذیرد.

شیرین (پس از کمی فکر) : چرا چهارضلعی RSLN مربع است؟



شادی (پس از کمی فکر) : چهارضلع آن که با هم برابرند. بنابر تقارن چهار زاویه آن نیز برابرند. مجموع زاویه‌های هر چهارضلعی °۳۶۰ است. چون با کشیدن یک قطر به دو مثلث تقسیم می‌شود که مجموع زوایای هریک °۱۸۰ است.

شیرین : این تقارن که از آن صحبت می‌کنی چیست؟ فکر می‌کنم مراحلی از استدلال را فراموش کرده‌ای.

شادی : اینطور نیست. اگر زوایای روبروی اضلاع به طول a و b را به ترتیب α و β بنامیم می‌دانیم $\alpha+\beta=۹۰^\circ$. امّا زاویه چهارضلعی موردبحث مکمل α و β است پس زاویهٔ این چهارضلعی مربع است.

شیرین : اما چرا مجموع زوایای هر مثلث °۱۸۰ است و یا اینکه چرا هر دو مثلث قائم‌الزاویه که اضلاع زاویه قائمه آن a و b هستند با هم برابرند؟

شادی : این که منصفانه نیست. می‌پرسی چرا «الف» درست است؟ می‌گویم «الف» از «ب» نتیجه می‌شود. بعد می‌پرسی چرا «ب» درست است؟ می‌گویم «ب» از «ج» نتیجه می‌شود. باز می‌پرسی چرا «ج» درست است؟ اینطور من هیچوقت دراین بحث پیروز نمی‌شوم.

معلم : بله. این دقیقاً همان دلیلی است که یونانیان اصول موضوعه را مطرح کردند. تو و شیرین باید اول بر سر درستی یک سری از چیزها توافق کنید.

شیرین : فقط به‌خاطر بحث و به‌طور موقتی؟

معلم : بله. فقط به خاطر بحث. و اگر شادی نشان داد آنچه می‌خواهد ثابت کند از چیزهایی که مورد توافق است نتیجه می‌شود، در بحث پیروز شده است.

شیرین : اما من شنیده بودم یونانیان بر سر چیزهایی توافق می‌کنند که هر ذهنی آنها را می‌پذیرد.

معلم : بله. اما نه ذهن تیزبین و کنجکاوی مانند سقراط. امروز بعد از صدها سال تلاش در مبانی ریاضی می‌دانیم که هیچ ادعایی نیست که نتواند توسط یک ذهن به اندازهٔ کافی باهوش مورد نقد قرار گیرد.

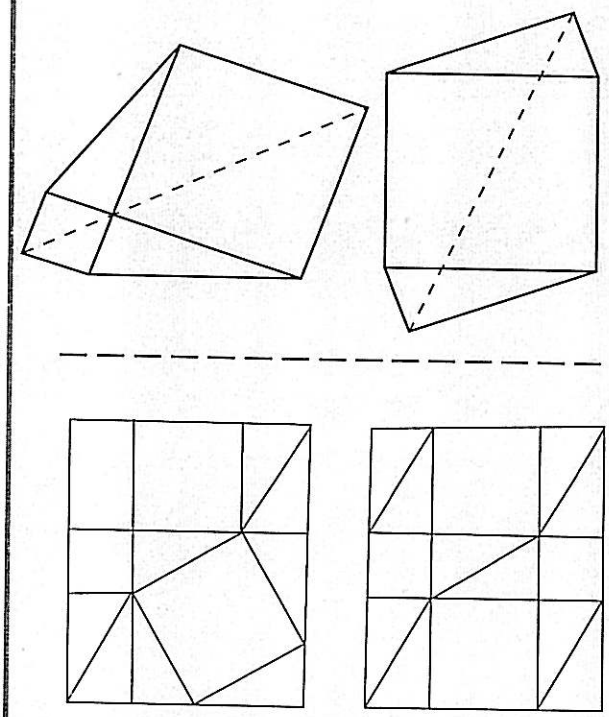
شیرین : پس کافی است من چند تا اصل اولیه برای خودم انتخاب کنم و بعد با آنها «هندسه شیرینی» بسازم. به‌جای «هندسه اقلیدسی» که اصول آن را اقلیدس برگزیده.

معلم : اینطور هم نیست. راحت می‌توان حریف شطرنج پیدا کرد. اما نه حریف شطرنجی که حاضر باشد با قوانین شیرین حرکت کند. برای اینکه چند اصل به عنوان موضوع جالبی برای مطالعه پذیرفته شوند، باید عده‌ای قابل ملاحظه از ریاضیدانان قبول کنند که این اصول از لحاظ ریاضی جالب هستند. مثلاً این سؤال سقراط که «ضلع مربعی به مساحت ۸ قدم مربع چقدر است؟» برای ریاضیدانان جالب بود. برای همین این سؤال توسط افلاطون که نویسندهٔ رساله است انتخاب شده است. حالا شما فکر می‌کنید که طول این ضلع چقدر است؟

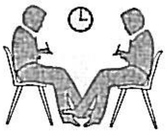
شادی : ...

خود را بیازماییم

با کمک شکل‌های زیر قضیه فیثاغورث را ثابت کنید.

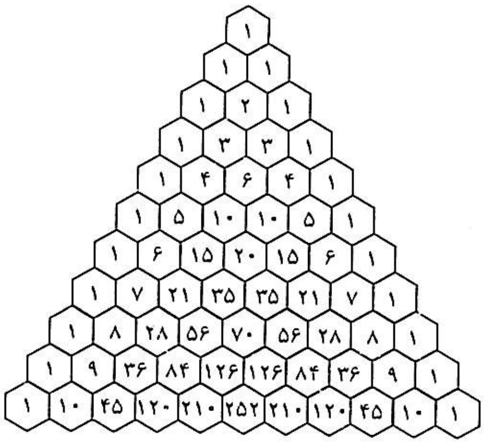


۱ــ۲ــ الگویابی در دنباله‌های عددی



فعالیت

با کمک دوستانتان جدول اعداد زیر را بررسی کنید. در این چنین اعداد چه الگوهایی مشاهده می‌کنید؟ هر الگو را توصیف نمایید و سپس به زبان فرمولهای ریاضی بنویسید.



محبوبه : این الگو به نظر من می‌رسد که دو ضلع این مثلث را فقط عدد ۱ پر کرده است.

اقدس : من اعداد متوالی ۱،۲،۳،۴، ... ،۱۰ در دو ستون کج نظرم را جلب می‌کند.

عزت : در هر سطر هم اعدادی تکراری هست. بعضی اعداد دوبار تکرار شده‌اند. اما این الگوها که جالب نیستند. منظور سؤال چیست؟

معلم : همینطور که به دنبال الگوها می‌گردید سعی کنید به این سؤالات پاسخ دهید.

۱ــ آیا می‌توانید ردیف بعدی را پیش‌بینی کنید؟

۲ــ آیا در تکرار اعداد الگویی می‌بینید؟

۳ــ آیا در ستونهای کج الگویی می‌بینید؟

محبوبه : بیائید روی پیش‌بینی ردیف بعد متمرکز شویم. همه حدس می‌زنند که ردیف بعدی باید با ۱،۱۱، ... شروع شود و با ...، ۱،۱۱ خاتمه پیدا کند. اما عدد بعد از ۱۱ را چطور پیدا کنیم؟

اقدس : اعداد ۱ و ۱۱ را با توجه به ستونهای کج حدس زدیم. لابد اینجا هم باید ستون کج بعدی را درنظر بگیریم و در آن الگویی بیابیم. از هر دو طرف ستون کج بعدی این دنباله است :

۱ و ۳ و ۶ و ۱۰ و ۱۵ و ۲۱ و ۲۸ و ۳۶ و ۴۵ و ...

آیا می‌توانید جمله بعدی را حدس بزنید؟

محبوبه : بعضی زوج و بعضی فرد هستند. از این لحاظ که من الگویی در آنها نمی‌بینم.

عزت : فکر نمی‌کنم مضارب عددی خاص باشند. به تجزیهٔ آنها توجه کنید :

$1, 3, 2\times 3, 2\times 5, 3\times 5, 3\times 7, 2^2\times 7, 2^2\times 3^2, 3^2\times 5, \ldots$

صبر کنید. من یک الگو می‌بینم. هر عدد با عدد بعدی یک عامل اول مشترک دارد. البته به‌جز دو عدد اوّل. مثلاً ۳ با ۳×۲ عامل مشترک ۳ و ۳×۲ با ۵×۲ عامل مشترک ۲ و ۵×۲ با ۵×۳ عامل مشترک ۵ را دارند.

اقدس : ولی این عاملهای مشترک الگویی ندارند. نگاه کن

$1, 3, 2\times 3, 2\times 5, 3\times 5, 3\times 7, 2^2\times 7, 2^2\times 3^2, 3^2\times 5, \ldots$

این اعداد اول نه ترتیبی دارند و نه حتی افزایشی هستند. درصورتی که دنباله ...، ۴۵، ۳۶، ۲۸، ۲۱، ۱۵، ۱۰، ۶، ۳، ۱ افزایشی است.

محبوبه : پس بیایید در افزایش این دنباله الگویی پیداکنیم. ببینیم در هر مرحله چقدر به عدد قبلی اضافه می‌شود.

عزت : بسیار خوب

۱

۳ = ۱ + ۲

۶ = ۳ + ۳

۱۰ = ۶ + ۴

۱۵ = ۱۰ + ۵

۲۱ = ۱۵ + ۶

۲۸ = ۲۱ + ۷

۳۶ = ۲۸ + ۸

۴۵ = ۳۶ + ۹

عالیست! محبوبه نابغه‌ای! یکبار با ۲، یکبار با ۳، یکبار با ۴، ... و همینطور به ترتیب با سایر اعداد طبیعی جمع کرده‌ایم تا عدد بعدی را بدست آوریم.

اقدس : پس عدد بعدی می‌شود ۱۰ + ۴۵ که همان ۵۵ است. پس دنباله ما با ۱, ۱۱, ۵۵, ... شروع و با ...., ۵۵, ۱۱۱, خاتمه می‌یابد. برویم سراغ عدد بعدی.

محبوبه : باید در ستون کج بعدی الگویی پیدا کنیم.

عزت : ۱۲۰, ۸۴, ۵۶, ۳۵, ۲۰, ۱۰, ۴, ۱

این دنباله هم افزایشی است. محاسبه می‌کنیم در هر مرحله چقدر افزایش داشته‌ایم.

۱۲۰، ۸۴، ۵۶، ۳۵، ۲۰، ۱۰، ۴، ۱

۳۶   ۲۸   ۲۱   ۱۵   ۱۰   ۶   ۳

اقدس : این که همان دنباله ستون قبلی است! عدد بعدی می‌شود ۴۵ + ۱۲۰ یعنی ۱۶۵.

عزت : به‌نظر می‌رسد همهٔ ستونهای کج الگو دارند. هر عدد از جمع کردن عدد قبلی از همان ستون و عددی از ستون قبل به‌دست می‌آید. بیایید به مثلث نگاه کنیم.

اقدس : همین‌طور است که می‌گویی. حتی یک الگوی جالب‌تر دیده می‌شود. هر عدد درست برابر با مجموع دو عددی است که بالای سرش است.

سطر اوّل   ۱

سطر دوّم   ۱ ۱

سطر سوم   ۱ ۲ ۱

سطر چهارم   ۱ ۳ ۳ ۱

سطر پنجم   ۱ ۴ ۶ ۴ ۱

سطر ششم   ۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

سطر هفتم   ۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱

سطر هشتم   ۱ ۷ ۲۱ ۳۵ ۳۵ ۲۱ ۷ ۱

محبوبه : این کار را تمام می‌کند می‌توان فقط با سطر یازدهم سطر بعدی را حساب کرد.

۱ ۱۰ ۴۵ ۱۲۰ ۲۱۰ ۲۵۲ ۲۱۰ ۱۲۰ ۴۵ ۱۰ ۱

۱ ۱۱ ۵۵ ۱۶۵ ۳۳۰ ۴۶۲ ۴۶۲ ۳۳۰ ۱۶۵ ۵۵ ۱۱ ۱

اقدس : بسیار خوب، اینطور می‌توانیم جدول را هرچقدر بخواهیم ادامه دهیم. آیا معنیش این است که همه الگوهای زیبا در این مثلث را می‌شناسیم؟

عزت : صبر کنید! معنیش این نیست! من در مجموع اعداد هر سطر الگویی می‌بینم.

خود را بیازماییم

آیا مجموع اعداد هر سطر از الگویی پیروی می‌کنند؟ بعد از اینکه این الگو را حدس زدید، درستی حدس خود را برای ادامهٔ جدول اعداد تحقیق کنید.

رؤیا، مهسا و رزا هم به صورت گروهی روی جدول اعداد فکر کردند. آنها موفق شدند بدون راهنمایی معلم الگوهایی بیابند.

رؤیا : به‌نظر می‌رسد ستون‌های کج هرکدام الگویی دارند.

ستون اول : ....، ۱،۱،۱،۱،۱،۱،۱،۱،۱،۱،۱،۱

ستون دوم : ....، ۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹،۱۰

ستون سوم : ....، ۱،۳،۶،۱۰،۱۵،۲۱،۲۸،۳۶،۴۵

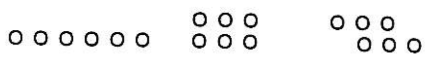
ستون سوّم الگویی ندارد.

مهسا : لابد الگویی دارد ولی ما آن را نمی‌بینیم.

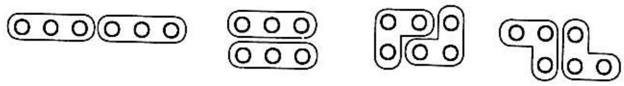
رزا : بیایید با هرکدام از این اعداد شکلی بسازیم. مثلاً با ۱ مهره، ۳ مهره، ۶ مهره یا ۱۰ مهره چه الگوهایی می‌توان ساخت.

۱ مهره 

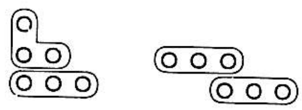
۳ مهره 

۶ مهره 

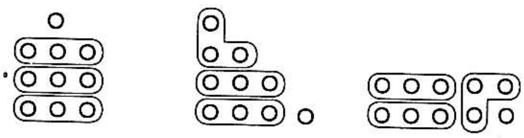
می‌بینید الگوهای شش‌تایی از الگوهای ۳ تایی بدست می‌آیند. مثلاً



می‌توان الگوهای دیگری هم از ۶ مهره ساخت مثلاً

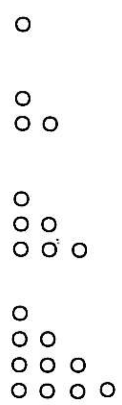


پس سعی می‌کنیم الگوهایی ۱۰تایی به کمک الگوهای قبلی بسازم.

۱۰ مهره 

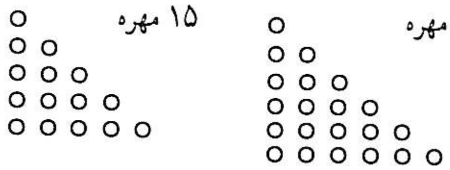
مهسا : اگر بخواهی از این چیدن‌ها یکی را که از همه منظم‌تر است انتخاب کنید بهترین انتخاب به‌نظر من این است که آنها را مثلثی بچینیم.

۱ مهره، ۳ مهره، ۶ مهره، ۱۰ مهره



این با بقیهٔ اعداد ستون سوّم هم سازگار است

۲۱ مهره، ۱۵ مهره



این الگو به ما می‌گوید که

۱ = ۱

۳ = ۱ + ۲

۶ = ۱ + ۲ + ۳

۱۰ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴

۱۵ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵

۲۱ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶

۲۸ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷

۳۶ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸

۴۵ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹

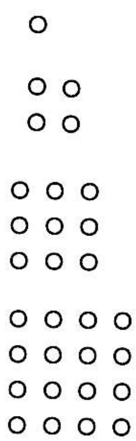
رؤیا : بنابراین عدد بعدی می‌شود ۱۰+۹+۸+۷+۶+۵+۴+۳+۲+۱ که برابر است با ۵۵ اینطور می‌توانیم ستون سوّم را همینطور پشت سر هم حساب کنیم.

مهسا : برویم سر ستون بعدی

ستون چهارم : ... , ۱۲۰، ۸۴، ۵۶، ۳۵، ۲۰، ۱۰، ۴، ۱

رزا : اگر بخواهیم با مهره‌ها کار کنیم بازهم باید با مهره‌ها الگو بسازیم. در دنباله قبلی چون با ۳ مهره تنها شکل جالبی که می‌شد ساخت مثلث بود الگوی مثلثی جواب داد. شاید اینجا الگوی مربعی جواب بدهد.

۱ مهره، ۴ مهره، ۱۰ مهره، ۲۰ مهره



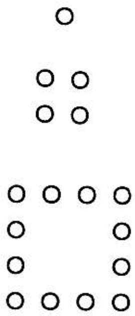
مثل اینکه این ایده جواب نمی‌دهد!

رؤیا : الگوی مربع را می‌شود طور دیگری هم ادامه داد

۱ مهره

۴ مهره

۱۰ مهره



نه این یکی هم نمی‌شود.

رزا : شاید این ایده که با مهره کار کنیم اصلاً جواب ندهد.

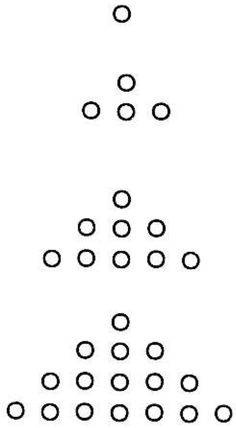
مهسا : باید بیشتر تلاش کنیم. بگذار ببینم می‌توانم با ۴ مهره الگویی دیگر بسازم

۱ مهره

۴ مهره

۱۰ مهره

۲۰ مهره



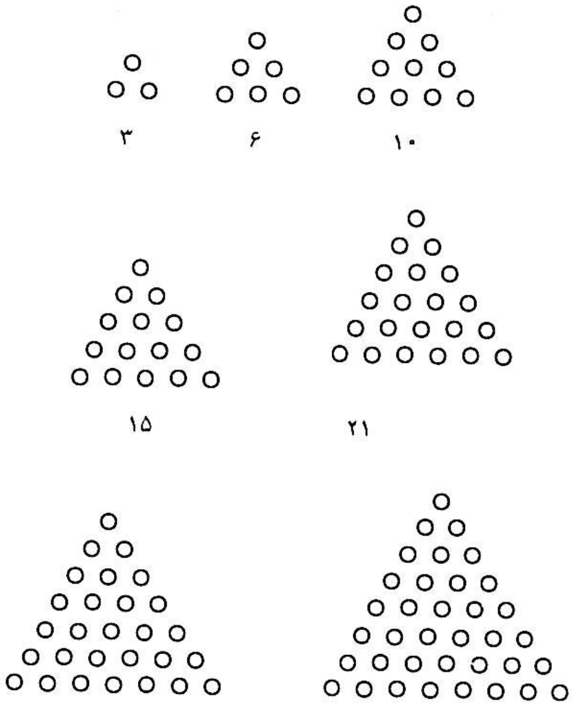
این هم کار نمی‌کند. اگر بخواهیم الگویی تکراری داشته باشیم باید مهره‌هایی که هربار اضافه می‌کنیم نظم داشته باشد.

رؤیا : یعنی باید نظمی در تعدادی که هربار اضافه می‌شود بیابیم.

۱ ،۴ ،۱۰ ،۲۰ ،۳۵ ،۵۶ ،۸۴ ،۱۲۰ ،...

۳ ۶ ۱۰ ۱۵ ۲۱ ۲۸ ۳۶

رزا : این که همان دنباله‌ای است که قبلاً ساختیم.



رؤیا : پس زیر هر ردیف باید یک مثلث بگذاریم؟

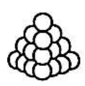
مهسا : فهمیدم. شکل ما سه‌بعدی می‌شود. نمی‌توان آن را با یک الگوی مسطح درست کرد. الگوی ما از روی هم گذاشتن این مثلث‌ها درست می‌شود. توجه کنید

۱ مهره

۴ مهره

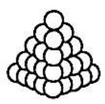
البته یک مهره آن پشت است که دیده نمی‌شود.

۱۰ مهره



سطر بعدی با اضافه‌کردن یک مثلث به سطر قبلی بدست می‌آید.

۲۰ مهره



رزا : پس باید برای پیدا کردن عدد بعدی کمی نامگذاری

انجام دهیم.

باید برای اعداد دنباله قبلی اسم‌گذاری کنیم. مثلاً

$T_1 = 1$

$T_2 = 1+2$

$T_3 = 1+2+3$

$T_4 = 1+2+3+4$

یعنی اولین عدد مثلثی را T_1 بنامیم و دومین عدد مثلثی را T_2 و سومی را T_3 و همینطور الی آخر. در اینصورت اعداد چهاروجهی که در بالا ساختیم از فرمول زیر بدست می‌آید.

$1 = T_1$

چهار از دو مثلث زیر هم تشکیل شده است

$4 = T_1 + T_2$

ده از سه مثلث زیر هم تشکیل شده است

$10 = T_1 + T_2 + T_3$

بیست از چهار مثلث زیر هم تشکیل شده است

$20 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$

$35 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$

$56 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6$

$86 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_7$

$120 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_7 + T_8$

مهسا : عدد بعدی دنباله هم معلوم است

$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_7 + T_8 + T_9$

$= 1+3+6+10+15+21+28+36+45 = 165$

عدد بعدی ۱۶۵ است.

رؤیا : فهمیدم! من می‌دانم چطور تمام سطر بعد را بدست بیاوریم.

هر عدد برابر است با مجموع اعداد ستون کج قبلی که بالای سرش هستند.

به جدول نگاه کنید

۱

۱ ۱

۱ ۲ ۱

۱ ۳ ۳ ۱

۱ ۴ ۶ ۴ ۱

۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱

۱ ۷ ۲۱ ۳۵ ۳۵ ۲۱ ۷ ۱

اینطور می‌توان تمام اعداد سطر بعد را به‌دست آورد.

شما بحث کدام گروه را بیشتر دوست دارید؟ عزت، مجبوبه و اقدس بهتر با هم فکر می‌کنند یا رؤیا، رزا و مهسا؟

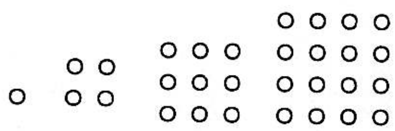
خود را بیازماییم

در اعداد ستون پنجم الگویی بیابید.

۱, ۵, ۱۵, ۳۵, ۷۰, ۱۲۶, ۲۱۰

خود را بیازماییم

اعداد مربعی را اینطور می‌سازند.

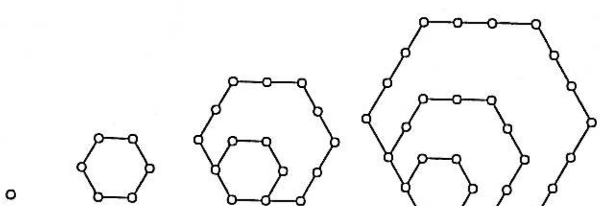


و...

فرمولی برای این دنباله از اعداد پیدا کنید.

خود را بیازماییم

اعداد شش وجهی را اینطور می‌سازند.



۱ ۶ ۱۵ ۲۸

این الگوی هندسی را ادامه دهید و به‌صورت عددی بنویسید. سپس سعی کنید این الگو را در جدول اعداد پیدا کنید.

هدی و حورا نیز سعی کردند الگویی بیابند تا به کمک آن بتوانند سطر بعدی را حساب کنند.

هدی : سطر اوّل و دوّم خیلی به هم شبیهند. با این همه شباهت نمی‌توان الگویی پیدا کرد. ولی سطر دوّم و سوّم مرا یاد چیزی می‌اندازند. بین ۱۱ و ۱۲۱ یک رابطه‌ای بود ...

حورا : شاید منظورت این است که $۱۱^۲ = ۱۱ \times ۱۱ = ۱۲۱$

هدی : بله! همین است که گفتی.

سطر اوّل $۱۱^۱$

سطر دوّم $۱۱^۲ = ۱۲۱$

لابد سطر سوّم هم همینطور به‌دست می‌آید

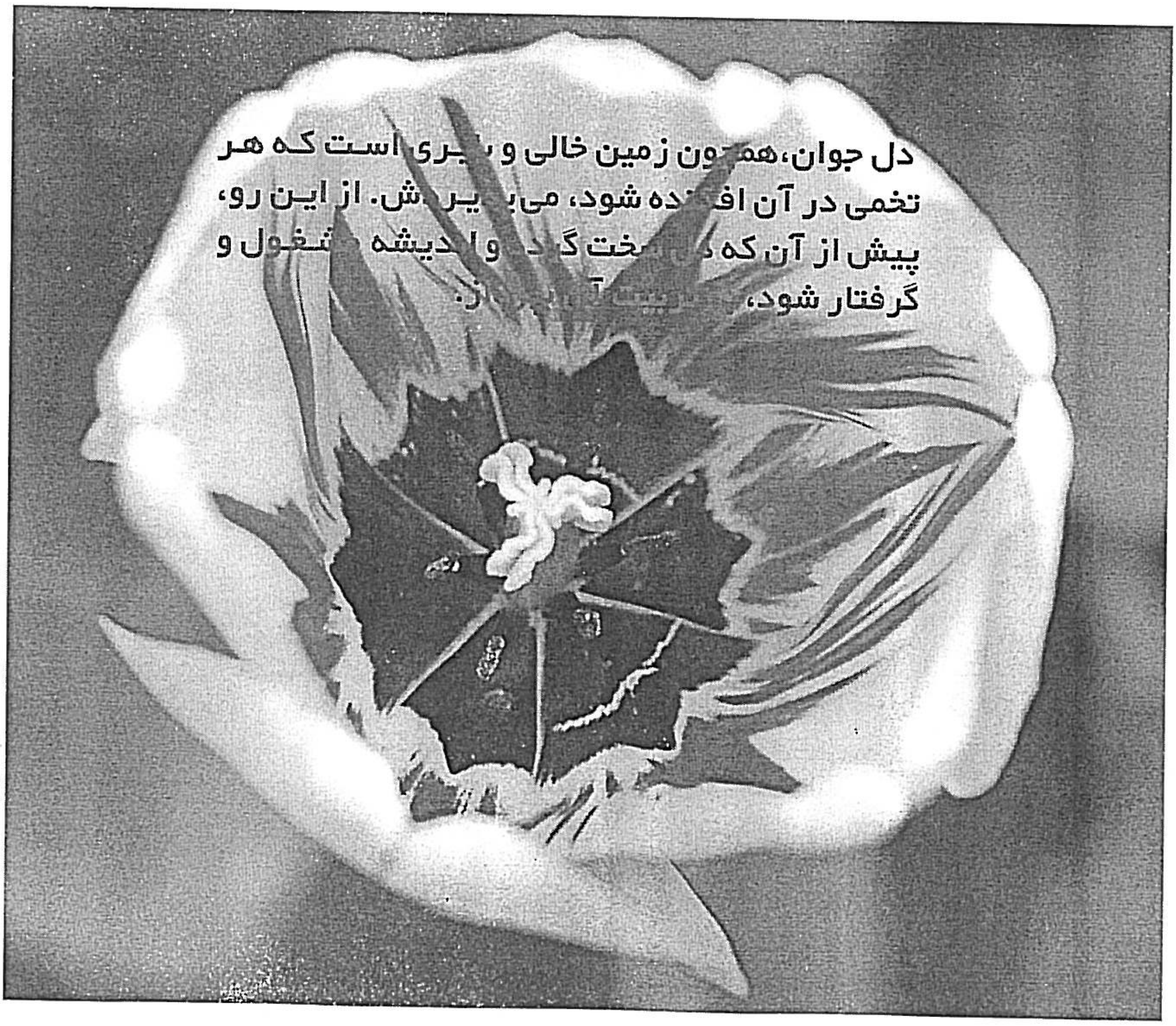
سطر سوّم $۱۱^۳ = ۱۱ \times ۱۱ \times ۱۱ = ۱۳۳۱$

حورا : عجب الگویی پیدا شد. بگذار این کار را ادامه دهیم تا سطر بعدی جدول به‌دست بیاید.

$$۱۱^۱ = ۱۱$$
$$۱۱^۲ = ۱۲۱$$
$$۱۱^۳ = ۱۳۳۱$$
$$۱۱^۴ = ۱۴۶۴۱$$
$$۱۱^۵ = ۱۶۱۰۵۱$$
$$۱۱^۶ = ۱۷۷۱۵۶۱$$
$$۱۱^۷ = ۱۹۴۸۷۱۷۱$$

می‌بینی که این الگو کار نمی‌کند. ولی زیر ارقامی که درست به‌دست آمده‌اند خط می‌کشیم.

هدی : ولی شباهت خیلی زیاد است. شاید بتوان این دو دنباله از اعداد را از روی هم به‌دست آورد. بیا آنها را کنارهم بنویسیم.



۱	۱
۱۱	۱۱
۱۲۱	۱۲۱
۱۳۳۱	۱۳۳۱
۱۴۶۴۱	۱۴۶۴۱
۱۶۱۰۵۱	۱۵۱۰۱۰۵۱
۱۷۷۱۵۶۱	۱۶۱۵۲۰۱۵۶۱
۱۹۴۸۷۱۷۱	۱۷۲۱۳۵۳۵۲۱۷۱

می‌بینی که می‌شود رقمهای عدد سمت راست را با جمع کردن رقمهای پشت سرهم اعداد سمت چپ پیدا کرد.

حورا : بگذار ادامه جدول را هم بررسی کنم تا مطمئن شوم.

۲۱۴۳۵۸۸۸۱	۱۸۲۸۵۶۷۰۵۶۲۸۸۱
۲۳۵۷۹۴۷۶۹۱	۱۹۳۶۸۴۱۲۶۸۶۱۲۶۳۶۹۱
۲۵۹۳۶۴۴۴۶۰۱	۱۱۰۴۵۱۲۰۲۱۰۲۵۲۲۱۰۱۲۰۴۵۱۰۱

می‌بینی که الگویی که گفتی در همهٔ جدول درست نیست.

هدی : راست می‌گویی ولی به‌نظر می‌رسد که در چند مرحله بتوان به عدد دیگر رسید نگاه کن.

۱۸۲۸۵۶۷۰۵۶۲۸۸۱

۱۸۲۸۵۱۳۵۸۸۸۱

۱۸۲۱۳۱۳۵۸۸۸۱

۱۸۲۱۴۳۵۸۸۸۱

۱۰۱۰۱۴۳۵۸۸۸۱

۲۱۴۳۵۸۸۸۱

حورا : این کار خیلی پیچیده است. فکر نمی‌کنم الگویی بدهد. اگر راست می‌گویی آن را برای عدد بعدی هم حساب کن!

هدی : بسیار خوب

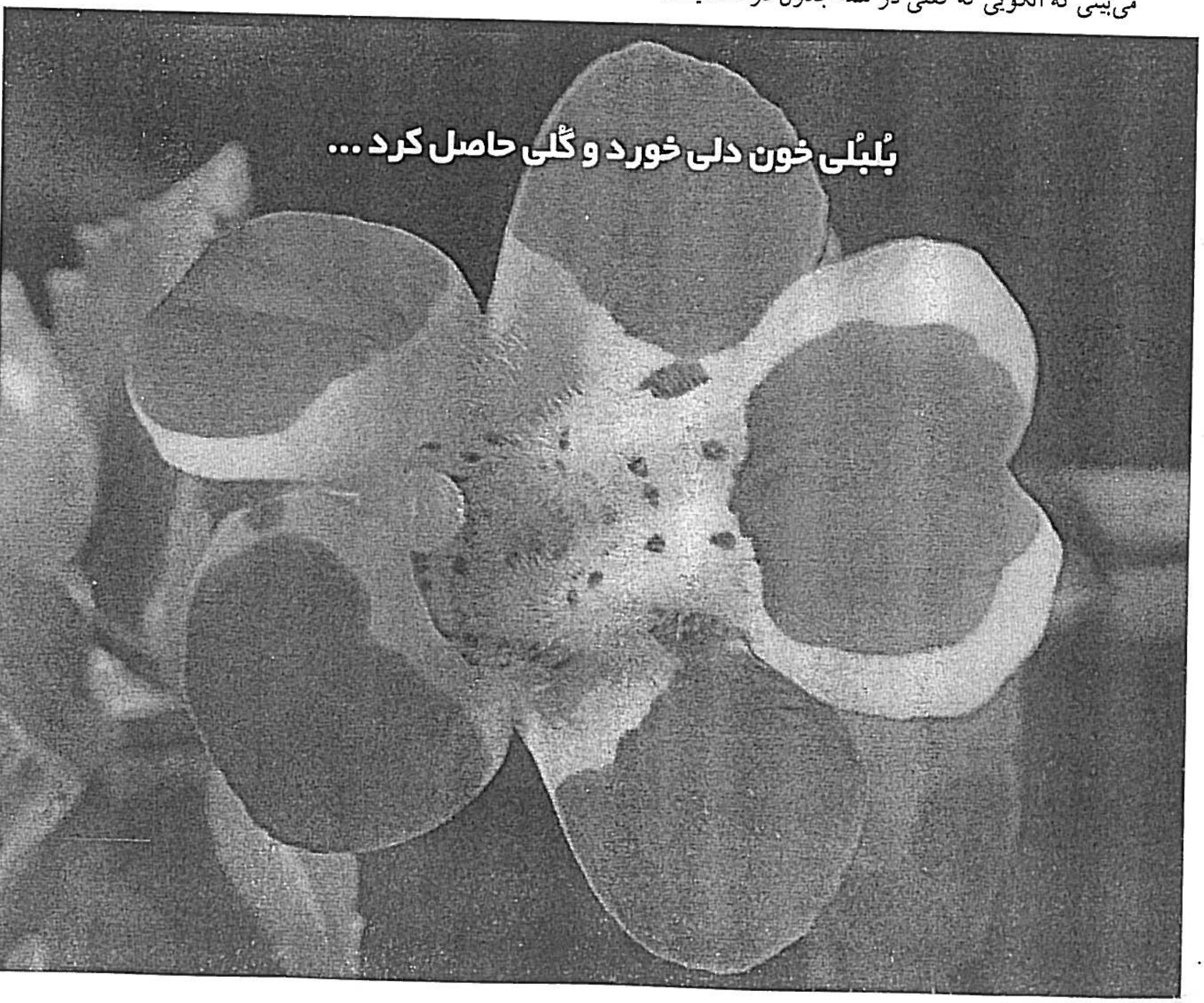
۱۹۳۶۸۴۱۲۶۱۲۶۸۶۳۶۹۱

↓

۱۹۳۶۸۴۱۲۶۱۲۶۱۷۶۹۱

↓

نمی‌توانم ادامه دهم.



حورا: دیدی بهت گفتم! ولی چیزی که به‌نظر می‌رسد این است که یک چیزی مثل ده بر یک کار را خراب می‌کند. اعداد که کوچک هستند، خرابی قابل‌جبران است. ولی همینطور که بزرگ‌تر می‌شود کار بیشتر گیر می‌کند. برای این که ده بر یکها را بهتر بفهمیم بیا بنویسیم.

$$11^2=(10+1)^2$$

$$11^2=11\times11=(10+1)\times(10+1)=10\times10+10\times1+1\times10+1\times1=100+10+10+1=100+20+1$$

$$11^3=11^2\times11=(100+20+1)\times(10+1)$$
$$=1000+100+200+20+10+1$$
$$=1000+300+30+1=1331$$

$$11^4=11^3\times11=(1000+300+30+1)\times(10+1)$$
$$=10{,}000+1000+3000+300+30$$
$$=10{,}000+4000+600+40+1=14641$$

$$11^5=11^4\times11=(10{,}000+4000+600+40+1)\times(10+1)$$
$$=100{,}000+10{,}000+40{,}000+4000+6000+600+400+40+10+1$$
$$=100{,}000+50{,}000+10{,}000+1000+50+1$$
$$=100{,}000+60{,}000+1000+50+1$$
$$=161051$$

می‌بینی چه چیزی کار را خراب کرد ۴۰۰۰+۶۰۰۰ را نباید می‌نوشتیم ۱۰,۰۰۰.

هدی: پیشنهاد من این است که برای اینکه ۱۰ ما با دههایی که مثلاً از ۴+۶ مثل بالا درست می‌شوند اشتباه نشود به‌جای آن بنویسیم x.

در این‌صورت $11=10+1=x+1$

$$11^2=11\times11=(x+1)\times(x+1)$$
$$=x^2+x\times1+1\times x+1\times1$$
$$=x^2+2x+1$$

$$11^3=11^2\times11=(x^2+2x+1)\times(x+1)$$
$$=x^2\times x+x^2\times1+2x\times x+2x\times1+1\times x+1\times1$$
$$=x^3+x^2+2x^2+2x+x+1$$
$$=x^3+3x^2+3x+1$$

$$11^4=11^3\times11=(x^3+3x^2+3x+1)\times(x+1)$$
$$=x^4+x^3+3x^3+3x^2+3x^2+3x+x+1$$
$$=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$$

$$11^5=11^4\times11=(x^4+4x^3+6x^2+4x+1)\times(x+1)$$
$$=x^5+x^4+4x^4+4x^3+6x^3+6x^2+4x^2+4x+x+1$$
$$=x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$$

موفق شدیم! همان ضریبها به‌دست آمد.

۱، ۵، ۱۰، ۱۰، ۵، ۱

خود را بیازماییم

همین کار را برای 11^6 انجام دهید و بررسی کنید که آیا اعداد سطر ششم به‌دست می‌آید یا نه! خواهید دید که هرچه در جدول پایین می‌رویم محاسبات مشکل‌تر می‌شوند. آیا می‌توانید با استدلال نشان دهید که ضرایب $(x+1)^{11}$ مضارب سطر بعد از آخر را در جدول می‌سازند؟

اعداد

در عددنویسی جاری از عدد ۱۰ و توان‌های آن برای نمایش اعداد بزرگ استفاده می‌شود. مثلاً وقتی می‌نویسیم ۱۳۵۷ منظور عدد $1\times(10)^3+3\times(10)^2+5\times(10)^1+7$ می‌باشد. اما بشر همیشه از این نمادها برای عددنویسی استفاده نمی‌کرده است. کسی نمی‌تواند به‌درستی بگوید که بشر چه موقع شمردن را یاد گرفت و شاید هرگز این راز آشکار نشود. باستان‌شناسان به‌ما گفته‌اند که احتمالاً برقراری تناظر یک به یک با استفاده از چوب‌خط، یا توسط انگشتان، یا دسته کردن سنگ‌ریزه یا چوب، یا گره زدن بر یک نخ صورت می‌گرفته است. باستان‌شناسان شواهدی ارائه کرده‌اند که احتمالاً در دوره‌های پیش از تاریخ عدد ۱۲ به‌جای ۱۰ عمدتاً به‌عنوان پایه شمارش مورد استفاده بوده است؛ یعنی به‌جای اینکه دسته‌های ده‌تایی تشکیل دهند، دسته‌های دوازده‌تایی را مبنا درنظر می‌گرفتند. شاید به‌خاطر تعداد تقریبی ماه‌های قمری در یکسال یا شاید به‌دلیل اینکه ۱۲ دارای مقسوم‌علیه‌های زیادی است و این برای اندازه‌گیری مناسب است؛ همچنین شواهدی ارائه کرده‌اند که مبنای ۲۰ که یادآور روزهای پابرهنگی انسان است، دستگاه عددی کاملاً پیشرفته قوم مایا بوده است. قوم مایا برای شمارش از انگشتان دست و پا استفاده می‌کرده‌اند. و یا مقیاس شصتگانی که هنوز هم در اندازه‌گیری زمان و زوایا برحسب دقیقه و ثانیه به‌کار می‌رود، مورد استفادهٔ بابلی‌های باستان بوده است.

انسان‌شناسان در گزارش‌های خود از مطالعات در اقوام بدوی تأیید می‌کنند که اعداد ۲، ۳ و ۴ به‌عنوان پایه‌های عددی یا مبناهای اوّلیه مورد استفاده بوده‌اند. بومیان کوئینزلند چنین می‌شمارند «یک، دو، دو و یک، دو دو، خیلی» و بعضی پیگمه‌های افریقا از اصوات a (آ)، oa (اُ آ)، ua (او آ)، oa-oa (اُ آ اُ آ)، oa-oa-a (اُ آ اُ آ آ) و oa-oa-oa (اُ آ اُ آ اُ آ) برای شمارش اعداد ۱ تا ۶ استفاده می‌کنند. قبیله‌ای از تی‌یرادل‌فوئگو (Tierra del Fuego) برای نام‌های چند عدد نخستین، پایهٔ ۳ را به‌کار می‌برند یعنی می‌گویند یک، دو، سه، سه و یک، سه و دو،... و بعضی قبایل آمریکای جنوبی نیز از مبنای ۴ استفاده می‌کنند.

زبان‌شناسان احتمال می‌دهند که تجرید خاصیت مشترک مجموعه‌های ۲ عضوی مدت زیادی طول کشیده باشد. در زبان انگلیسی آثاری از آن دوران به‌جای مانده است مانند تیم اسب‌ها team of horses و یک جفت گاو yoke of oxen، یک زوج کبک braces of partridge و یک جفت کفش pair of shoes که همه نمادهایی برای عدد ۲ هستند. کلمه‌های نمایندهٔ اعداد در زبان انگلیسی براساس انتخاب ۱۰ به‌عنوان پایه ساخته شده‌اند. اسامی خاص one، two،...، ten را برای اعداد یک، دو،...، ده داریم و وقتی به ۱۱ می‌رسیم می‌گوییم eleven که بنا به گفته زبان‌شناسان از ein lifon، به معنای یکی باقیمانده، یا یک روی ده، مشتق شده است. به‌طور مشابه برای ۱۲، کلمه twelve از twe lif (دو روی ده) گرفته شده است و همین‌طور برای اعداد ۱۳ الی ۱۹. سپس به بیست می‌رسیم twenty که همان twe - tig یا دو ده می‌باشد. در زبان فرانسوی هم کلماتی مانند quatre - vingt چهار بیست به‌جای هشتاد و quatre - vingt - dix چهار بیست ده به‌جای نود به‌کار می‌روند که به کاربرد پایه ۲۰ در دستگاه شمارش اشاره دارند. چنین ریشه‌هایی در زبان‌های گالی Gaelic، دانمارکی و ویلزی Welsh هم یافت می‌شود. گرینلندی‌ها از عبارت «یک مرد» به معنی ۲۰، «دو مرد» به معنی ۴۰ و الی آخر استفاده می‌کنند. در زبان فارسی نیز آثار مبنای شمارش دهدهی در گویش فارسی زبانان مشهود است. مثلاً یازده همان یک و ده و دوازده همان دو و ده است.

تاریخدانان به ما می‌گویند که در تقویم‌های دهقانی آلمانی تا حدود سال ۱۸۰۰ میلادی از مقیاس پنج پنجی استفاده می‌شد. هندی‌ها، مصری‌ها، رومیان و چینی‌ها به روایت تاریخ دستگاه‌های ده دهی را به‌کار می‌برده‌اند. امروزه مبنای ۱۲ را به‌عنوان تعداد اینچ‌های موجود در یک فوت، اونس‌های یک پوند قدیم، پنی‌های یک شیلینگ، تقسیم‌بندی ساعت‌ها و تعداد ماه‌های سال به‌کار می‌برند. در ایران هم از دو جین برای شمارش کالا استفاده می‌کنیم. امروزه دستگاه متریک که در جهان مورد استفاده است از مبنای دهدهی استفاده می‌کند.

۲ــ۱ــ عدد و نماد

ثبت اعداد از اهمیت ویژه‌ای در رشد تمدن بشر برخوردار بوده است. لذا در طول تاریخ هریک از تمدن‌ها نمادهایی به اعداد نسبت دادند.

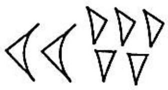
فعالیت

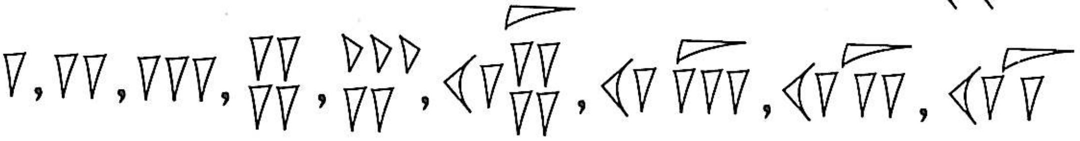
دستگاه عددی نوشتاری بابلیان

بابلیان قدیم، که پاپیروس نداشتند و به سنگ‌های مناسب دسترسی کمی داشتند، برای نوشتن عمدتاً از گل‌رس استفاده می‌کردند. آنان کتیبه را به‌وسیلهٔ فشردن قلمی، که نوک آن به شکل مثلث متساوی‌الساقین تیزی بود، بر یک لوح سفالی گل‌رس مرطوب نقش می‌کردند. با کمی کج کردن قلم از حالت عمودی، این امکان وجود داشت که زاویهٔ رأس یا زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین بر سفال نقش شود که بدین‌ترتیب دو نوع نشانهٔ گوه شکل (میخی) به‌وجود می‌آمد. سپس لوح آماده در کوره‌ای پخته می‌شد تا به درجه‌ای از سختی برسد که در مقابل گذشت زمان مقاوم، و به یک سند دایمی بدل شود. بر روی لوح‌های میخی که به فاصلهٔ زمانی بین ۲۰۰۰ ق.م. تا ۲۰۰ ق.م. تعلق دارند، اعداد کوچکتر از ۶۰ به کمک دستگاه گروه‌بندی ساده‌ای به پایهٔ ۱۰ بیان شده‌اند، و جالب این‌که عمل نوشتن اغلب با استفاده از علامت تفریق ساده شده است. علامت تفریق و علایم به‌کار رفته برای ۱ و ۱۰ از چپ به راست عبارت‌اند از :

که در آن علامت به‌کار رفته برای ۱ و در قسمتی که علامت تفریق را می‌سازند با استفاده از زایهٔ رأس مثلث متساوی‌الساقین به‌دست آمده‌اند، و علامت به‌کار رفته برای ۱۰ با استفاده از یکی از زوایای مجاور به قاعده حاصل شده است. به‌عنوان مثالهایی از اعداد نوشتاری که از این علایم در آن‌ها استفاده شده، داریم :

۳۸ = ۴۰ − ۲ = 

۲۵ = ۲(۱۰) + ۵ = 

اعداد 

را در خانه‌های مربع زیر چنان بچینید که مجموع اعداد روی هر سطر و هر ستون و هر قطر برابر باشد.

شهریار و پارسا به معماهای عددی علاقه دارند و سعی می‌کنند با چنین مسائلی قوّه خلاقیت خود را به کار بیاندازند.

شهریار : من قبلاً مسائلی مانند این دیده‌ام. به این معماها «مربع وفقی» می‌گویند. مثلاً می‌توان اعداد ۱ تا ۱۶ را در یک مربع ۴×۴ نوشت به طوری که مجموع اعداد در هر سطر و ستون و قطر برابر باشد.

پارسا : اینجا هم اعداد ۱ تا ۹ را باید در یک مربع ۳×۳ بنویسیم به‌طوری که مجموع اعداد هر سطر و ستون و دو قطر برابر باشد. بگذار باسه عدد تصادفی شروع کنیم بلکه الگویی بیابیم. مثلاً اگر ۷ و ۸ و ۹ در یک سطر باشند. مجموع اعداد هر سطر و ستون باید برابر ۲۴ باشد.

۷	۸	۹

شهریار : این امکان ندارد. چون فقط همین سه عدد بین اعداد ۱ تا ۹ می‌توانند مجموع ۲۴ داشته باشند. باید اعدادی انتخاب کرد که مجموع هر سطر کوچکتر از ۲۴ باشد.

پارسا : بیا حساب کنیم در صورت جواب داشتن مسئله مجموع اعداد هر سطر چقدر است.

اگر یک مربع وفقی ۳×۳ داشته باشیم که در آن اعداد ۱ تا ۹ چیده شده‌اند، مجموع اعدادی که در سه سطر مربع هستند برابر مجموع اعداد ۱ تا ۹ است، چون مربع با اعداد ۱ تا ۹ پر شده است.

$$۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹=۴۵$$

امّا مجموع اعداد هر سطر با سطرهای دیگر برابر است.

پس مجموع اعداد هر سطر $\frac{۴۵}{۳}$ است.

شهریار : مثلاً ۱۵=۶+۵+۴ . بیا جدول را با این اعداد پر کنیم.

۴	۵	۶

پارسا : در این صورت ۴ با دو عدد دیگر باید ۱۵ بشود.

$$۴+\boxed{}+\boxed{}=۱۵$$

مثلاً می‌توانیم داشته باشیم ۱۵=۴+۷+۴ که در این صورت عدد ۴ باید تکرار شود که ممکن نیست. پس ۱۵=۳+۸+۴ و ۱۵=۲+۹+۴ تنها جوابهای ممکن هستند. چون درغیر این صورت مجموع برابر ۱۵ نمی‌شود.

شهریار : همین سؤال را در مورد ۵ می‌پرسم.

$$۵+\boxed{}+\boxed{}=۱۵$$

۵+۷+۳=۱۵

۵+۸+۲=۱۵

۵+۹+۱=۱۵

فقط سه جواب بالا به‌دست می‌آید. بیا ۱۵=۳+۸+۴ را انتخاب کنیم با ۱۵=۱+۹+۵ تا ارقام تکراری نداشته باشیم.

۴	۵	۶
۸	۹	
۳	۱	

پارسا : این جدول اشکال دارد. مجموع اعداد سطر دوم بیشتر از ۱۵ می‌شود. بهتر است این‌طور بنویسی.

۴	۵	۶
۸	۱	
۳	۹	

شهریار : این هم ممکن نیست. چون اگر جدول را کامل کنیم اعداد تکراری خواهیم داشت.

۴	۵	۶
۸	۱	۶
۳	۹	۳

پارسا : من یک ایده دارم. هر عدد که در جدول هست در یک سطر و یک ستون یا حداکثر یک قطر قرار دارد. به جز عددی که وسط جدول قرار می‌گیرد که هم در یک سطر و یک ستون و هم در دو قطر قرار دارد. پس عددی که در مرکز جدول می‌نویسیم باید بیشتر از سایر اعداد مجموع ۱۵ را درست کند...

فعالیت

نمایش اعداد به روش رومی

در این‌جا به علایم اصلی I، X، C، M برای ۱، ۱۰، $۱۰^۲$، $۱۰^۳$، علایم V، L و D برای ۵، ۵۰ و ۵۰۰ افزوده می‌شوند. اصل تفریق، که مطابق آن، وقتی علامتی برای واحد کوچک‌تر قبل از علامت به‌کار رفته برای واحد بزرگ‌تر قرار گیرد، معنی تفاضل این دو واحد را دارد، فقط به‌ندرت در دوره‌های باستان و میانه به‌کار می‌رفت. استفادهٔ کامل‌تر این اصل در اعصار جدید معمول گردید. به‌عنوان مثال، در این دستگاه داریم

۱۹۴۴ = MDCCCCXXXXIIII

محاسبات زیر را بدون کمک گرفتن از سایر نمادهای نمایش اعداد انجام دهید.

CCC + VII =

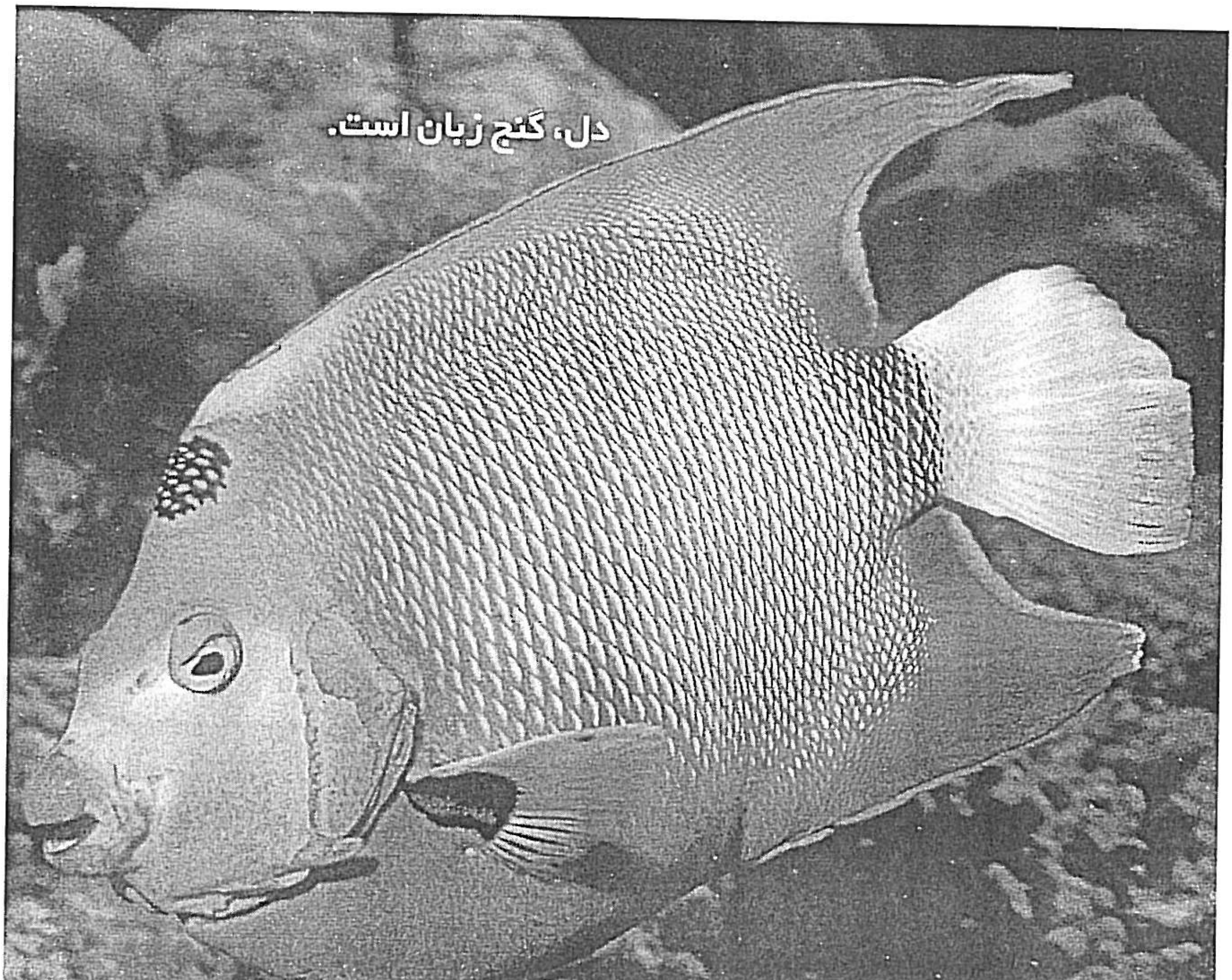
M − L =

MMII − MCCCLXXXI =

رومیان در اعصار جدیدتر، با متداول شدن اصل تفریق، عدد ۱۹۴۴ را چنین نمایش دادند :

۱۹۴۴ = MCMXLIV

امروزه اعداد رومی برای عددگذاری صفحات مقدمهٔ کتاب‌های انگلیسی و عددگذاری بخش‌ها یا زیر بخش‌های این کتاب‌ها استفاده می‌شوند. اعداد رومی ۱ تا ۱۰ که امروزه بیشتر از سایر اعداد رومی استفاده می‌شوند، این‌طور نمایش داده می‌شوند : I، II، III، IV، V، VI، VII، VIII، IX، X



دستگاه شمارش سنتی ژاپنی

در دستگاه شمارش سنتی ژاپنی برای ارقام ۱ تا ۹ و اعداد ۱۰، ۱۰۰ و ۱۰۰۰ نمادهایی درنظر گرفته شده و هر عدد با نمایش عمودی و زیر هم این نمادها نمایش داده می‌شود. در زیر نمادهای مربوط به این ارقام و اعداد آمده است.

مثال: ۵۶۲۵

۱	一	۱۰	十	五
۲	二	$۱۰^۲$	百	千
۳	三	$۱۰^۳$	千	六
۴	四			百
۵	五			二
۶	六			十
۷	七			五
۸	八			
۹	九			

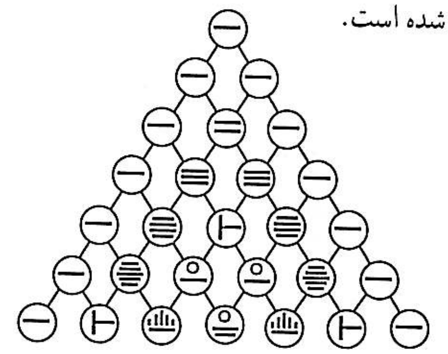
خود را بیازماییم

نمایش عدد ۵۶۲۵ در ستون سمت راست دیده می‌شود.
آیا می‌توانید از روی این مثال روش ژاپنی را برای نمایش اعداد حدس بزنید؟

نمایش اعداد به روش چینی

خود را بیازماییم

این نمودار در یک کتاب چینی که ۷۰۰ سال پیش نوشته شده پیدا شده است.



آیا می‌توانید بگویید عدد ۲۰ در نمادهای چینی به چه روشی نشان داده می‌شود؟

حروف ابجد و نمایش اعداد با نماد ابجد

ملت‌های عرب زبان نیز، قبل از قبول دستگاه دهدهی امروزی، نمادها و قانون‌های خاصی برای نمایش عددها داشته‌اند.
نمادهایی که به‌کار می‌بردند چنین است:

ا	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ی
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
ک	ل	م	ن	س	ع	ف	ص		
۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰		
ق	ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ	غ
۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰	۷۰۰	۸۰۰	۹۰۰	۱۰۰۰

قانون‌های دستگاه عددنویسی آنان به شرح زیر بوده است:

- هر حرف که در سمت چپ حرف دیگر نوشته می‌شود، چنان‌چه مقدارش از آن حرف کم‌تر باشد، ارزش آن حرف را زیاد می‌کند: ید (ی، د) = ۱۰ + ۴ = ۱۴؛ مب (م، ب) = ۴۰ + ۲ = ۴۲؛
قیه (ق، ی، هـ) = ۱۰۰ + ۱۰ + ۵ = ۱۱۵؛
قه (ق، هـ) = ۱۰۰ + ۵ = ۱۰۵

- هر حرف یا ترکیبی از آن‌ها که در سمت راست علامت هزار نوشته می‌شود، ارزش آن را چند برابر می‌کند مثلاً:
دغ (د، غ) = ۴×۱۰۰۰ = ۴۰۰۰
بغ (ب، غ) = ۲×۱۰۰۰ = ۲۰۰۰

همان‌طور که می‌بینید در این دستگاه عددنویسی نیز رقم صفر وجود نداشته است.

عرب‌ها برای آن‌که ترتیب حروف و عددی را که به آن منسوب است فراموش نکنند، از حروف فوق کلماتی ساخته بودند و به آن‌ها حروف ابجد می‌گفتند:

اَبْجَدْ   هَوَّزْ   حُطّی   کَلِمَنْ
سَعْفَصْ   قَرَشَتْ   ثَخِذْ   ضَظِغْ

و با حفظ کردن این کلمه‌ها، عددهای منسوب به آن‌ها را چنین یادآوری می‌کردند:

۹ حرف اول به‌ترتیب برابرند با عددهای از ۱ تا ۹
۹ حرف دوم به‌ترتیب برابرند با مضرب‌های ۱۰، از ۱۰ تا ۹۰
۹ حرف سوم به‌ترتیب برابرند با مضرب‌های ۱۰۰، از ۱۰۰ تا ۹۰۰
و حرف آخر برابر است با ۱۰۰۰

به‌نظر شما عددنویسی با حروف ابجد آسان‌تر است یا در دستگاه دهدهی؟

عددنویسی در مبنای دلخواه

هر یک از تمدنها برای ثبت اعداد بزرگ چاره‌ای جستند. امّا هنوز هم مانعی جدی در برابر پیشرفت علم حساب وجود داشت و آن عبارت بود از نبودن ذخیره‌ای فراوان و مناسب از مادهٔ مطلوبی که بتوان روی آن نوشت. بشر سرانجام راه‌حلی برای این مشکل پیدا کرد و آن اختراع چرتکه بود که می‌توان آن را قدیمی‌ترین ابزار مکانیکی برای محاسبه خواند که توسط نوع بشر به‌کار رفته است.

دستگاه شمارش دهدهی نیز با فراوان شدن کاغذ رواج یافت.

در این دستگاه برای جمع و تفریق الگوریتم‌هایی تعبیه شده بود که محاسبات ذهنی را آسان می‌کرد. طی ۴۰۰ سال پس از آن بین طرفداران این الگوریتم‌ها و طرفداران چرتکه نزاع‌هایی درگرفت تا این‌که سرانجام قواعد کنونی ما در محاسبات چیرگی یافتند.

در دستگاه عددنویسی ما برای نمایش عدد در مبنای $b = ۱۰$ به نمادهایی برای ارقام صفر تا نه احتیاج داریم و برای نمایش عدد، ارقام یکان، دهگان، صدگان، هزارگان و غیره را به‌ترتیب از راست به چپ قرار می‌دهیم. مثلاً نمایش ۱۳۵۷ نماینده ۷ یکان، ۵ دهگان، ۳ صدگان و ۱ هزارگان است.

$$۱۳۵۷ = ۱\times ۱۰^{۳} + ۳\times ۱۰^{۲} + ۵\times ۱۰ + ۷$$

در این دستگاه عددی ابتدا با شمارنده‌ها دسته‌های ده‌تایی

یکان	دهگان	صدگان	هزارگان
۷	۵	۳	۱

تشکیل می‌دهیم. چند شمارندهٔ باقیمانده رقم یکان را تشکیل می‌دهند. سپس دسته‌های ده‌تایی را در دسته‌های بزرگتر ده‌تایی قرار می‌دهیم تا بسته‌هایی ۱۰۰ تایی تشکیل شوند. تعداد دسته‌های ده‌تایی باقیمانده رقم دهگان را تشکیل می‌دهند. سپس با کنار هم گذاشتن ده بستهٔ ۱۰۰ تایی، بسته‌های هزارتایی تشکیل می‌دهیم و همین‌طور الی آخر.

اندیشه برای دسته‌بندی ۱۳۵۷ به دسته‌های پنج تایی چنین

فعالیت

عدد ۱۳۵۷ را با تشکیل دسته‌های پنج‌تایی به‌جای ۱۰ تایی درجدول زیر نمایش دهید.

یکان	پنج‌گان	۲۵ـ گان	۱۲۵ـ گان	۶۲۵ـ گان

عمل کرد : برای اینکه ببینیم چند دسته ۵ تایی داریم باید تقسیم کنیم.

$$
\begin{array}{r|l}
۱۳۵۷ & ۵ \\ \hline
۱۰ & ۲۷۱ \\
۳۵ & \\
۳۵ & \\
۷ & \\
۵ & \\
۲ &
\end{array}
$$

می‌بینیم که ۲۷۱ دسته ۵ تایی داریم. می‌توان این دسته‌ها را ۵ تا ۵ تا کنار هم چید تا دسته‌های ۲۵ تایی درست شود. اما چند دسته ۲۵ تایی می‌توان تشکیل داد؟

$$
\begin{array}{r|l}
۲۷۱ & ۵ \\ \hline
۲۵ & ۵۴ \\
۲۱ & \\
۲۰ & \\
۱ &
\end{array}
$$

۵۴ دستهٔ ۲۵ تایی داریم که هر کدام از ۵ دستهٔ ۵ تایی تشکیل شده‌اند و یک بسته ۵ تایی هم اضافه مانده است. از این دسته‌های ۲۵ تایی می‌توان دسته‌های ۱۲۵ تایی ساخت. کافی است ۵ تا از این دسته‌های ۲۵ تایی را کنار هم بگذاریم. اما چند دستهٔ ۱۲۵ تایی می‌توان ساخت؟

$$
\begin{array}{r|l}
۵۴ & ۵ \\ \hline
۵ & ۱۰ \\
۴ & \\
۰ & \\
۴ &
\end{array}
$$

۱۰ دستهٔ ۱۲۵ تایی داریم و چهار بستهٔ ۲۵ تایی می‌ماند. اگر اینها را هم ۵ تا ۵ تا کنار هم بگذاریم دو دستهٔ ۶۲۵ تایی تشکیل می‌شود. پس روی هم دو دستهٔ ۶۲۵ تایی و ۴ بستهٔ ۲۵ تایی و یک دستهٔ ۵تایی و ۲ یکی داریم.

$$۲\times۶۲۵+۴\times۲۵+۱\times۵+۲=۱۳۵۷$$

برای نمایش اعداد در پایه $b=۱۲$ می‌توان به‌جای اعداد ده، یازده و دوازده نمادهای هـ و ی و د را جایگزین نمود. مثلاً نمایش $(۹۵۱)_{۱۲}$ نماینده ۱یکان، ۵ دوازده‌گان و ۹ صد و چهل و چهارگان است.

$$
\begin{aligned}
(۹۵۱)_{۱۲} &= ۹\times۱۲^{۲}+۵\times۱۲^{۱}+۱\\
&=۹\times۱۴۴+۵\times۱۲+۱\\
&=۱۲۹۶+۶۰+۱=۱۳۵۷
\end{aligned}
$$

به این روش می‌توان هر عدد را در مبنای ۱۲ به نمایش گذاشت.

برای نمایش اعداد در پایه $b=۱۶$ می‌توان به‌جای اعداد ده، یازده، دوازده، سیزده، چهارده و پانزده به‌ترتیب نمادهای هـ، ی، د، س، چ، پ را به‌کار برد. مثلاً نمایش $(\text{س}۵۴)_{۱۶}$ نماینده ۱۳ یکان و ۴ شانزده‌گان و ۵ دویست و پنجاه و شش‌گان است.

$$
\begin{aligned}
(\text{س}۵۴)_{۱۶} &= ۵\times۱۶^{۲}+۴\times۱۶^{۱}+\text{س}\\
&=۵\times۲۵۶+۴\times۱۶+۱۳\\
&=۱۲۸۰+۶۴+۱۳\\
&=۱۳۵۷
\end{aligned}
$$

اگر بخواهیم عدد ۱۳۵۷ را در مبنای ۸ به نمایش بگذاریم باید بدانیم در آن چند یکی و چند هشت‌تایی و چند ۶۴ تایی و چند ۵۱۲ تایی هست تا یکان، هشتگان، شصت و چهارگان و پانصد و دوازده‌گان نمایش عدد را به‌دست بیاوریم.

$$
\begin{aligned}
۱۳۵۷&=۲\times۵۱۲+۳۳۳\\
۳۳۳&=۵\times۶۴+۱۳\\
۱۳&=۱\times۸+۵\\
۵&=۵\times۱
\end{aligned}
$$

پس نمایش $(۲۵۱۵)_{۸}$ برای عدد ۱۳۵۷ به‌دست می‌آید.

برای نمایش در پایهٔ $b=۲$ چنین عمل می‌کنیم :

$$
\begin{aligned}
۱۳۵۷&=۱\times۱۰۲۴+۳۳۳\\
۳۳۳&=۰\times۵۱۲+۳۳۳\\
۳۳۳&=۱\times۲۵۶+۷۷\\
۷۷&=۰\times۱۲۸+۷۷\\
۷۷&=۱\times۶۴+۱۳\\
۱۳&=۰\times۳۲+۱۳\\
۱۳&=۰\times۱۶+۱۳\\
۱۳&=۱\times۸+۵\\
۵&=۱\times۴+۱\\
۱&=۰\times۲+۱\\
۱&=۱\times۱
\end{aligned}
$$

پس نمایش $(۱۰۱۰۱۰۰۱۱۰۱)_{۲}$ برای عدد ۱۳۵۷ به‌دست می‌آید.

خود را بیازماییم

قاعده‌ای بیابید که به‌وسیله آن بتوان یک عدد در مبنای ۱۶ را بدون استفاده از مبنای ۱۰ به‌مبنای ۲ برد.

خود را بیازماییم

قاعده‌ای بیابید که به‌وسیله آن بتوان یک عدد در مبنای ۱۶ را بدون استفاده از مبنای ۱۰ به‌مبنای ۸ برد.

خود را بیازماییم

وانمود کنید که در محاسبات مبنای ۲ از همان الگوریتم‌های محاسبات ده‌دهی استفاده می‌کنید. جز این‌که به‌جای ده بر یک دو بر یک می‌کنید یا به‌جای قرض گرفتن یک ده‌تایی یک دوتایی قرض می‌گیرید و با این روش محاسبات زیر را در مبنای ۲ انجام دهید :

$$\begin{pmatrix} 11011 \\ 1101 \end{pmatrix}_2^{\times} \qquad \begin{pmatrix} 1010 \\ 101 \end{pmatrix}_2^{-} \qquad \begin{pmatrix} 101 \\ 111 \end{pmatrix}_2^{+}$$

سپس برای نشان دادن صحت الگوریتم‌هایی که به‌کار می‌برید در مبنای ۲ دلیل بیاورید.

خود را بیازماییم

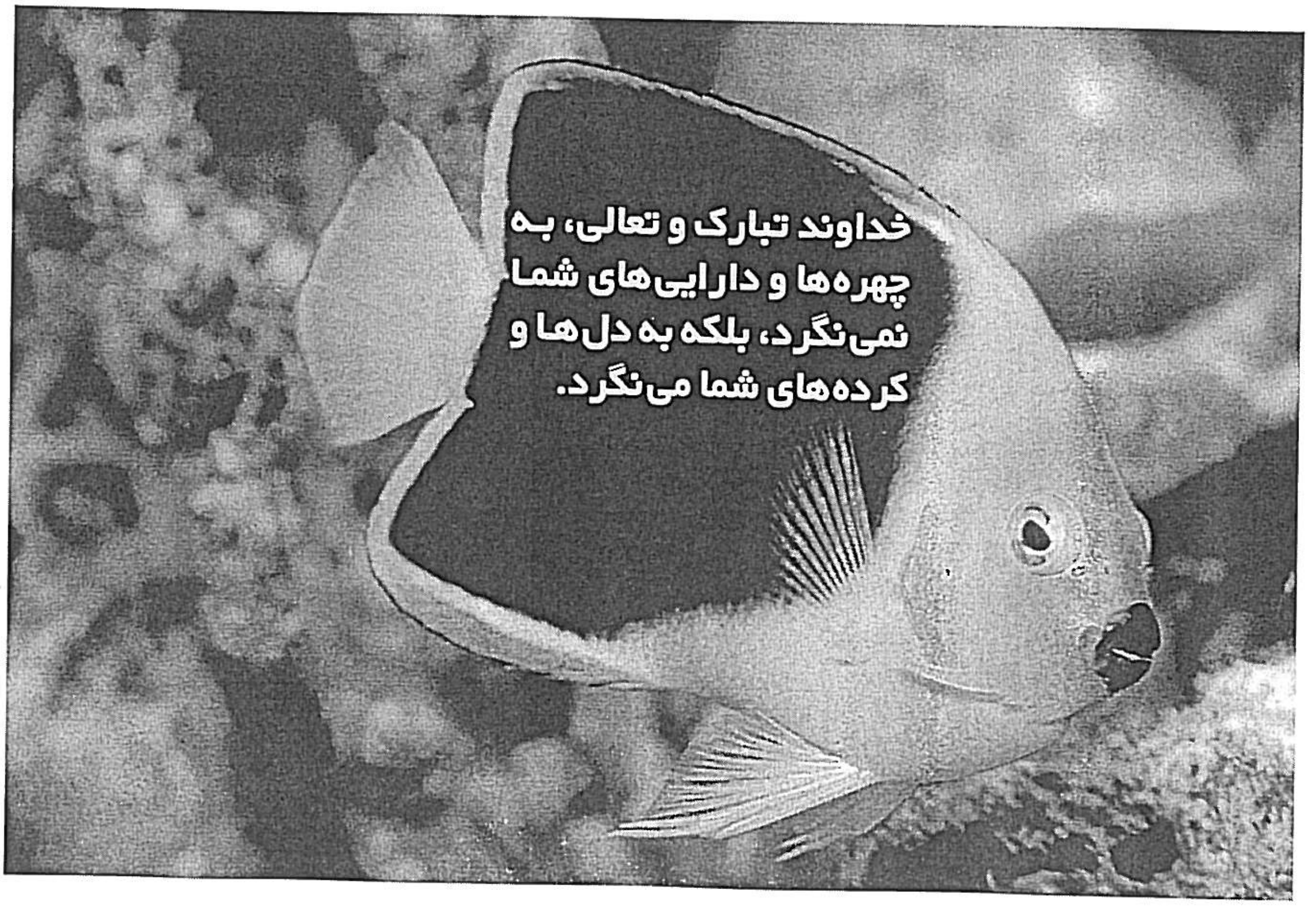
قاعده‌ای بیابید که به‌وسیله آن بتوان یک عدد در مبنای ۸ را بدون استفاده از مبنای ۱۰ به‌مبنای ۱۶ برد.

فعالیت

نمایش شصتگانی اعداد از دیرباز کاربرد داشته است. امروزه هم برای نمایش زمان‌های کوچک‌تر از واحد به‌کار می‌رود. واحد ساعت به ۶۰ قسمت مساوی که هرکدام یک دقیقه است و دقیقه به ۶۰ قسمت مساوی که هرکدام یک ثانیه است تقسیم می‌شود. یک ساعت و پنج دقیقه و بیست و هفت ثانیه را می‌نویسیم $1\ 5'\ 27''$

محاسبات روبرو را با همین نمادها انجام دهید.

$$\begin{array}{r} 1\ \ 5'\ \ 27'' \\ +\ 2\ \ 57'\ \ 11'' \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\ \ 15'\ \ 29'' \\ -\ 1\ \ 20'\ \ 19'' \\ \hline \end{array}$$



۲ــ۲ــ نماد علمی

فعالیت

فرض کنید می‌خواهید قطعه کاغذ را چندین بار به دو نیمه تا کنید تا بتوانید اسامی شاگردان کلاس خود را روی هر یک از نواحی تشکیل شده بنویسید. در هر ناحیه تنها می‌توان نام یک نفر را نوشت، اما می‌توان بعضی نواحی را خالی گذاشت. برای این کار لازم است چند بار کاغذ را تا کنیم؟

فرض کنید قطعه بسیار نازکی از کاغذ داریم که می‌توانیم آن را چندین بار تا کنیم. با ۱۰ بار تا کردن این کاغذ چند ناحیه تشکیل می‌شود؟ آیا تعداد این نواحی برای نوشتن نام همهٔ دانش‌آموزان مدرسهٔ شما کافی است؟

لاله و لیلا نمی‌دانستند از کجا باید شروع کنند. برای همین سعی کردند از خود سؤالاتی در مورد مسئله بپرسند.

لاله : می‌توانستیم از خود بپرسیم که با یک‌بار تا کردن کاغذ چه اتفاقی می‌افتد؟ چند ناحیه تشکیل می‌شود؟ با دو بار تا کردن چطور؟ با سه بار تا کردن چطور؟

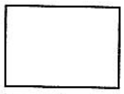
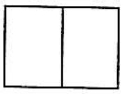
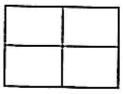
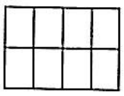
لیلا : می‌توانیم تصویری از کاغذ درهر مرحله رسم کنیم و تعداد ناحیه‌ها را بشماریم. بعد ببینیم که در تعداد این ناحیه‌ها الگویی پیدا می‌کنیم یا نه!

لاله : قبل از تا کردن تنها یک ناحیه داریم. می‌توانیم جدولی از تعداد نواحی و تصویر کاغذ تا شده به شکل روبرو بکشیم.

لیلا : همهٔ این اعداد زوج هستند. اما همهٔ اعداد زوج اینجا نمایش داده نشده‌اند. مثلاً ۶ و ۱۰ نمی‌توانند تعداد نواحی تشکیل شده باشند.

لاله : تعداد نواحی خیلی سریع رشد می‌کند. هر بار که کاغذ را تا می‌کنیم همهٔ نواحی به دو قسمت تقسیم می‌شوند. بنابراین تعداد همهٔ نواحی دو برابر می‌شود.

لیلا : درست است. این الگویی که گفتی همیشه صادق است. بدون این الگو نمی‌توانستیم بگوییم با چند بار تا کردن می‌توان اسم همهٔ شاگردان کلاس را روی کاغذ نوشت. چون کاغذ را به سختی می‌توان چندین بار تا کرد و عملاً همیشه نمی‌توان تعداد نواحی را با تا کردن کاغذ شمرد.

مدل کاغذ تاشده	تعداد نواحی	تعداد تا کردن
	۱	۰
	۲	۱
	۴	۲
	۸	۳
	۱۶	۴

کپلر : آقای گالیله، من هم مانند شما از طرفداران پرشور کوپرنیک هستم. درواقع اولین اثری که در تأیید نظریه کوپرنیک نوشته شده کتاب «اسرار کیهانی» من بوده است.

گالیله : دوست عزیزم، آقای کپلر، باید بگویم که شهامت شما را در پایه‌گذاری یک نظریه کیهانی خورشید ــ مرکز تحسین می‌کنم. به‌علاوه شما در به‌کارگیری محاسبات ریاضی به روشی نوین در اخترشناسی پیش‌قدم بوده‌اید. قوانین سه‌گانه‌ای که در مورد حرکت سیارات به شما نسبت داده شده از بزرگ‌ترین موفقیت‌های بشر در اخترشناسی است. توجه داشته باشید که در تأیید نظریه کوپرنیک من دو برگ برنده به پروندهٔ آن افزوده‌ام. اولی مربوط به تغییرات سالانه مسیر حرکت لکه‌های خورشیدی است که نمی‌توان آن را با ثابت بودن زمین سازگار کرد و دیگری جذر و مد اقیانوسی که تبیین آن بدون متحرک بودن زمین ناممکن است.

کپلر : آیا علاقه‌مند هستید در مورد محاسبات ریاضی خودم توضیحاتی بدهم.

گالیله : یقیناً

کپلر : زمانی که نزد توکو براهه شاگردی می‌کردم، طول‌های جغرافیایی مریخ را به مراتب بهتر از پیشینیانم محاسبه کردم. به‌زودی دریافتم که از پیش‌بینی درست عرض‌های جغرافیایی کره مریخ ناتوان هستم. بررسی‌هایم در این زمینه به دومین قانون حرکتم انجامید. کمی بعد توجه کردم که مدار مریخ دایره‌ای نیست، اما تعیین شکل دقیق آن چند سالی به‌طول انجامید که منجر به کشف چند قانون مهمّ فیزیکی شد. رصدهایی را هم در مورد مشتری انجام دادم.

گالیله : من هم تحقیقاتی در مورد تعیین طول جغرافیایی در دریا انجام داده‌ام. به‌نظر می‌رسد شما در محاسبات خود با اعداد نجومی سروکار دارید، ولی من بیش‌تر با اعداد زمینی! سعی من در این است که روش‌های ریاضی را که شما اولین بار در شناخت حرکت اجرام آسمانی به‌کار بردید در شناخت طبیعت اطرافمان به‌کار ببرم و برای این‌کار باید با اعداد کوچک‌تری کار کنم. دوست دارم چند نمونه از اعدادی که شما منجمان با آن‌ها کار می‌کنید بدانم.

کپلر : چند مثال جالب که محاسبه کرده‌ام، تصور خوبی از فاصله‌های نجومی به شما خواهد داد. توجه کنید که نمایش اعداد بسیار بزرگ به دقتی که به‌طور روزمره در نمایش اعداد به‌کار می‌بریم ممکن نیست. معمولاً منجمان اعداد بزرگ را به‌طور تقریبی با تعداد رقمها و یک یا دو رقم سمت چپ نمایش دهدهی این اعداد نمایش می‌دهند. مثلاً فاصله ما تا نزدیک‌ترین کهکشان ۲×۱۰^{۲۲} متر است و شعاع کهکشان ما ۶×۱۰^{۱۹} متر. هم‌چنین فاصله، تا نزدیک‌ترین ستاره در کهکشان ما $۴/۳\times ۱۰^{۱۶}$ متر می‌باشد. شعاع متوسط دورترین سیارات را هنوز محاسبه نکرده‌ام، ولی باید از مرتبه $۱۰^{۱۲}$ باشد. شعاع خورشید $۶/۹\times ۱۰^{۸}$ متر و شعاع زمین $۶/۴\times ۱۰^{۶}$ متر است.

گالیله خنده‌کنان گفت :جالب است!پس عددهای بزرگ را فقط با تعداد صفرهایشان بیان می‌کنند! خوب بد نیست من هم چند عدد زمینی را به همین روش شما یادآوری می‌کنم. مثلاً ارتفاع بلندترین قله زمین $۸/۹\times ۱۰^{۳}$ متر،قد یک انسان معمولی $۱/۸\times ۱۰$ متر و ضخامت یک صفحه کتاب یک دهم میلی‌متر است.

کپلر :می‌بینید که چه‌قدر راحت می‌توان با این نمادگذاری طول‌ها را با هم مقایسه کرد. این‌طور اعداد نجومی را بهتر می‌فهمم.

خود را بیازماییم

یک‌دهم میلی‌متر یک ده هزارم متر است. آیا می‌توانید یک ده هزارم متر را به شکل $۱\times ۱۰^{?}$ بنویسید؟

فعالیت

توان‌های طبیعی

در ضرب توانهای طبیعی قوانین زیر صادقند : فرض کنید n,m اعداد طبیعی باشند و a عددی طبیعی باشد.

مثال

$$a^m a^n = a^{m+n} \qquad ۱۰^{۲} \times ۱۰^{۳} = (۱۰\times۱۰)\times(۱۰\times۱۰\times۱۰) = ۱۰^{۲+۳}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad (۱۰^{۳})^{۲} = (۱۰\times۱۰\times۱۰)\times(۱۰\times۱۰\times۱۰) = ۱۰^{۶}$$

$$(ab)^n = a^n b^n \qquad (۲\times۱۰)^{۳} = (۲\times۱۰)\times(۲\times۱۰)\times(۲\times۱۰)$$

$$= (۲\times۲\times۲)\times(۱۰\times۱۰\times۱۰) = ۲^{۳}\times۱۰^{۳}$$

توان‌های صحیح

می‌خواهیم برای عدد طبیعی a تعریف نماد a^m را به توانهای منفی m چنان توسعه دهیم که با فرض $a \neq ۰$ اگر n,m اعداد صحیح باشند، همواره داشته باشیم.

$$a^m.a^n = a^{m+n}, \qquad (a^m)^n = a^{mn}$$

مثلاً می‌خواهیم همهٔ روابط زیر برقرار باشند

$$a^{-۴}.a^{۵} = a^{۱}$$

$$a^{۳}.a^{-۴} = a^{-۱} \qquad a^{-۳}.a^{-۲} = a^{-۵}$$

$$a^{۳}.a^{۰} = a^{۳} \qquad a^{۳}.a^{-۳} = a^{۰} \qquad a^{-۲}.a^{۰} = a^{-۲}$$

۱ــ $a^{۰}$ را چه‌طور تعریف می‌کنید تا برای هر $a \neq ۰$ و m داشته باشیم $a^m.a^{۰} = a^m$

۲ــ با توجه به تعریفی که در سؤال قبل ارائه کردید $a^{-۱}$ را چه‌طور تعریف می‌کنید تا برای هر a داشته باشیم.

$$a^{۱}.a^{-۱} = a^{۰}$$

۳ــ با توجه به تعریفی که در سؤال قبل ارائه کردید a^{-m} را چه‌طور تعریف می‌کنید تا برای هر m طبیعی داشته باشیم.

$$a^{-m} = (a^m)^{-۱}$$

۴ــ تعریف خود از a^m برای m صحیح را بنویسید و استدلال بیاورید که $a^m.a^n = a^{m+n}$ و $(a^m)^n = a^{mn}$ و $(ab)^n = a^n b^n$ برای هر m و n صحیح برقرارند.

حمید همیشه برای بررسی صحت درستی یک فرمول ابتدا یک حالت خاص را بررسی می‌کند.

حمید: برای $a \neq 0$ و $m = 3$ و $n = -2$ درستی تساوی‌های زیر را بررسی می‌کنیم

۱) $a^m a^n = a^{m+n}$ ۲) $(a^m)^n = a^{mn}$

حدس من این است که باید برای m طبیعی a^{-m} را تعریف کنیم $\frac{1}{a^m}$.

بنابر تعریفی که از توان منفی داریم

$$a^3 \times a^{-2} = a^3 \times \frac{1}{a^2} = a$$

$$a^{3+(-2)} = a^{3-2} = a$$

پس داریم $a^3 \times a^{-2} = a^{3+(-2)}$

بنابر تعریفی که از توان منفی داریم

$$(a^3)^{-2} = \frac{1}{(a^3)^2} = \frac{1}{a^6} = a^{-6}$$

$$a^{3\times(-2)} = a^{-6} = \frac{1}{a^6}$$

پس داریم $(a^3)^{-2} = a^{3\times(-2)}$

آیا استدلالهای حمید آنچه را می‌خواستیم ثابت می‌کند؟

خود را بیازماییم: فرض کنید $a \neq 0$. برای هر زوج داده شده از n,m، صحت $a^m . a^n = a^{m+n}$ و $(a^m)^n = a^{mn}$ را بررسی کنید.

۱) $m = -2 \,,\, n = -3$ ۲) $m = -3 \,,\, n = 0$

خود را بیازماییم: جملات زیر را ساده کنید و به‌صورتی خالی از توان منفی یا توان صفر درآورید

۱) $a^{-2} \times a^5$ ۲) $a^3 \times a^{-3}$

۳) $x^{-6} \times x^{-4}$ ۴) $(a^{-2})^{-1}$

۵) $(ab^{-1})^{-3}$ ۶) $x^0 \times x^{-2}$

فعالیت

اگر $a \neq 0$ و m,n اعداد طبیعی باشند روابط زیر را داریم.

$a^m \div a^n = a^{m-n}$ برای $m > n$

$a^m \div a^n = 1$ برای $m = n$

$a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$ برای $m < n$

نشان دهید نماد توانهای صحیح a^{m-n} می‌تواند هر سه تساوی را به شکل یک تساوی خلاصه کند.

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

خود را بیازماییم

جملات زیر را به شکل a^n بنویسید

۱) $\frac{1}{a}$ ۲) ۱

۳) $\frac{1}{a^7}$ ۴) $\frac{1}{a^{17}}$

خود را بیازماییم

جملات زیر را ساده کنید و نتیجه را به‌صورتی خالی از توان منفی یا توان صفر درآورید.

۱) $x^0 \div x^{-2}$ ۲) $a^{-5} \div a^3$

۴) $a^5 \div a^8$ ۳) $x^2 \div x^0$

خود را بیازماییم

مقدار جملات زیر را پیدا کنید.

۱) 2^{-3} ۲) $0/5^0$

۳) $(-7)^{-2}$ ۴) 10^{-5}

فعالیت

نماد علمی

اعداد بسیار بزرگ و بسیار کوچک که در فیزیک و دیگر علوم به‌کار می‌روند معمولاً با کمک نماد توان نمایش داده می‌شوند. مثلاً یک سال نوری، فاصله‌ای که نور در یک سال می‌پیماید، تقریباً $۹/۵\times۱۰^{۱۵}$ متر است و جرم یک الکترون تقریباً $۹/۱\times۱۰^{-۲۸}$ گرم است.

ــ اگر جرم اتم هیدروژن $۱/۷\times۱۰^{-۲۴}$ باشد، تقریباً چند برابر جرم الکترون است؟

ــ شعاع کهکشان ما تقریباً چند برابر فاصله ما تا نزدیک‌ترین ستاره در کهکشان ماست؟

ــ شعاع خورشید تقریباً چند برابر شعاع زمین است؟

ــ یک دانشمند باید چند صفحه کتاب بنویسد تا ضخامت نوشته‌هایش به اندازهٔ قد خودش برسد؟ آیا چنین دانشمندی می‌شناسید؟

ــ یک کوهنورد باید چند برابر قد خود بالا برود تا بلندترین قله زمین را فتح کند؟

ــ به محیط اطراف خود نظاره کنید و طولها، سطوح، حجمها، زمانها و وزن‌ها را در ذهن خود به‌طور تخمینی مقایسه کنید.

گالیله : آقای کپلر، باید در مورد تحقیقات من در مورد جرم اجسام چیزی شنیده باشید. بگذارید چند عدد زمینی در مورد جرم بگویم. جرم ذرهٔ گرد و خاک $۶/۷\times۱۰^{-۱۰}$ کیلوگرم و جرم دانهٔ انگور $۳/۰\times۱۰^{-۳}$ کیلوگرم و جرم انسان معمولی به‌طور متوسط $۵/۹\times۱۰^{۱}$ کیلوگرم می‌باشد. جرم یک فیل $۴/۵\times۱۰^{۳}$ کیلوگرم و جرم یک کشتی اقیانوس‌پیما $۷/۲\times۱۰^{۷}$ کیلوگرم می‌باشد. جرم آب اقیانوسها را می‌توانی حدس بزنی؟ باید به اعداد نجومی شما نزدیک باشد.

کپلر : حتی تصورش هم برایم ممکن نیست.

گالیله : $۱/۴\times۱۰^{۲۱}$ کیلوگرم!

کپلر : باور نکردنی است! جرم ماه $۷/۴\times۱۰^{۲۲}$ کیلوگرم است و تقریباً پنجاه برابر جرم آب اقیانوسها است. آقای گالیله، جرم زمین را می‌دانید یا آن را از اعداد نجومی محسوب می‌کنید!

گالیله : مسلماً جرم زمین از اعداد نجومی است. من که آن را نمی‌دانم.

کپلر : جرم زمین $۶/۰\times۱۰^{۲۴}$ کیلوگرم و جرم خورشید $۲/۰\times۱۰^{۳۰}$ کیلوگرم است، یعنی ۳۰۰/۰۰۰ برابر جرم زمین! و جرم کهکشان ما $۲/۲\times۱۰^{۴۱}$ کیلوگرم می‌باشد. آقای گالیله، از تحقیقات شما در مورد سرعت و شتاب حرکت اجسام مطلع هستم. دوست دارم چند عدد در مورد فاصله‌های زمانی در زمین بشنوم تا با آن‌چه در مورد فاصله‌های زمانی در آسمان‌ها می‌دانم، مقایسه کنم.

گالیله : بله، این عقیدهٔ ارسطو که جسم سنگین‌تر، سریع‌تر سقوط می‌کند بسیار عامه‌پسند است. اما آزمایشات من نشان می‌دهد که اصلاً صحیح نیست. برای اثبات نتایج تجربی‌ام ابتدا نشان دادم که سرشت به پایین غلتیدن گلوله روی سطح شیب‌دار با سرشت سقوط آزاد یکی است و با این روش توانستم از شتاب مؤثر گرانش زمین بکاهم تا بتوانم محاسبات را دقیق‌تر انجام بدهم. بازه‌های زمانی را به‌وسیله حجم آبی که از یک مخزن تخلیه می‌شود، اندازه گرفتم.

کپلر : مشتاقم زودتر بازه‌های زمانی زمینی را بشناسم.

گالیله : زمان میان دو ضربان قلب $۸/۰\times۱۰^{-۱}$ ثانیه و عمر متوسط انسان ۲×۱۰^{۹} ثانیه است، ولی اندازه‌گیری زمان ی سهای کوچک‌تر هنوز برایم میسر نیست. خیلی دوست دارم سرعت نور را اندازه‌گیری کنم. ولی هنوز موفق نشده‌ام.

کپلر : بعضی زمانهای آسمانی خیلی بزرگ‌تر از این‌ها نیستند. مثلاً زمان گردش زمین به دور خودش $۸/۶\times۱۰^{۴}$ ثانیه و زمان گردش زمین به دور خورشید $۳/۱\times۱۰^{۷}$ ثانیه است.

گالیله : این عددها را خودم می‌توانستم به‌راحتی محاسبه کنم. چون گردش زمین به دور خودش یک شبانه‌روز طول می‌کشد

و گردش آن به دور خورشید یک سال. عدد جالب‌تری نداری؟

کپلر : راستش اندازه‌گیری زمان برای ما منجمان هم بسیار دشوار است. ضمناً عددهایی که شما مطرح کردید نیز به‌راحتی برای من قابل محاسبه‌اند.

گالیله : به‌نظر می‌رسد در انتخاب واحد اندازه‌گیری قابل اندازه‌گیری بودن کمیت نسبت به آن واحد بسیار اهمیت دارد. روشن است که ما شبانه‌روز را به‌راحتی می‌شناسیم ولی ثانیه هر چند به‌عنوان کسری از شبانه‌روز قابل تعریف است، ولی به‌سادگی قابل اندازه‌گیری نیست.

کپلر : این انتخاب واحد از نظر محاسبات نجومی هم اهمیت دارد. مثلاً یکی از واحدهای نجومی سال نوری است. البته این واحد اندازه‌گیری زمان نیست، بلکه واحد اندازه‌گیری مسافت است. یک سال نوری مسافتی است که نور در طول یک سال می‌پیماید. فاصله ستارگان و کهکشانها از زمین را معمولاً نسبت به این واحد می‌سنجند. چون به ما می‌گوید که چند سال طول کشیده که نور ستاره به ما برسد و از این نظر بسیار ملموس‌تر از این است که فاصله برحسب متر بیان شود.

گالیله : واقعاً لذت بردم. درست همین‌طور است که می‌گویید.

خود را بیازماییم

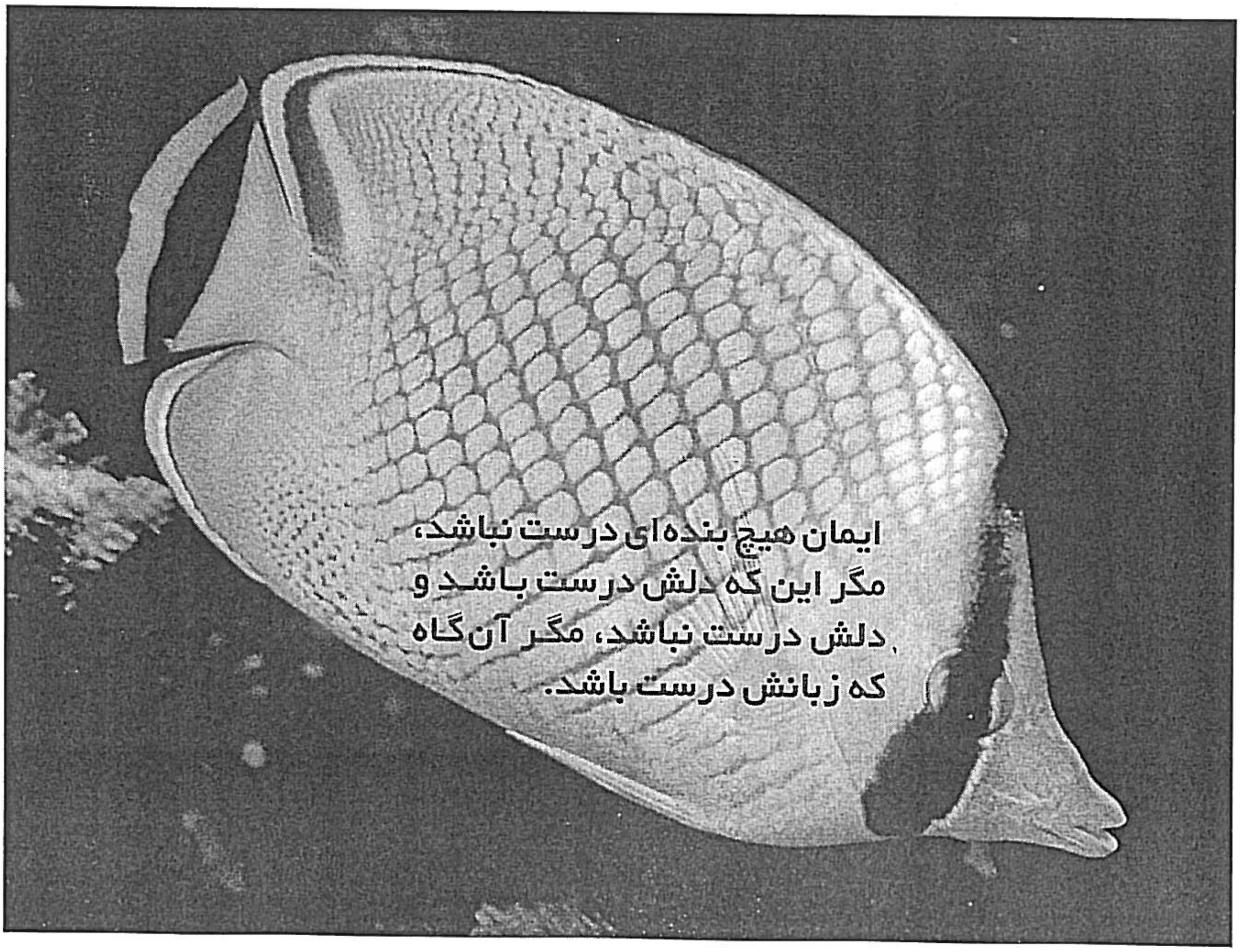
واحدهای اندازه‌گیری رایج در محیط اطرافتان را پس از پرس‌وجو بنویسید. پاسخ‌های خود را با پاسخ‌های دوستان خود مقایسه کنید. (منظور دوجین، رأس، فروند، اسکادران، تن، مثقال و غیره است).

خود را بیازماییم

ـ اگر یک انسان روی یک فیل بنشیند وزن آنها را با نماد علمی نمایش دهید.

ـ اگر ذره‌ای گردوخاک به روی دانه‌ای انگور بنشیند، جرم آنها را با نماد علمی نمایش دهید.

ـ اگر یک فیل، سوار بر یک کشتی اقیانوس‌پیما شود، وزن آنها را با نماد علمی نمایش دهید.



خود را بیازماییم

حاصل محاسبات زیر را با نماد علمی نمایش دهید.

ــ جرم خورشید قبل از جدا شدن زمین~ $۶\times۱۰^{۲۴} + ۲/۰\times۱۰^{۳۰}$

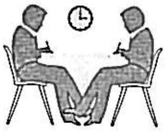
ــ جرم کهکشان ما بدون جرم خورشید ~ $۲/۲\times۱۰^{۴۱} - ۲\times۱۰^{۳۰}$

ــ مجموع جرم دو دانش‌آموز ~ $۵/۳\times۱۰^{۱} + ۴/۸\times۱۰^{۱}$

ــ جرم آب اقیانوس‌ها با کره ماه ~ $۷/۴\times۱۰^{۲۲} + ۱/۴\times۱۰^{۲۱}$

خود را بیازماییم

سعی کنید قوانینی کلی برای محاسبات با نماد علمی ارائه کنید. فرضیات خود را با مثال زدن امتحان نمایید.



فعالیت

ــ فاصله ما با نزدیک‌ترین کهکشان چند سال نوری است؟

چند کیلومتر است؟

چند میلی‌متر است؟

ترجیح می‌دهید فاصله ما تا نزدیک‌ترین کهکشان با کدام واحد به نمایش گذاشته شود؟ چرا؟

ــ جرم فیل چند تن است؟

چند کیلو است؟

چند گرم است؟

ترجیح می‌دهید جرم فیل با کدام واحد نمایش داده شود؟ چرا؟

ــ جرم دانه انگور چند تن است؟

چند کیلوگرم است؟

چند گرم است؟

ترجیح می‌دهید جرم دانه انگور با کدام واحد به نمایش گذاشته شود؟ چرا؟

ــ عمر انسان به‌طور متوسط چند سال است؟

چند ماه است؟

چند روز است؟

چند ساعت است؟

چند دقیقه است؟

چند ثانیه است؟

ترجیح می‌دهید عمر شما به کدام واحد نمایش داده شود؟ چرا؟

ــ یک هکتار چند مترمربع است؟

چند کیلومترمربع است؟

چند سانتی‌مترمربع است؟

ترجیح می‌دهید مساحت یک زمین کشاورزی به کدام واحد نمایش داده شود؟ چرا؟

ــ مساحت یک ۵ تومانی چند میلی‌مترمربع است؟چند سانتی‌مترمربع است؟چند مترمربع است؟چند کیلومترمربع است؟

نمایش مساحت یک ۵ تومانی به کدام واحد برای ما ملموس‌تر است؟

گالیله : دوست من، آقای کپلر، دربی مذاکراتی که داشتیم به این فکر می‌کردم که از یک حدی ریزتر برایم قابل تصور نیست. دو مقدار کوچک که ممکن است یکی هزار برابر دیگری باشد را ناخودآگاه در ذهنم هم‌اندازه فرض می‌کنم و می‌گویم هر دو بسیار کوچک هستند. ولی راه‌حلی که شما ارائه کردید مشکل را حل می‌کند. باید واحدی ملموس و بسیار بسیار کوچک انتخاب کنم. چیزی که قابل اندازه‌گیری هم باشد. البته ناچار خواهم بود با ذره‌بین طول‌ها را مقایسه کنم.

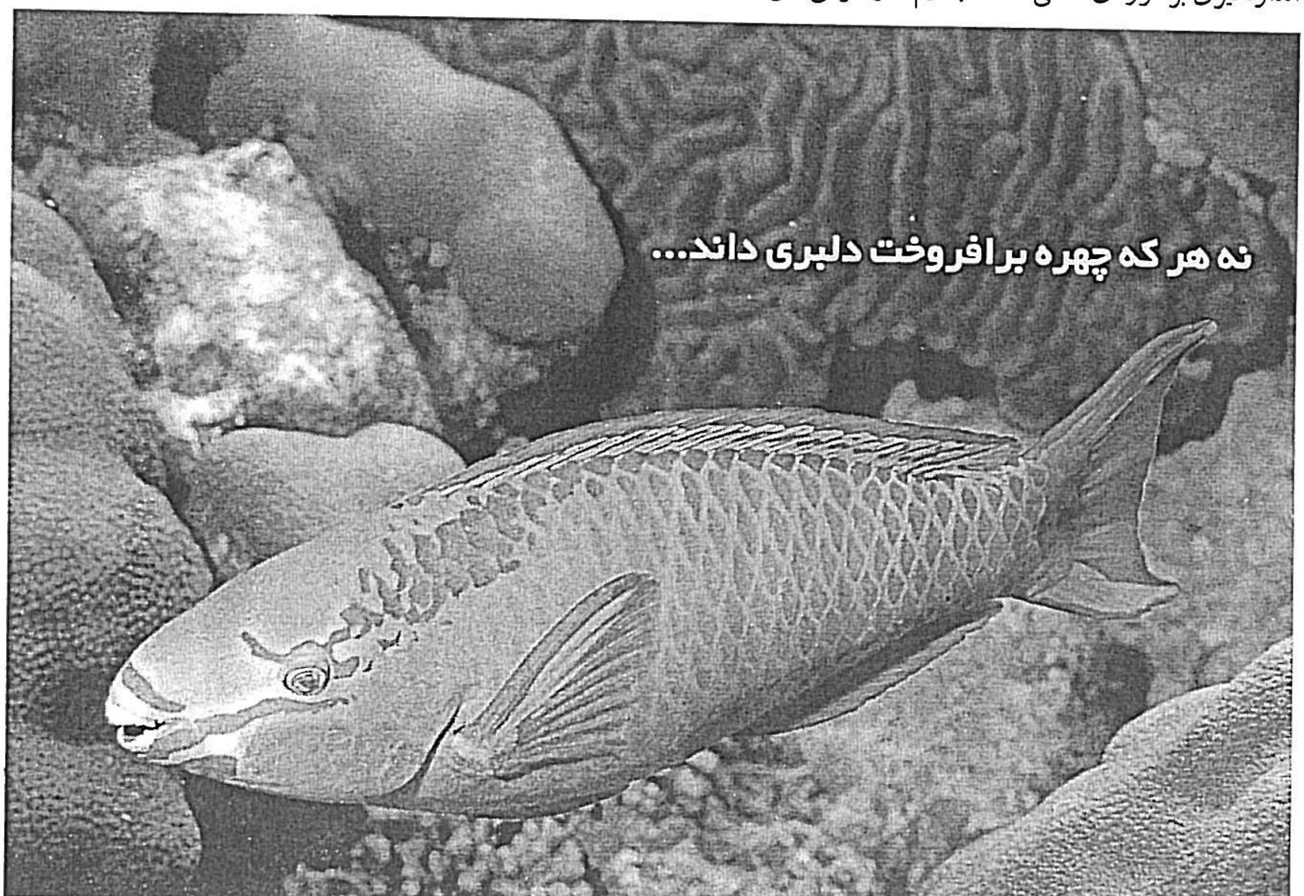
کپلر : فکر می‌کنم مقایسه با ذره‌بین کار بسیار مشکلی باشد، چون مجبورید واحد و شیء مورد اندازه‌گیری را کنار هم قرار دهید. از طرف دیگر ذره‌بین چندان هم بزرگ نمی‌کند. برای اندازه‌گیری چیزهای کوچک، ابزار قوی‌تری موردنیاز است. چون مجبورید شیء را با خطای کم‌تری اندازه‌گیری کنید.

گالیله : من با این مسئلهٔ خطای اندازه‌گیری به شدت درگیرم. در اندازه‌گیریهای زمانی و مسافتی من همیشه الگوهایی ریاضی ظاهر می‌شوند، اما همیشه به‌طور تقریبی با این اعدادی که از آزمایش‌هایم به‌دست آمده‌اند سازگاری دارند.

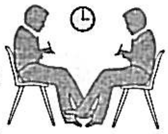
کپلر : به‌نظر من اگر قرار است ما روشهای ریاضی را مبنای مطالعهٔ اجرام آسمانی و طبیعت اطرافمان قرار دهیم باید با خطاهای اندازه‌گیری برخوردی علمی داشته باشیم. از طرفی این خطاها خارج از کنترل ما هستند وگرنه خطا نبودند. برای همین به نوعی غیرقابل مطالعه هستند.

گالیله : من استدلال شما را قبول ندارم. حداقل کاری که می‌توان کرد این است که مطمئن شویم خطای ما از یک حد معقولی بزرگ‌تر نخواهد شد. هرچند خطا در کنترل ما نیست، اما محدود نگاه داشتن آن تا حدودی امکان‌پذیر است. مثلاً ممکن است من در باز و بسته کردن شیر بشکهٔ آبی که برای اندازه‌گیری زمان به‌کار می‌برم ۱ تا ۲ ثانیه خطا داشته باشم. ولی می‌توانم مطمئن شوم که خطایم بزرگ‌تر از این نیست و داده‌هایی که اختلاف فاحش با الگوی ریاضی صادق در کل داده‌ها دارند جدا می‌کنم و سعی می‌کنم آنها را مورد بازبینی قرار دهم و علت عدم تطابق آنها را بیابم و احیاناً الگوی ریاضی بهتری در آن داده‌ها بیابم که با داده‌های ناسازگار هم سازگاری نشان دهند.

کپلر : این کار همیشه امکان‌پذیر نیست. چون ما تمام ابعادی را که ممکن است باعث خطا شوند نمی‌شناسیم. چگونه می‌توانیم خطایمان را محدود کنیم. بعضی وقت‌ها هم پیدا کردن نظریه‌ای که با داده‌ها بسیار خوب سازگاری کند، کاری بسیار مشکل است و ناچاریم به یک نظریه نادقیق قانع باشیم. آقای گالیله ما هنوز از بررسی علمی خطا بسیار دور هستیم. باید بیش‌تر فکر کنیم.



۲ـ۳ـ نمایش اعشاری ساده و متناوب



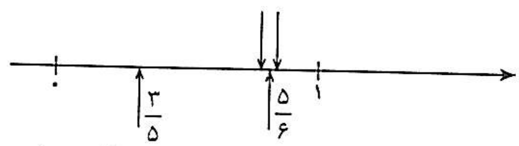
فعالیت

کسرهای $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۵}{۶}$ ، $\frac{۷}{۸}$ ، $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۵}{۹}$ را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

آیا روشی که برای این کار درنظر گرفته‌اید، برای مرتب کردن تعداد زیادی عدد گویا مناسب می‌باشد؟

شاهد و شریف که به مرتب کردن علاقه داشتند سعی کردند روش ساده برای مرتب کردن کسرهای بالا بیابند.

شاهد : می‌توان سعی کردن به‌طور تقریبی محل هریک از این کسرها را روی محور اعداد نمایش داد. در همهٔ آنها صورت کوچکتر از مخرج است. پس همهٔ این کسرها کوچکتر از ۱ هستند.



این کار مشکل است. می‌توان دانست که $\frac{۷}{۸}$ تقریباً نزدیک $\frac{۵}{۶}$ است ولی از روی شکل مشکل می‌توان گفت کدام بزرگتر است.

شریف : برای مقایسهٔ $\frac{۷}{۸}$ و $\frac{۵}{۶}$ می‌توان مخرجشان را مساوی کرد $\frac{۵}{۶}=\frac{۵\times۸}{۶\times۸}=\frac{۴۰}{۴۸}, \frac{۷}{۸}=\frac{۷\times۶}{۸\times۶}=\frac{۴۲}{۴۸}$. پس در واقع کسرهای $\frac{۴۲}{۴۸}$ و $\frac{۴۰}{۴۸}$ را مقایسه می‌کنیم. پس داریم

$$\frac{۵}{۶}=\frac{۴۰}{۴۸}<\frac{۴۲}{۴۸}=\frac{۷}{۸}$$

شاهد : درست است. می‌توان اینطور کسرها را باهم مقایسه کرد. اما این روش خیلی طول می‌کشد. چون وقتی محل $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۵}{۶}$ ، $\frac{۷}{۸}$ را روی محور مقایسه کردیم برای دانستن محل کسر $\frac{۱}{۲}$ باید آن کسر را باهرسهٔ این عددها مقایسه کرد و بعد روی محور نمایش داد و کسر بعدی را با $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۳}{۵}$، $\frac{۵}{۶}$ و $\frac{۷}{۸}$. و هر کسر جدید باید با تعداد بیشتری کسر مقایسه شود. کاش می‌شد محل تقریبی هریک از کسرها را روی محور مشخص کرد.

شریف : این کار را می‌توان با نمایش اعشاری این کسرها انجام داد و سپس نمایش اعشاری آنها را مقایسه نمود.

$$\begin{array}{r|l} ۷۰ & ۸ \\ \underline{۶۴} & ۰/۸ \\ ۰/۶ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ۵۰ & ۶ \\ \underline{۴۸} & ۰/۸ \\ ۰/۲ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ۳۰ & ۵ \\ \underline{۳۰} & ۰/۶ \\ ۰ & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} ۵۰ & ۹ \\ \underline{۴۵} & ۰/۵ \\ ۰/۵ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ۱۰ & ۲ \\ \underline{۱۰} & ۰/۵ \\ ۰ & \end{array}$$

بنابراین $۰/۶=\frac{۳}{۵}$ و $۰/۸\approx\frac{۵}{۶}$ و $۰/۸\approx\frac{۷}{۸}$ و $۰/۵=\frac{۱}{۲}$ و $۰/۵\approx\frac{۵}{۹}$.

شریف : می‌بینی که یک رقم اعشار بدرد این مقایسه نمی‌خورد $\frac{۷}{۸}$ و $\frac{۵}{۶}$ هر دو تقریباً برابرند و $\frac{۵}{۹}$ و $\frac{۱}{۲}$ نیز بسیار به هم نزدیکند. ناچاریم تا دو رقم اعشار آنها را تقریب بزنیم.

شاهد : بسیار خوب

$$\begin{array}{r|l} ۵۰ & ۹ \\ \underline{۴۵} & ۰/۵۵ \\ ۵۰ & \\ \underline{۴۵} & \\ ۰/۰۵ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ۷۰ & ۸ \\ \underline{۶۴} & ۰/۸۷ \\ ۶۰ & \\ \underline{۵۶} & \\ ۰/۰۴ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ۵۰ & ۶ \\ \underline{۴۸} & ۰/۸۳ \\ ۲۰ & \\ \underline{۱۸} & \\ ۰/۰۲ & \end{array}$$

شریف : پس می‌بینیم که $۰/۶=\frac{۳}{۵}$ و $۰/۸۳\approx\frac{۵}{۶}$ و $۰/۸۷\approx\frac{۷}{۸}$ و $۰/۵=\frac{۱}{۲}$ و $۰/۵۵\approx\frac{۵}{۹}$

بنابراین $\frac{۱}{۲}<\frac{۵}{۹}<\frac{۳}{۵}<\frac{۵}{۶}<\frac{۷}{۸}$

شاهد : با این روش می‌توان تعداد زیادی از اعداد گویا را باهم مقایسه نمود. تنها اشکال آن این است که اگر بخواهیم از این روش برای مرتب کردن کسرها استفاده کنیم ناچاریم هربار تصمیم بگیریم که برای نمایش اعشاری هرکسر تا چند رقم اعشار را کافی است محاسبه کنیم.

فعالیت

کسرهای $\frac{۱}{۳}$ ، $\frac{۱}{۵}$ ، $\frac{۱}{۶}$ ، $\frac{۱}{۷}$ ، $\frac{۱}{۹}$ را با اعشار تقریب بزنید. در مورد نمایش اعشاری اعداد گویا چه می‌توانید بگویید؟

شهلا : با ماشین‌حساب می‌شود همه را حساب کرد.

$\frac{۱}{۳} = ۰/۳۳۳۳۳۳۳۳۳$

$\frac{۱}{۵} = ۰/۲$

$\frac{۱}{۶} = ۰/۱۶۶۶۶۶۶۶۶$

$\frac{۱}{۷} = ۰/۱۴۲۸۵۷۱۴۲$

$\frac{۱}{۹} = ۰/۱۱۱۱۱۱۱۱۱$

شیما : این‌ها جواب‌های تقریبی است. اگر ماشین حسابت فقط تا ۸ رقم را نشان می‌داد می‌نوشتی

$\frac{۱}{۳} = ۰/۳۳۳۳۳۳۳$

$\frac{۱}{۵} = ۰/۲$

$\frac{۱}{۶} = ۰/۱۶۶۶۶۶۶۶۶$

$\frac{۱}{۷} = ۰/۱۴۲۸۵۷۱$

$\frac{۱}{۹} = ۰/۱۱۱۱۱۱۱$

اما اگر بخواهیم دقیق حساب کنیم احتمالاً در $\frac{۱}{۳}$ الگوی تکراری تا بینهایت ادامه خواهد داشت در مورد $\frac{۱}{۶}$ و $\frac{۱}{۹}$ هم همینطور است.

$\frac{۱}{۳} = ۰/۳۳...$

$\frac{۱}{۶} = ۰/۱۶۶...$

$\frac{۱}{۹} = ۰/۱۱...$

فرشته : با تقسیم می‌بینیم که شهلا درست می‌گوید.

۱۰ | ۷
۷ | ۰/۱۴۲۸۵۷۱۴...
۳۰
۲۸
۲۰
۱۴
۶۰
۵۶
۴۰
۳۵
۵۰
۴۹
۱۰
۷
۳۰

۱۰ | ۳
۹ | ۰/۳۳۳...
۱۰
۹
۱۰
۹
۱

۱۰ | ۶
۶ | ۰/۱۶۶۶...
۴۰
۳۶
۴۰
۳۶
۴۰
۳۶
۴

۱۰ | ۹
۹ | ۰/۱۱۱...
۱۰
۹
۱۰
۹
۱

شیما : بهتر است برای دقت بیش‌تر از یک نماد استفاده کنیم.

$\frac{۱}{۷} = ۰/\overline{۱۴۲۸۵۷}$

$\frac{۱}{۳} = ۰/\overline{۳}$

$\frac{۱}{۵} = ۰/۲$

$\frac{۱}{۹} = ۰/\overline{۱}$

خطی را که بالای ارقام می‌کشیم خط دوره‌ی گردشی می‌نامیم. جالب این‌جاست که همه‌ی این کسرها یا متناهی رقم دارند یا با نماد دوره‌ی گردشی قابل نمایش هستند.

اما آیا هر عددی با دوره‌ی گردشی نیز یک عدد گویاست؟ مثلاً از کجا می‌فهمیدیم که $۰/\overline{۱۴۲۸۵۷}$ یک عدد گویاست؟

فرشته : چرا از یک مثال ساده‌تر نمی‌پرسی. مثلاً از کجا می‌دانستیم $۰/\overline{۳}$ یک عدد گویاست؟

شهلا : از این که دورهٔ گردش تکرار می‌شود می‌توان استفاده کرد. کافی است $۰/\overline{۳}$ را ده برابر کنیم.

$$۱۰\times ۰/\overline{۳}=۳/\overline{۳}=۳+۰/\overline{۳}$$

اگر به‌جای $۰/\overline{۳}$ مقدار x را قرار دهیم، x در معادلهٔ زیر صدق می‌کند. برای حل این معادله می‌نویسیم :

$$۱۰x=۳+x$$

$$۱۰x-x=۳$$

$$۹x=۳$$

$$x=\frac{۳}{۹}=\frac{۱}{۳}$$

همین روش را می‌توان برای $۰/\overline{۱۴۲۸۵۷}$ بکار برد.

فقط باید این عدد را در ۱,۰۰۰,۰۰۰ ضرب کرد.

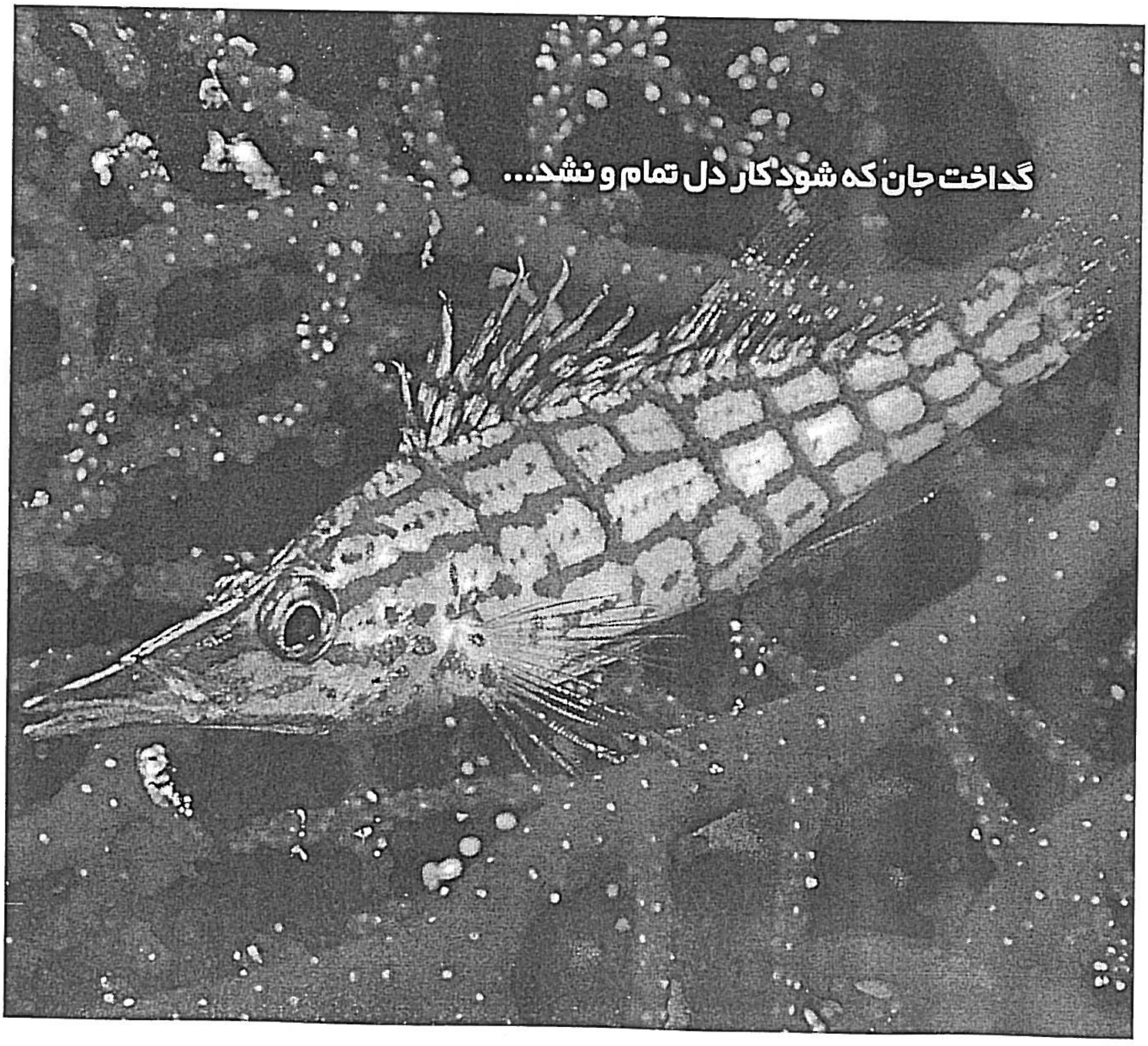
$$۱,۰۰۰,۰۰۰\times ۰/۱۴۲۸۵۷=۱۴۲۸۵۷/۱۴۲۸۵۷$$
$$=۱۴۲۸۵۷+۰/۱۴۲۸۵۷$$

شیما : زنده باد! ثابت کردی این عدد گویاست و چه قشنگ هم ثابت کردی! چون با همین اثبات می‌توان نشان داد اگر نمایش اعشاری عددی با یک دوره‌ی گردشی ادامه پیدا کند، آن عدد گویاست.

خود را بیازماییم

صحت ادعای شیما را بررسی کنید.

شیما : فقط به یک سؤال پاسخ نداده‌ایم. هرعدد اعشاری متناهی را می‌توان به‌سادگی به‌صورت کسر نوشت. مثلاً $۱/۳=\frac{۱۳}{۱۰}$. دوست دارم بدانم کدام اعداد گویا نمایش اعشاری متناهی دارند. و کدامیک نمایش اعشاری با دورهٔ گردش.



فرشته : بیایید چند کسر مثال بزنیم که نمایش اعشاری متناهی دارند.

$$۱/۰۲=\frac{۱۰۲}{۱۰۰}$$

$$۱/۲=\frac{۱۴}{۱۰}$$

$$۱/۴۵۳=\frac{۱۴۵۳}{۱۰۰۰}$$

با یک نگاه معلوم است که چنین کسرهایی مخرجی به شکل ۱۰^n دارند.

شهلا : البته ممکن است کسر را بتوان ساده هم کرد.

$$\frac{۱۴}{۱۰}=\frac{۷}{۵}$$

پس ما بدنبال کسرهایی هستیم که ساده شده کسرهایی با مخرج توانی از ۱۰ باشند.

شیما : برای سادگی بهتر است مخرج را تجزیه کنیم.

$$\frac{۱۴}{۱۰}=\frac{۲\times ۷}{۲\times ۵}$$

هرکسر با مخرج $۱۰^n=۲^n\times ۵^n$ پس از ساده شدن مخرجی دارند که تنها توانهای ۲ و ۵ در تجزیه آن ظاهر می‌شوند. برعکس هر کسری با مخرجی به شکل $۲^n\times ۵^m$، مثلاً $۲^۲\times ۵^۳$، پس از ضرب کردن صورت و مخرج در عدد مناسب، به کسری با مخرج توانی از ده تبدیل می‌شود. مثلاً

$$\frac{۷}{۵۰}=\frac{۷}{۲^۱\times ۵^۲}=\frac{۷\times ۲}{۲^۲\times ۵^۲}=\frac{۷\times ۲}{۱۰^۲}=۰/۱۴$$

بنابراین کسرهایی که مخرجی به شکل $۲^n\times ۵^m$ دارند نمایش اعشاری متناهی دارند و کسرهایی که نمایش اعشاری متناهی دارند مخرجی به شکل $۲^n\times ۵^m$ دارند. پس کسرهای با نمایش اعشاری متناهی را کاملاً می‌شناسیم.

شهلا : اما به سؤال دوم هنوز پاسخ نداده‌ایم! چه اعدادی کاملاً به شکل دورهٔ گردش هستند؟

فرشته : بیا امتحان کنیم! مثلاً نمایش اعشاری $\frac{۲۳}{۷}$ را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{array}{r|l} ۲۳ & ۷ \\ \underline{۲۱} & ۳/۲۸۵۷۱۴... \\ ۲۰ & \\ \underline{۱۴} & \\ ۶۰ & \\ \underline{۵۶} & \\ ۴۰ & \\ \underline{۳۵} & \\ ۵۰ & \\ \underline{۴۹} & \\ ۱۰ & \\ \underline{۷} & \\ ۳۰ & \\ \underline{۲۸} & \\ ۲۰ & \end{array}$$

بنابراین $\frac{۲۳}{۷}=۳/\overline{۲۸۵۷۱۴}$ اگر می‌خواستیم $\frac{۲}{۷}$ را محاسبه کنیم عددی به‌دست می‌آوردیم که کاملاً به شکل دورهٔ گردش بود. $\frac{۲}{۷}=۰/\overline{۲۸۵۷۱۴}$

سؤال من این است که چه اعدادی کاملاً به شکل دورهٔ گردش هستند : $۰/\overline{a_۱a_۲...a_n}$

شیما :

$$۱۰^۶\times ۰/\overline{۲۸۵۷۱۴}=۲۸۵۷۱۴=+۰/\overline{۲۸۵۷۱۴}$$

پس $۱۰^۶\times x=۲۸۵۷۱۴+x$ بنابراین

$$x=\frac{۲۸۵۷۱۴}{۱۰^۶-۱}=\frac{۲۸۵۷۱۴}{۹۹۹۹۹۹}$$

این الگو برای همهٔ این اعداد درست است.

شهلا : حدس من این است که هر عدد گویا دارای نمایش اعشاری متناهی یا نمایش اعشاری با دورهٔ گردش است.

شیما : اگر حدس تو درست باشد می‌توان اطلاعات یک عدد گویا را در متناهی رقم اعشار خلاصه نمود!

خود را بیازماییم

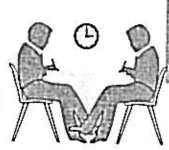
اعداد زیر را به‌صورت اعداد گویا نمایش دهید. $۲۷/۲\overline{۹}$ و $۲/\overline{۹}$ و $۰/\overline{۹}$

خود را بیازماییم

محاسبات زیر را انجام دهید.

$۰/\overline{۲۱۳}+۰/\overline{۳۲}=$ $\qquad$ $۰/\overline{۱۴}+۰/\overline{۴۵}=$

$۰/\overline{۲۹۱۴}+۰/\overline{۷۱۲}=$ $\qquad$ $۰/\overline{۱۵}+۰/\overline{۱۵}=$



فعالیت

عدد $\sqrt{۲}$ را با اعداد اعشاری تقریب بزنید.

شیما، شهلا و فرشته با هم درباره انجام فعالیت بالا گفتگو کردند. شیما برای حل مسئله پیشنهادی ارائه کرد. سپس با کمک هم راه حل شیما را کامل کردند.

شیما : می‌توان این کار را با ماشین حساب انجام داد. یک ماشین حساب به راحتی نمایش اعشاری $\sqrt{۲}$ را به ما می‌دهد.

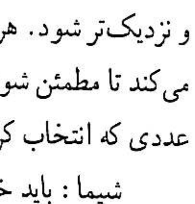
شهلا : برای ما مهم است که بدانیم ماشین‌حساب چگونه این کار را انجام می‌دهد. چون هر ماشین‌حسابی محدودیتی دارد و فقط تا تعدادی خاص رقم اعشاری را نشان می‌دهد. اگر بخواهیم تقریب بهتری از $\sqrt{۲}$ داشته باشیم مجبوریم خودمان محاسبه کنیم.

فرشته : فکر می‌کنم بتوانم حدس بزنم ماشین‌حساب چگونه کار می‌کند. فرض کنید ماشین‌حساب بتواند تا ۸ رقم را به نمایش بگذارد. یک عدد اعشاری ۸ رقمی که کوچک‌تر از $\sqrt{۲}$ است را انتخاب می‌کند و آن را کم کم بزرگ می‌کند تا به $\sqrt{۲}$ نزدیک و نزدیک‌تر شود. هر عددی که انتخاب کرد را در خودش ضرب می‌کند تا مطمئن شود که حاصل از ۲ کوچک‌تر است و بنابراین عددی که انتخاب کرده از $\sqrt{۲}$ کوچک‌تر است.

شیما : باید خودم دست به‌کار شوم تا بهتر بفهمم که چه می‌گویی! اول بگو ببینم چرا اگر عددی از $\sqrt{۲}$ بزرگ‌تر باشد، آن عدد ضرب در خودش از عدد ۲ بزرگ‌تر است؟

فرشته : مربعی به ضلع $\sqrt{۲}$ مساحتش ۲ است. اگر مربعی مساحت بزرگ‌تر از ۲ داشته باشد، ضلعش هم از $\sqrt{۲}$ بزرگ‌تر است و اگر ضلعش از $\sqrt{۲}$ بزرگ‌تر باشد مساحتش حتماً از ۲ بیش‌تر است.

شیما : بسیار خوب. می‌دانیم $\sqrt{۲} > ۱$ چون مربعی به ضلع ۱ در مربعی به ضلع $\sqrt{۲}$ جا می‌شود.



$$۱ < \sqrt{۲}$$
$$(۱/۱)^۲ = ۱/۲۱ < ۲ \Rightarrow ۱/۱ < \sqrt{۲}$$
$$(۱/۲)^۲ = ۱/۴۴ < ۲ \Rightarrow ۱/۲ < \sqrt{۲}$$
$$(۱/۳)^۲ = ۱/۶۹ < ۲ \Rightarrow ۱/۳ < \sqrt{۲}$$
$$(۱/۴)^۲ = ۱/۹۶ < ۲ \Rightarrow ۱/۴ < \sqrt{۲}$$
$$(۱/۵)^۲ = ۲/۲۵$$

پس می‌بینیم که ۱/۵ از $\sqrt{۲}$ بزرگ‌تر شده. حالا یک رقم دیگر اعشار به $\sqrt{۲}$ نزدیک‌تر می‌شویم.

$$(۱/۴۱)^۲ = ۱/۹۸۸۱ < ۲ \Rightarrow ۱/۴۱ < \sqrt{۲}$$
$$(۱/۴۲)^۲ = ۲/۰۱۶۴$$

پس ۱/۴۲ از $\sqrt{۲}$ بزرگ‌تر شده و ۱/۴۱ تقریب خوبی از $\sqrt{۲}$ است. یک رقم دیگر به پیش می‌رویم.

$$(۱/۴۱۱)^۲ = ۱/۹۹۰۹۲۱ < ۲ \Rightarrow ۱/۴۱۱ < \sqrt{۲}$$
$$(۱/۴۱۲)^۲ = ۱/۹۹۳۷۴۴ < ۲ \Rightarrow ۱/۴۱۲ < \sqrt{۲}$$
$$(۱/۴۱۳)^۲ = ۱/۹۹۶۵۶۹ < ۲ \Rightarrow ۱/۴۱۳ < \sqrt{۲}$$
$$(۱/۴۱۴)^۲ = ۱/۹۹۹۳۶۹ < ۲ \Rightarrow ۱/۴۱۴ < \sqrt{۲}$$
$$(۱/۴۱۵)^۲ = ۲/۰۰۲۲۲۵$$

پس ۱/۴۱۵ از $\sqrt{۲}$ بزرگ‌تر شده. پس ۱/۴۱۴ تقریب خوبی است.

شهلا : بسیار خوب کافی است. ولی یک ماشین‌حساب کوچک چگونه این همه محاسبه را انجام می‌دهد؟ باید روش سریع‌تری وجود داشته باشد.

فرشته : می‌توان همین روش را ساده‌تر کرد.

$$۱^۲ < (\sqrt{۲})^۲ = ۲ < ۲^۲ \Rightarrow ۱ < \sqrt{۲} < ۲$$

اگر $\sqrt{۲}$ را در ۱۰ ضرب کنیم یک رقم اعشار آن را هم حساب کرده‌ایم.

$$۱۴^۲ < (۱۰\sqrt{۲})^۲ = ۲۰۰ < ۱۵^۲ \Rightarrow ۱۴ < ۱۰\sqrt{۲} < ۱۵$$
$$\Rightarrow ۱/۴ < \sqrt{۲} < ۱/۵$$
$$۱۴۱^۲ < (۱۰۰\sqrt{۲})^۲ = ۲۰۰۰۰ < ۱۴۲^۲$$
$$\Rightarrow ۱۴۱ < ۱۰۰\sqrt{۲} < ۱۴۲$$
$$\Rightarrow ۱/۴۱ < \sqrt{۲} < ۱/۴۲$$

پس کافی‌است اعداد مربع کامل را محاسبه کنیم.

شهلا : این روش به همان سختی روش شیماست. حتماً راه بهتر از این هم برای تقریب زدن $\sqrt{۲}$ وجود دارد. مثلاً می‌توان

برعکس فکر کرد. اگر بخواهیم $\sqrt{۲}$ را تا یک رقم اعشار تقریب بزنیم، می‌نویسیم.

$$(۱/۱)^۲ = (۱+۰/۱)(۱+۰/۱)$$
$$=۱+۱\times۰/۱+۰/۱\times۱+(۰/۱)^۲$$
$$=۱+۲\times۱\times۰/۱+(۰/۱)^۲$$
$$=۱+۰/۲+۰/۰۱$$

امّا با تقریب تا یک رقم اعشار سر و کار داریم پس ۰/۰۱ را فراموش می‌کنیم و می‌نویسیم

$$(۱/۱)^۲ = ۱+۲\times۰/۱+(۰/۱)^۲ \sim ۱+۰/۲=۱/۲$$
$$(۱/۲)^۲ = ۱+۲\times۰/۲+(۰/۲)^۲ \sim ۱+۰/۴=۱/۴$$
$$(۱/۳)^۲ = ۱+۲\times۰/۳+(۰/۳)^۲ \sim ۱+۰/۶=۱/۶$$
$$(۱/۴)^۲ = ۱+۲\times۰/۴+(۰/۴)^۲ \sim ۱+۰/۸+۰/۱=۱/۹$$
$$(۱/۵)^۲ = ۱+۲\times۰/۵+(۰/۵)^۲ \sim ۱+۱+۰/۲=۲/۲$$

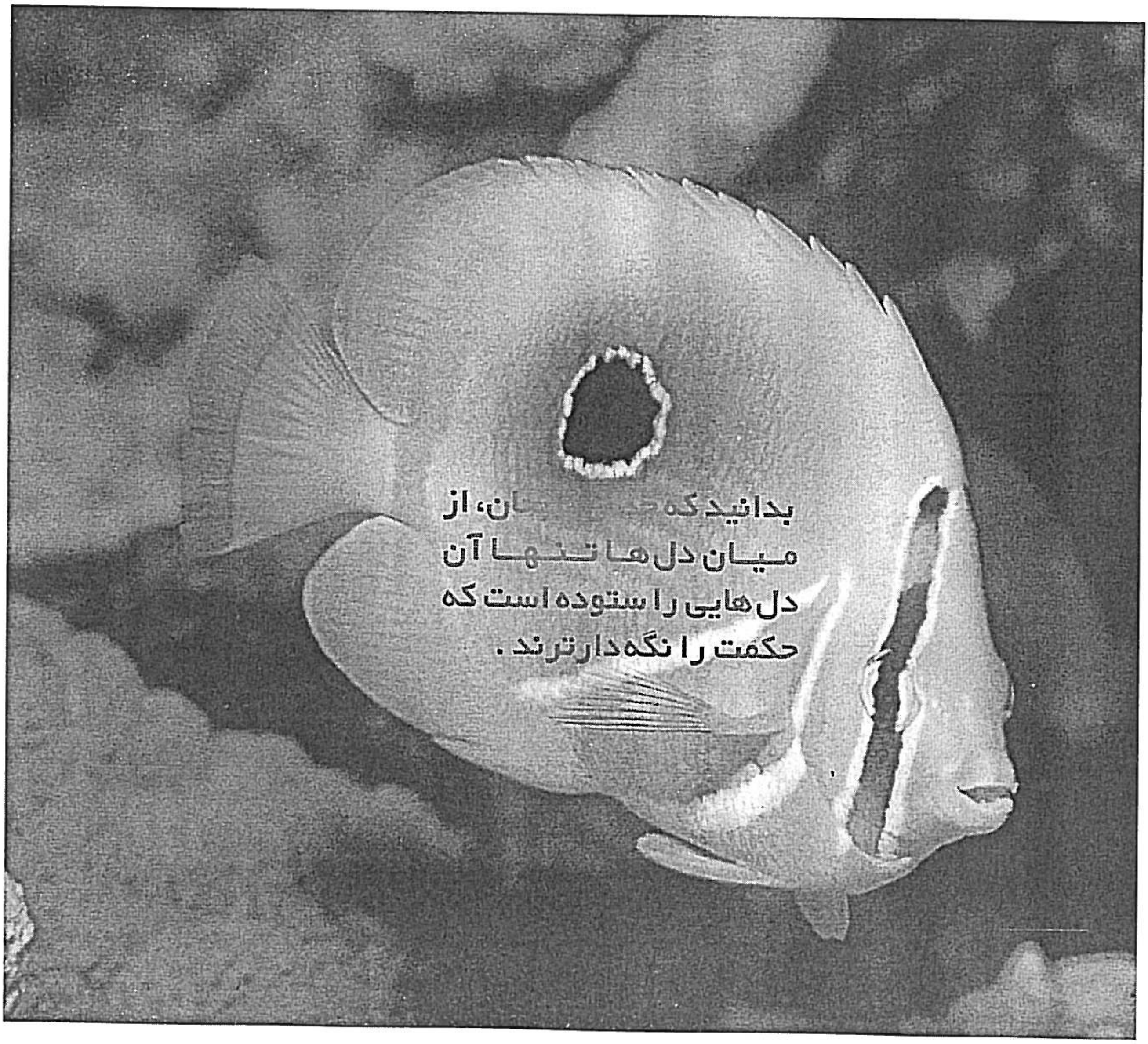
می‌بینید که جمله‌های $(۰/۱)^۲$، $(۰/۲)^۲$ و ... چندان نقشی بازی نمی‌کنند.

احتمالاً ماشین‌حساب هم از چنین روش‌هایی تقریبی استفاده می‌کند.

خود را بیازماییم

به روش بالا با کمک ماشین‌حساب $\sqrt{۳}$ را تا ۵ رقم اعشار محاسبه کنید.

از صحت پاسخ خود، با ماشین‌حساب اطمینان حاصل نمایید.



فعالیت

اعدادی را که گویا نیستند گنگ می‌نامیم. تحقیق کنید $\sqrt{۲}$ عددی گنگ است.

مهتاب و مهری با کمک هم این حکم را بررسی کردند. آنها سعی کردند درستی حکم را با نشان دادن اینکه غیر آن ممکن نیست، نشان دهند.

مهتاب : ما اعداد گنگ را نمی‌شناسیم. فقط اعداد گویا را می‌شناسیم. پس نشان‌دادن این که $\sqrt{۲}$ گویا نیست ساده‌تر از این است که نشان دهیم $\sqrt{۲}$ گنگ است. پس باید فرض کنیم $\sqrt{۲} = \frac{p}{q}$ که در آن p و q اعدادی طبیعی هستند و سعی کنیم به تناقض یا اشکالی برسیم.

مهری : در این‌صورت می‌توان نوشت $\frac{p^{۲}}{q^{۲}} = ۲$ و آن‌گاه

$$۲q^{۲} = p^{۲}$$

مهتاب : بیا چند مثال بزنیم. بهتر است یک جدول رسم کنیم.

q	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
$q^{۲}$	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶	۴۹	۶۴	۸۱
$۲q^{۲}$	۲	۸	۱۸	۳۲	۵۰	۷۲	۹۸	۱۲۸	۱۶۲

به نظر می‌رسد که اعداد ردیف دوّم خیلی با ردیف اوّل فرق دارند.

مهری : یک نکته که توجهم را جلب می‌کند این است که همه زوج هستند اما در ردیف اوّل همه‌ی اعداد مربع کامل زوج نیستند.

مهتاب : می‌توانیم فقط مربع کاملهای زوج را در نظر بگیریم.

q	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶
$q^{۲}$	۴	۱۶	۳۶	۶۴	۱۰۰	۱۴۴	۱۹۶	۲۵۶
$۲q^{۲}$	۸	۳۲	۷۲	۱۲۸	۲۰۰	۲۸۸	۳۹۲	۵۱۲

مهری : باز هم ردیف اوّل و دوّم خیلی متفاوت به‌نظر می‌رسند. فکر نمی‌کنم بتوان عددی پیدا کرد که در هر دو ظاهر شود. به‌نظر می‌رسد اعداد سطر اوّل یک‌جور زوج هستند و اعداد سطر دوم جور دیگری!

مهتاب : بسیار خوب. بیا تجزیه این اعداد به عوامل اوّل را بنویسیم.

q	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶
q	۲	$۲^{۲}$	۲×۳	$۲^{۳}$	۲×۵	$۲^{۲}\times۳$	۲×۷	$۲^{۴}$
$q^{۲}$	$۲^{۲}$	$۲^{۴}$	$۲^{۲}\times۳^{۲}$	$۲^{۶}$	$۲^{۲}\times۵^{۲}$	$۲^{۴}\times۳^{۲}$	$۲^{۲}\times۷$	$۲^{۸}$
$۲q^{۲}$	$۲^{۳}$	$۲^{۵}$	$۲^{۳}\times۳^{۲}$	$۲^{۷}$	$۲^{۳}\times۵^{۲}$	$۲^{۵}\times۳^{۲}$	$۲^{۳}\times۷$	$۲^{۹}$

مهری : حالا می‌توان الگویی پیدا کرد. توان ۲ که در ردیف بالا ظاهر می‌شود همیشه توانی زوج است. اما توان ۲ که در ردیف پایین ظاهر می‌شود، همیشه توانی فرد از ۲ است. بنابراین هیچوقت عددی که در ردیف بالا ظاهر می‌شود با عددی که در ردیف پایین ظاهر می‌شود برابر نمی‌شود.

مهتاب : دلیلی که آوردی قبول دارم. پس می‌توانیم چنین استدلال کنیم ؛ هر عدد به شکل $p^{۲}$ مربع کامل است و توان ۲ که در آن ظاهر می‌شود زوج است. اما در هر عدد به شکل $۲q^{۲}$ توانی فرد از ۲ ظاهر می‌شود. بنابراین امکان ندارد که $p^{۲} = ۲q^{۲}$.

مهری : و این نشان می‌دهد که $\sqrt{۲}$ گویا نیست. چون اگر $\sqrt{۲} = \frac{p}{q}$ آنگاه $p^{۲} = ۲q^{۲}$. ولی نشان دادیم که این ممکن نیست.

پس فرض گویا بودن $\sqrt{۲}$ فرض درستی نبوده است. چن به تناقض می‌انجامد.

خود را بیازماییم

نشان دهید $\sqrt{۳}$ یک عدد گنگ است.

۲ـ۴ـ اعداد گویا و گنگ

فعالیت

نشان دهید بین هر دو عدد گویا یک عدد گویا یافت می‌شود. آیا می‌توانید نشان دهید بین هر دو عدد گویا بی‌نهایت عدد گویا یافت می‌شود؟

پویا و پارسا این مسئله را قبلاً دیده بودند. آنها همیشه سعی می‌کردند جواب مسئله را بسازند نه اینکه فقط وجود جواب را نشان دهند.

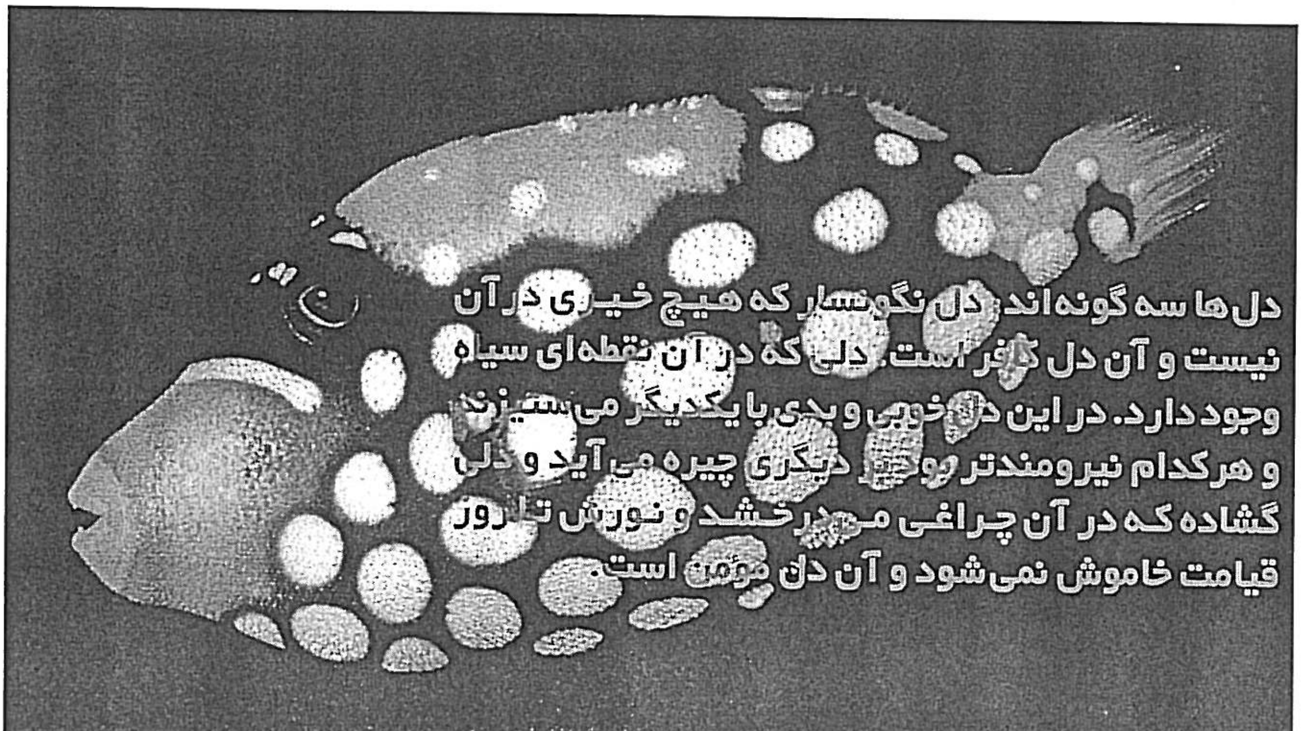
پویا : من قبلاً این مسئله را دیده بودم. مثلاً برای پیدا کردن عددی گویا بین $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ باید ابتدا آنها را هم مخرج می‌کردیم : $\frac{۲}{۶}$ و $\frac{۳}{۶}$. آن‌وقت عددی بین آنها می‌یافتیم. رسم اعداد روی محور به ما کمک می‌کند این کار را ساده‌تر انجام دهیم. اگر صورت کسرها اعداد متوالی بودند، صورت و مخرج‌ها را در یک عدد ضرب می‌کردیم تا بتوان کسری بینابینی به‌دست آورد. مثلاً اگر صورتها و مخرج‌ها را در ۲ ضرب کنیم $\frac{۴}{۱۲}$ و $\frac{۶}{۱۲}$ به‌دست می‌آید. حال به‌سادگی می‌توان عددی بین آنها پیدا کرد : $\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۱۲}<\frac{۵}{۱۲}<\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$

پارسا : من هم قبول دارم که اگر دو عدد گویای خاص را برای ما بنویسند به‌سادگی می‌توان یک عدد گویا بین آنها ساخت. امّا اگر دو عدد گویای دلخواه بگیرند و از ما بخواهند بین آنها عددی گویا بسازیم، مثلاً بگویند اگر $\frac{c}{d}<\frac{a}{b}$ که در آن‌ها a، b، c و d اعدادی طبیعی هستند، بین آنها عددی گویا بیابید چه می‌گویی؟

پویا : خوب می‌گویم $\frac{cb}{bd}<\frac{ad}{bd}$. پس کافی است عددی صحیح بین cb و ad پیدا کنم مثل x در این صورت $\frac{x}{ad}$ جواب خواهد بود.

پارسا : اما ممکن است مشکل بالا پیش بیاید. یعنی ad و bc ممکن است اعداد متوالی باشند و عددی بین آنها نباشد. آن‌گاه چه می‌کنی؟

پویا : همان کاری را می‌کنم که برای $\frac{۲}{۶}$ و $\frac{۳}{۶}$ کردم. می‌گویم : $\frac{۲cb}{۲ad}<\frac{۲ad}{۲bd}$ در این‌صورت بین ۲ad و ۲cb عددی پیدا می‌کنم.



پارسا: می‌فهمم. روش شما جواب می‌دهد. اما ساختنی نیست. یعنی ما نمی‌توانیم فرمولی برای اعداد گویی بین $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ بنویسیم. من یک پیشنهاد دارم. اگر a، b، c و d اعداد طبیعی باشند $\frac{a+c}{b+d}$ کسری است که به نظر بین $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ است.

پویا: بیا با کسرهای مشخص کار کنیم. مثلاً اگر بخواهی بین $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ عددی پیشنهاد کنی چه می‌گویی؟

پارسا: $\frac{۱}{۳}<\frac{۱+۱}{۳+۲}<\frac{۱}{۲}$

پویا: یعنی ادعا می‌کنی $\frac{۱}{۲}>\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۲}{۵}>\frac{۱}{۳}$ که به وضوح درست است.

پارسا: اما این نامساوی برای هر دو عدد گویای $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ که $\frac{c}{d}>\frac{a}{b}$ نیز صحیح است.

پویا: باید محاسبه کنیم. ادعای شما این است که

$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}$ و $\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

و اطلاعات ما این است که $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ و اگر دو طرف را در bd که مثبت است ضرب کنیم، دو طرف به یک اندازه بزرگ می‌شوند پس داریم $bd\times\frac{a}{b}<bd\times\frac{c}{d}$. بنابراین $ad<bc$. این چیزی است که می‌دانیم.

پارسا: برای آن‌که نشان دهیم $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}$ کافی است نشان دهیم.

$$b(b+d)\frac{a}{b}<b(b+d)\frac{a+c}{b+d}$$

پس کافی است بگوییم

$$(b+d)a<b(a+c)$$

معادلاً $ba+da<ba+bc$

کافی است نشان دهیم ، $da<bc$

ولی این همان چیزی است که از قبل می‌دانیم

برای نامساوی دیگر هم همین را می‌نویسیم

$$\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$
$$\Uparrow$$
$$d(b+d)\frac{a+c}{b+d}<d(b+d)\frac{c}{d}$$
$$\Uparrow$$
$$d(a+c)<(b+d)c$$
$$\Uparrow$$
$$da+dc<bc+dc \Leftarrow da<bc$$

پویا: قبول است این روش یک عدد گویا بین دو عدد گویا برای ما می‌سازد. اما چه‌طور می‌توان نشان داد که بی‌نهایت عدد گویا بین دو عدد گویای داده شده وجود دارد؟

پارسا: می‌توان همین روش را تکرار کرد.

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$$
$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$
$$\frac{a}{b}<\frac{۲a+c}{۲b+d}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{a+۲c}{b+۲d}<\frac{c}{d}$$
$$\frac{a}{b}<\frac{۳a+c}{۳b+d}<\frac{۲a+c}{۲b+d}<\frac{۳a+۲c}{۳b+۲d}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{۲a+۳c}{۲b+۳d}<\frac{a+۲c}{b+۲d}<\frac{a+۳c}{b+۳d}<\frac{c}{d}<$$

همین‌طور اعداد بیش‌تر و بیش‌تری به‌دست می‌آید.

پویا: درست است. اما باید ما ثابت کنیم که این تعداد بی‌نهایت است. برای چنین چیزی باید استدلال آورد. نمی‌توان بی‌نهایت عدد گویا را نوشت و گفت این هم بی‌نهایت عدد گویا بین $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$!

پارسا: چرا نمی‌شود؟ خوب هم می‌شود چون همهٔ جوابها را ساخته‌ایم. ولی اگر تو را قانع نمی‌کند می‌توانیم این‌طور استدلال کنیم: اگر اعداد گویایی که از $\frac{a}{b}$ بزرگ‌تر و از $\frac{c}{d}$ کوچک‌تر هستند متناهی باشند کوچک‌ترین آن‌ها را در نظر می‌گیریم و آن را $\frac{e}{f}$ می‌نامیم. بنابراین فرض $\frac{a}{b}<\frac{e}{f}<\frac{c}{d}$ و هیچ عدد گویای دیگری بین $\frac{e}{f}$ و $\frac{a}{b}$ نیست. اما این بنابر استدلال شما اشکال دارد. چون $\frac{a}{b}<\frac{a+e}{b+f}<\frac{e}{f}$. پس فرض متناهی بودن تناقض دارد.

فعالیت

در مورد گویا و گنگ‌بودن حاصل عبارت‌های زیر تصمیم بگیرید

= عددی گنگ + عددی گنگ   = عددی گویا + عددی گویا

= عددی گنگ −   = عددی گنگ + عددی گویا

اشکان و ساسان و هخامنش با هم به بحث پرداختند. آنها از مثالهای خاص شروع کردند و سعی کردند با تعمیم آنها گزاره‌هایی کلی به‌دست آورند.

اشکان: $\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۳}$ را حساب می‌کنیم

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۳}=\frac{۳}{۶}+\frac{۴}{۶}=\frac{۷}{۶}$$

می‌بینیم که حاصل عددی گویاست. پس جمع دو عدد گویا یک عدد گویا می‌شود.

ساسان: این که استدلال نشد. فقط مثال زدی. آمدیم و دو عدد گویای دیگر را جمع کردیم و حاصل گنگ شد. آن‌وقت چه می‌گویی؟

هخامنش: فرض کنیم دو عدد گویای دلخواه $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ داده شده باشند.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

اگر a، b، c و d اعدادی صحیح باشند ad + bc هم صحیح است و bd هم صحیح است. ناصفربودن مخرج‌های $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ نتیجه می‌دهد که مخرج $\frac{ad+bc}{ad}$ هم ناصفر است. پس یک عدد گویای تمام‌عیار به‌دست آورده‌ایم. یعنی جمع هر دو عدد گویا یک عدد گویاست.

اشکان: حال به جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ بپردازیم. مثلاً $\sqrt{۲}+\frac{۱}{۲}$ گویاست یا گنگ؟

ساسان: این‌جا که حدس قبلی نداریم مثال زدن خوب است. اما باز یادت باشد که این اثبات نمی‌کند.

هخامنش: ما برای اثبات گنگ بودن $\sqrt{۲}$ آن را برابر $\frac{p}{q}$ گرفتیم و به تناقض رسیدیم. همین‌کار را می‌توان این‌جا هم کرد. اگر $\sqrt{۲}+\frac{۱}{۲}$ گویا باشد آن‌گاه

$$\frac{۱}{۲}+\sqrt{۲}=\frac{p}{q}$$

$$\sqrt{۲}=\frac{p}{q}-\frac{۱}{۲}=\frac{۲p-q}{۲q}$$

پس در این‌صورت $\sqrt{۲}$ هم گویا خواهد بود که این یک تناقض است.

اشکان: من می‌توانم استدال هخامنش را در حالت کلی در نظر بگیرم. فرض کنیم $\frac{a}{b}$ عددی گویا و α عددی گنگ باشد. اگر $\frac{a}{b}+\alpha$ گویا باشد آن‌گاه

$$\frac{a}{b}+\alpha=\frac{c}{d}$$

$$\alpha=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=\frac{cb-ad}{db}$$

در این‌صورت α هم عددی گویا خواهد بود. چون تفاضل $\frac{c}{d}$ و $\frac{a}{b}$ که دو عدد گویا هستند خود یک عدد گویاست. اما این تناقض است. چون از اوّل فرض را بر این گذاشتیم که α گنگ باشد نه گویا. بنابراین فرض گویا بودن $\frac{a}{b}+\alpha$ به تناقض انجامید. پس $\frac{a}{b}+\alpha$ گنگ است.

ساسان: یعنی

عددی گنگ= عددی گنگ + عددی گویا

هخامنش: همین استدلال اشکان می‌گوید.

عددی گنگ = عددی گنگ −

چرا که اگر گویا باشد، ناچار خود عدد گنگ هم مجبور است گویا باشد و این تناقض است. پس $-\sqrt{۲}$ هم گنگ است.

اشکان: حال باید در مورد گنگ‌بودن مجموع اعداد گنگ تصمیم بگیریم. مثلاً $\sqrt{۲}+\sqrt{۲}$ گنگ است یا گویا؟

ساسان : یک مثال کافی نیست. بگذار من چند تا مثال بزنم.

$$-\sqrt{۲}+(\frac{۱}{۲}+\sqrt{۲})=\frac{۱}{۲}$$

$$\sqrt{۲}+\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}$$

$$-\sqrt{۲}+(۱+۲\sqrt{۲})=۱+\sqrt{۲}$$

به نظر می‌رسد که از همین عدد گنگ $\sqrt{۲}$ می‌توان اعداد گنگ دیگری ساخت که مجموع آن‌ها به دلخواه گویا یا گنگ بشود. پس با توجه به این مثالها نمی‌توان در مورد گویا یا گنگ‌بودن مجموع دو عدد گنگ حرفی زد.

اشکان : درست می‌گویی. یک مثال برای حدسیه‌سازی کافی نیست. نیاز به چندین مثال داریم. اگر مثالها کم باشند ممکن است گول بخوریم و الگوی صحیح را نتوانیم از آنها بیرون بکشیم.

هخامنش : در مورد اعداد گنگ چیز زیادی نمی‌دانیم.

امّا برای اعداد حقیقی می‌توان تقسیم‌بندی زیر را انجام داد.

خود را بیازمایید

در مورد گویا یا گنگ بودن اعداد زیر تصمیم بگیرید.

$$\frac{۵}{۷}\sqrt{۳} \qquad \sqrt{۲}+\sqrt{۳}$$

$$\frac{۲}{۳}\sqrt{۴} \qquad ۲\sqrt{۲}$$

خود را بیازمایید

نشان دهید بین هر دو عدد گنگ یک عدد گنگ وجود دارد. آیا می‌توانید بگویید که چرا بین هر دو عدد گنگ بی‌نهایت عدد گنگ یافت می‌شود؟

خود را بیازمایید

توان صحیح a^n را برای عدد گویای a چگونه تعریف می‌کنید؟ آیا خاصیت $(ab)^n=a^nb^n$ برای هر a و b گویا هنوز برقرار است؟

اگر عدد گویای a یا b منفی باشد، چطور؟

- اعداد حقیقی
  - اعداد گویا
    - اعداد صحیح
      - اعداد صحیح مثبت $۱،۲،۳،\ldots$
      - اعداد صحیح منفی $-۱،-۲،-۳،\ldots$
    - اعداد گویای غیرصحیح $\frac{۱}{۸},\frac{-۴}{۳},\ldots$
  - اعداد گنگ $\sqrt{۲},-\sqrt{۳},\pi,\frac{۱}{۲}+\sqrt{۲}$

اعداد رادیکالی

فعالیت

می‌دانیم که اعداد $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt{۳}$ را می‌توان روی محور اعداد نمایش داد. بنابراین می‌توان با روشهای هندسی $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ را روی محور اعداد به‌دست آورد. اما آیا می‌توان این اعداد را در هم ضرب کرد $\sqrt{۳}\times\sqrt{۲}$ یا برهم تقسیم نمود $\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$ و به‌طور کلی آیا می‌توان آنها را مانند اعداد دیگر در محاسبات وارد کرد؟ $\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۳}-۲}$

مسعود و سعید که در مورد اشیاء ریاضی که تازه به آن برخورد می‌کنند بسیار کنجکاوند، سعی کردند برای $\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}$ معنی مناسبی پیدا کنند.

مسعود : هرکدام از این اعداد نمایش اعشاری دارند. هرچند نمی‌توان یک عدد اعشاری نامتناهی را در یک عدد اعشاری نامتناهی ضرب کرد ولی می‌توان حاصلضرب آنها را تخمین زد. در مورد خارج قسمت هم همینطور.

$\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}=?$

$۱/۴\times۱/۷=۲/۳۸$

$۱/۴۱\times۱/۷۳=۲/۴۳۹۳$

$۱/۴۱۴\times۱/۷۳۲=۲/۴۴۹۰۴۸$

$۱/۴۱۴۲\times۱/۷۳۲۰=۲/۴۴۹۳۹۴۴$

$۱/۴۱۴۲۱\times۱/۷۳۲۰۵=۲/۴۴۹۴۸۲۴۳$

$\sqrt{۲}/\sqrt{۳}=?$

$۱/۴/۱/۷=۰/۸۲۳۵۲۹۴$

$۱/۴۱/۱/۷۳=۰/۸۱۵۰۲۸۹$

$۱/۴۱۴/۱/۷۳۲=۰/۸۱۶۳۹۷۲$

$۱/۴۱۴۲/۱/۷۳۲۰=۰/۸۱۶۵۱۲۷$

$۱/۴۱۴۲۱/۱/۷۳۲۰۵=۰/۸۱۶۴۹۴۹$

پس می‌توان نوشت

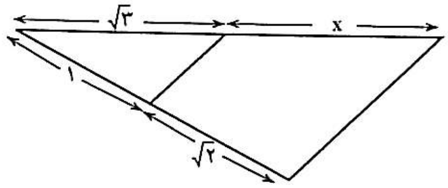
$$\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}\approx۲/۴۴۹$$
$$\sqrt{۲}/\sqrt{۳}\approx۰/۸۱۶$$

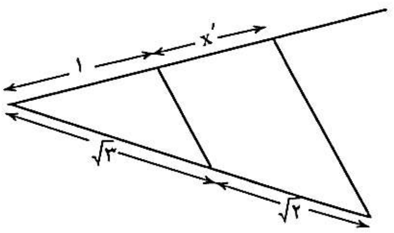
چون هرچقدر حاصلضرب را با تقریب بیشتری حساب کنیم این چند رقم اولیه تغییر نمی‌کند.

سعید : این استدلال نشان می‌دهد که $\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}$ وجود دارد، یا اینکه $\sqrt{۲}/\sqrt{۳}$ می‌تواند به‌عنوان یک عدد درنظر گرفته شود. باید کمی تلاش کنیم. شاید بتوانیم پاره‌خطی به طول $\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$ یا $\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}$ بسازیم.

مسعود : شاید قضیه تالس بتواند کمک کند.

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۳}}{x}$$





$$x=\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}$$
$$\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}=\frac{۱}{x'}$$
$$x'\times\sqrt{۳}=\sqrt{۲}$$
$$x'=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$$

اما این کار بدرد محاسبه نمی‌خورد. کاش می‌توانستیم راهی پیدا کنیم که $\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}$ و $\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$ را بدون ضرب و تقسیم محاسبه کنیم.

سعید : همین که توانستیم پاره‌خطهایی به طول $\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}$ و $\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$ رسم کنیم نشان می‌دهد که چنین اعدادی وجود دارند. بنابراین می‌توان با آنها محاسبه کرد. مثلاً می‌نویسیم.

$$(\sqrt{۲}\times\sqrt{۳})^{۲}=(\sqrt{۲}\times\sqrt{۳})\times(\sqrt{۲}\times\sqrt{۳})$$
$$=(\sqrt{۲}\times\sqrt{۲})\times(\sqrt{۳}\times\sqrt{۳})=۲\times۳=۶$$

پس $\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}$ عددی است که اگر درخودش ضرب شود می‌شود ۶ بنابراین $\sqrt{۲}\sqrt{۳}=\sqrt{۶}$ به‌همین روش می‌توان نشان داد :

$$\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}=\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

خود را بیازماییم

نشان دهید برای اعداد مثبت a و b داریم :

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

با کمک روابط بالا می‌توان بسیاری از عبارت‌های رادیکالی را ساده کرد. مثلاً

$$\sqrt{۰/۰۳}=\sqrt{\frac{۳}{۱۰۰}}=\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۱۰۰}}=\frac{\sqrt{۳}}{۱۰}$$

$$\sqrt{۱۰}\sqrt{۴۵}=\sqrt{۲\times ۵}\sqrt{۳^{۲}\times ۵}=\sqrt{۲\times ۳^{۲}\times ۵^{۲}}=۱۵\sqrt{۲}$$

خود را بیازماییم

عبارت‌های رادیکالی زیر را به ساده‌ترین شکل بنویسید.

$$\sqrt{۳۲} \qquad \sqrt{۱۰۸} \qquad \sqrt{\frac{۷۵}{۱۶}} \qquad \sqrt{۰/۰۹}$$

$$\sqrt{۱۲}-\sqrt{۲۷}+\sqrt{\frac{۳}{۴}}$$

$$(۲\sqrt{۲}+۵\sqrt{۳})(۳\sqrt{۲}-\sqrt{۳})$$

$$\sqrt{۸}+\sqrt{۱۸}-\sqrt{۷۲}$$

$$\sqrt{۲۰}-۳\sqrt{۲}-\sqrt{\frac{۵}{۹}}+\sqrt{۵۰}$$

$$(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{۲}$$

$$(۳\sqrt{۲}+\sqrt{۳})(۲\sqrt{۳}-\sqrt{۲})$$

فعالیت

اعداد زیر را به‌ترتیب از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

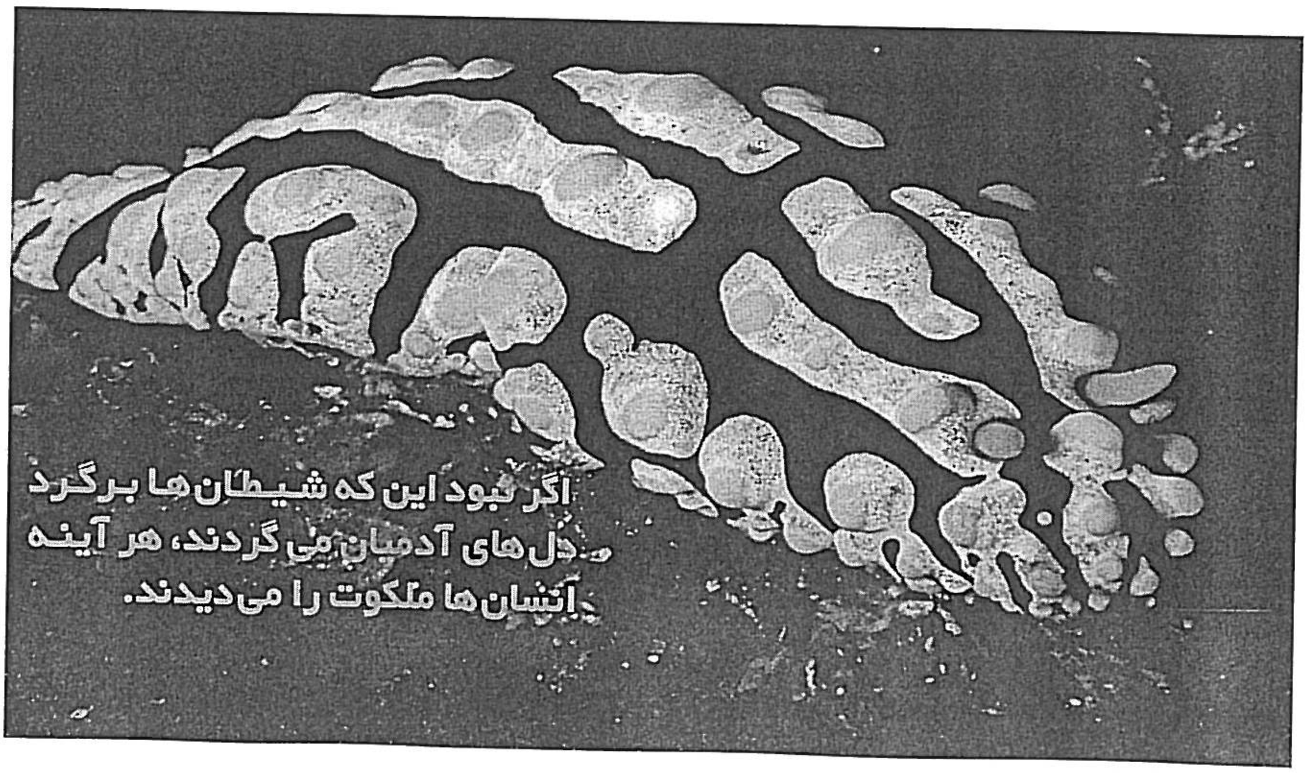
$$۱+\sqrt{۲}\ ,\ \sqrt{۷}\ ,\ ۱-\sqrt{۲}\ ,\ \sqrt{۳}\ ,\ \sqrt{۲}$$

عاطفه و نیکی با تقریب زدن با کمک اعشار اعداد بالا را مرتب کردند.

عاطفه : باید هریک از این اعداد را با یک عدد اعشاری تقریب بزنیم. پس ابتدا باید $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۷}$ را به تقریب محاسبه کنیم.

بنابراین

$$\sqrt{۲}=۱/۴۱۴۲۱۳۵$$
$$\sqrt{۳}=۱/۷۳۲۰۵۰۸$$
$$\sqrt{۷}=۲/۶۴۵۷۵۱۳$$
$$۱+\sqrt{۲}=۲/۴۱۴۲۱۳۵$$
$$۱-\sqrt{۲}=-۰/۴۱۴۲۱۳۵$$



پس این اعداد به ترتیب از این قرارند

$$۱-\sqrt{۲}\ ,\ \sqrt{۲}\ ,\ \sqrt{۳}\ ,\ ۱+\sqrt{۲}\ ,\ \sqrt{۷}$$

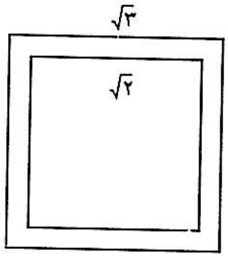
نیکی : اما این روش فقط به درد کسی می‌خورد که ماشین حساب دارد. اگر کسی ماشین حساب نداشته باشد، محاسبه تقریبی $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۷}$ کلی دردسر دارد. برای همین باید روشی پیدا کنیم که از همین اعداد رادیکالی کمک بگیرد. مثلاً $\sqrt{۳} > \sqrt{۲}$ زیرا $۳ > ۲$ و $(\sqrt{۲})^۲ = ۲$ و $(\sqrt{۳})^۲ = ۳$

عاطفه : این که دلیل نمی‌شود.

نیکی : چرا دلیل می‌شود اگر یک مربع به ضلع $\sqrt{۲}$ داشته باشیم و یک مربع به ضلع $\sqrt{۳}$ مساحت هرکدام چقدر می‌شود؟

عاطفه : اولی مساحت ۲ و دومی مساحت ۳ دارد.

نیکی : مربع اوّل مساحتش از مربع دوم کوچکتر است. پس طول ضلعش هم کوچکتر است.



عاطفه : بسیار خوب بنابراین $\sqrt{۳} > \sqrt{۲}$

نیکی : حتی بیشتر $\sqrt{۷} > \sqrt{۳} > \sqrt{۲}$. از همین راه می‌توان جای $۱+\sqrt{۲}$ را حساب کرد.

$۱+\sqrt{۲}\ \boxed{?}\ \sqrt{۷}$

$(۱+\sqrt{۲})^۲\ \boxed{?}\ ۷$

$(۱+\sqrt{۲})^۲ = (۱+\sqrt{۲})(۱+\sqrt{۲}) = ۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۲}+۲$

$= ۳+۲\sqrt{۷}$

$۳+۲\sqrt{۲}\ \boxed{?}\ ۷$

$۲\sqrt{۲}\ \boxed{?}\ ۴$

$\sqrt{۲}\ \boxed{?}\ ۲$

اما می‌دانیم $۲ > \sqrt{۲}$ پس می‌نویسیم

$\sqrt{۲} < ۲ \Rightarrow ۲\sqrt{۲} < ۴ \Rightarrow ۳+۲\sqrt{۲} < ۷$

$\Rightarrow (۱+\sqrt{۲})^۲ < ۷ \Rightarrow ۱+\sqrt{۲} < \sqrt{۷}$

همین‌طور می‌توان $۱+\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ را مقایسه کرد

$۱+\sqrt{۲}\ \boxed{?}\ \sqrt{۳}$

$(۱+\sqrt{۲})^۲\ \boxed{?}\ ۳$

$۳+۲\sqrt{۲}\ \boxed{?}\ ۳$

$۲\sqrt{۲}\ \boxed{?}\ ۰$

اما می‌دانیم $۲\sqrt{۲} > ۰$ بنابراین

$۳+۲\sqrt{۲} > ۳ \Rightarrow (۱+\sqrt{۲})^۲ > ۳$

$\Rightarrow ۱+\sqrt{۲} > \sqrt{۳}$

عاطفه : روش تو خیلی جالب است. به ماشین حساب هم احتیاجی ندارد. اما برای $۱-\sqrt{۲}$ کار نمی‌کند. چون $۱-\sqrt{۲}$ عددی منفی است و نمی‌تواند طول ضلع یک مربع باشد.

نیکی : اشکالی ندارد همین که منفی است به ما می‌گوید که از $\sqrt{۲}$ کوچکتر است پس

$$۱-\sqrt{۲} < \sqrt{۲} < \sqrt{۳} < ۱+\sqrt{۲} < \sqrt{۷}$$

عاطفه : در هر حال باید در این روش دقت کنیم که هر عدد رادیکالی مثبت است یا منفی!

خود را بیازماییم

کدام اعداد رادیکالی زیر مثبت و کدام منفی هستند.

$\sqrt{۷}-۲\sqrt{۲}$ $\qquad$ $۲-\sqrt{۳}$

$۳\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳}$ $\qquad$ $\sqrt{۳}-\frac{\sqrt{۷}}{۲}$

خود را بیازماییم

مقادیر زیر را مقایسه نمایید.

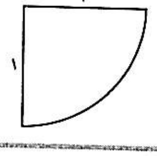
$۲\sqrt{۷}, ۳\sqrt{۳}$

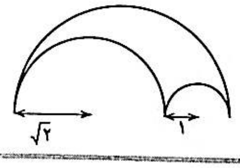
$۲+\sqrt{۶}, ۲\sqrt{۵}$

$۱+\sqrt{۳}, \sqrt{۷}$

خود را بیازماییم

محیط و مساحت هریک از شکلهای زیر را محاسبه نمایید.

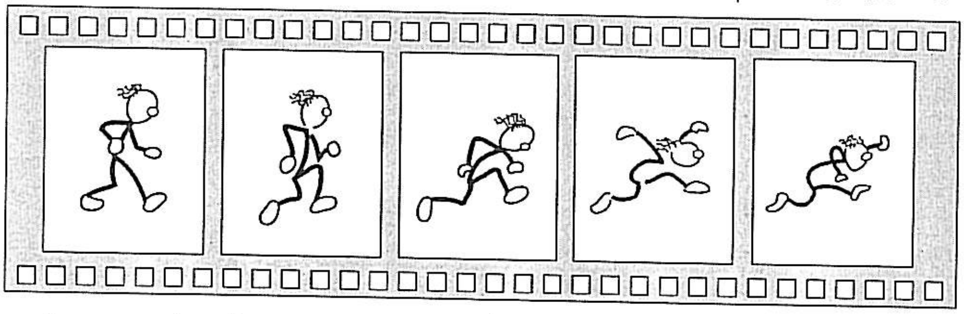




۲ـ۵ـ محور اعداد حقیقی

فعالیت

در تصویر زیر نوار فیلم دویدن یک دونده را مشاهده می‌کنید.



در هر تصویر حالتی از دونده حک شده است. اگر این تصاویر در پی هم نمایش داده شوند شما دونده‌ای در حال حرکت را در ذهن خود مجسم می‌کنید. کارتون‌ها را هم همین‌طور می‌سازند. دنباله‌ای از تصاویر متحرک در ذهن، توهم حرکات واقعی را به‌وجود می‌آورند.

در گوشه‌ی یکی از دفترهای خود روی هر صفحه یک تصویر بکشید به‌طوری که پشت سر هم قرار گرفتن آن‌ها نظمی را بوجود بیاورد. سپس اوراق را به سرعت از معرض دید بگذرانید به‌طوری که تصاویر متحرک به‌نظر برسند. می‌توانید از آخر کتاب شروع کنید و قسمت‌های تکراری هر صفحه را از صفحات قبل کپی کنید. این‌طور تصاویر شما دقیق‌تر خواهند بود. به سؤالات زیر پاسخ دهید :

۱ـ این که تصاویر یکی‌یکی و از هم جدا هستند امّا در شما تصور حرکت را بوجود می‌آورند به شما چه می‌آموزد.

۲ـ تصاویر را با ترتیب معکوس از معرض دید خود بگذرانید چه می‌بینید؟

۳ـ با توجه به آزمایش‌هایی که انجام دادید چه مدلی برای زمان پیشنهاد می‌کنید؟ جدا جدا یا پیوسته؟ محدود یا نامحدود؟ جهت‌دار یا بی‌جهت؟

فعالیت

برای بررسی دقیق حرکت، خوب است بتوانیم به هر فاصله از مبدأ حرکت یک عدد نسبت دهیم. آن وقت خواهیم توانست حرکت را به زبان اعداد بررسی کنیم. برای همین دوست داریم هر نقطه روی محور اعداد نماینده یک عدد باشد. توجه کنید که محور اعداد مدلی هندسی برای اعداد حقیقی است. اما تنها مدل ممکن نیست. مثلاً نمایش اعشاری اعداد حقیقی یک مدل عددی برای همان طولهای هندسی روی محور اعداد است.

با کمک بردارها مدلی برای اعداد حقیقی بسازید.

جواد و مجید این مسئله را بررسی کردند. آنها تلاش می‌کنند مدلی ریاضی برای اعداد حقیقی بسازند و ضعفها و قوتهای مدل خود را بشناسند.

جواد : بردارها در محور اعداد حقیقی زندگی می‌کنند. هرکدام نقطه‌ی شروع و نقطه‌ی پایان دارند. اما یک تفاوت عمده با عددها دارند و آن این است که برای نمایش و کار آنها به مبدأ مختصات نیاز نداریم.

مجید : به هر عدد حقیقی روی محور اعداد می‌توان یک بردار نسبت داد که از مبدأ شروع می‌شود و در آن نقطه که نماینده‌ی عدد حقیقی است خاتمه می‌یابد. ولی هر بردار دیگری با همین طول و جهت با این بردار برابر است. می‌توان دید که جمع بردارها مدلی برای جمع اعداد حقیقی است. یعنی اگر به نقطه X روی محور اعداد به مبدأ O بردار $\overrightarrow{OX}$ را نسبت دهیم و به نقطه Y بردار $\overrightarrow{OY}$ را و اگر $Z = X + Y$ که در این‌جا جمع همان جمع اعداد حقیقی است، آن‌گاه $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}$ که در این‌جا جمع همان جمع بردارهاست.

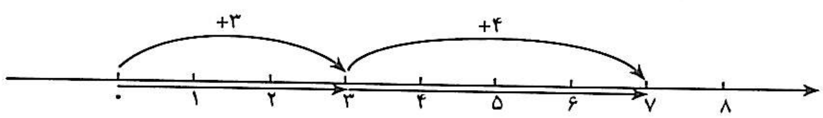
جواد : درواقع چیزی که توضیح می‌دهی همان مدل جمع با فلش روی محور اعداد است که در دبستان می‌خواندیم. می‌توان هر فلش را به‌عنوان یک انتقال تصور کرد به‌جز این که اگر بخواهیم درست عمل کنیم باید فلشها را مستقیم رسم نماییم.

مجید : حال بیا ببینیم این مدل برداری که در دبستان خواندیم چه خواصی از اعداد را به ارث می‌برد.

جواد : جمع و تفریق با اندازه و جهت بردارها به‌راحتی مدلسازی می‌شوند. برای تفریق باید بردارهایی با خلاف جهت محور اعداد حقیقی درنظر بگیریم. ولی به‌نظر ضرب و تقسیم مشکل‌ساز باشند. چون چه‌طور می‌توان دو تا بردار را که نمایش دهندهٔ دو انتقال هستند درهم ضرب کرد؟ به‌نظر من این کار اگر هم شدنی باشد خیلی پیچیده است و ما بدنبال یک مدل ساده برای اعداد نیستیم.

مجید :ولی برای تقسیم می‌توان فکری کرد. هر دو بردار $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ در محور اعداد هم راستا هستند. برای همین می‌توان عدد حقیقی k پیدا کرد که $k\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$ یعنی اگر بردار $\overrightarrow{a}$ را k برابر کنیم بردار $\overrightarrow{b}$ به‌دست بیاید. اگر $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ هم‌جهت باشند k را مثبت و اگر در دو جهت مخالف باشند k را منفی می‌گیریم.

جواد : ولی این تقسیم تو بدرد ما نمی‌خورد. چون خارج قسمت دو بردار یک بردار نیست بلکه یک عدد حقیقی k است. اما ما این را نمی‌خواستیم. به‌نظر می‌رسد بردارها فقط برای ساختمان اعداد همراه با جمع و تفریق مدل مناسبی هستند. یعنی اگر بخواهیم ضرب و تقسیم را هم وارد کنیم بردارها مدل خوبی نیستند.



فعالیت

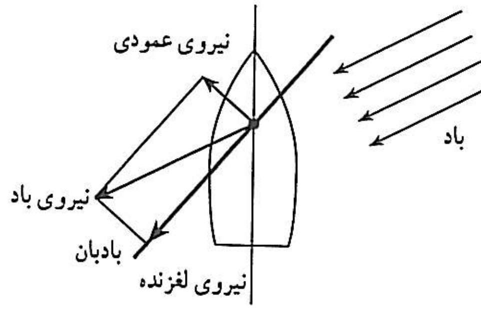
پدیده‌های مختلفی در اطراف خود مشاهده می‌کنید. کدام یک از آن‌ها با کمک اعداد راحت‌تر مدلسازی می‌شوند و کدام یک با کمک بردارها؟

سهراب : اگر من نیم ساعت منتظر کسی باشم که با او قرار داشته‌ام و بار دیگر یک ساعت منتظر او باشم می‌توانم بگویم که جمعاً یک ساعت و نیم وقت خود را تلف کرده‌ام. اگر یک کیلو انگور خریده باشم و بعد نیم‌کیلوی دیگر هم بخرم می‌توانم بگویم که جمعاً یک کیلو و نیم انگور خریده‌ام. ولی اگر بگوییم از تهران تا مشهد ۱۰۰۰ کیلومتر است و از مشهد تا زاهدان ۱۰۰۰ کیلومتر است، از این نتیجه نمی‌شود که از تهران تا زاهدان ۲۰۰۰ کیلومتر است. چون این‌جا هم فاصله‌ها مهم است و هم جهت‌ها. برای همین اگر برداری داشته باشیم که از تهران شروع می‌شود و در مشهد خاتمه می‌یابد و بردار دیگری که از مشهد آغاز می‌شود و تا زاهدان ادامه می‌یابد با جمع آن‌ها هم می‌دانیم که زاهدان چه‌قدر با تهران فاصله دارد و هم می‌دانیم نسبت به تهران در چه جهتی قرار دارد.

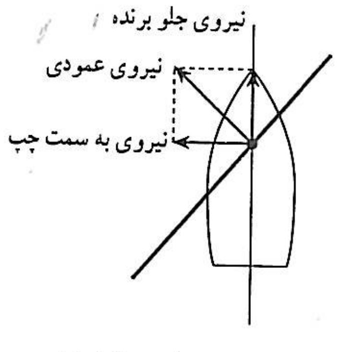
سپهر : اگر هنگام گذشتن از رودخانه‌ای با قایق به سمت ساحل دیگر پارو بزنیم، در نقطه پایین‌تری از رودخانه به‌سمت دیگر می‌رسیم. چون آب رودخانه حرکت می‌کند و ما را در رودخانه به سمت پایین می‌برد. هرچه سرعت آب رودخانه بیشتر باشد، در نقطه پایین‌تری به ساحل دیگر خواهیم رسید و هرچه سرعت ما بیشتر باشد زودتر به طرف دیگر می‌رسیم. پس کمتر در رودخانه پایین می‌رویم. این نشان می‌دهد که اندازه و جهت سرعت حرکت ما، و آب رودخانه هر دو مهم هستند. پس سرعت یک کمیّت برداری است.

سهیل : شبیه همین پدیده را من در قطار دیده‌ام. حرکت قطرات باران در هوای آرام و بدون باد کج دیده می‌شود. انگار که بادی از مقابل قطار می‌وزد و آنها را کج می‌کند. در صورتی که در هوای آرام قطره‌های باران باید به‌صورت عمودی پایین بیایند. در این‌جا هم سرعت حرکت قطره آب نسبت به ما برداری است که از بردار سرعت حرکت قطره نسبت به زمین و بردار سرعت قطار نسبت به زمین به‌دست می‌آید.

سامان : نیرو هم مانند حرکت کمیتی برداری است چون همیشه در جهت معینی عمل می‌کند. مثلاً بادی که قایق را به‌حرکت درمی‌آورد به بادبان نیرو وارد می‌کند. این نیرو بخشی به بادبان فشار عمودی وارد می‌کند و بخشی دیگر نیروی موازی است که به آن فشاری وارد نمی‌کند.



همین نیروی عمودی که بر بادبان وارد می‌شود بخشی قایق را به جلو می‌برد و بخشی دیگر قایق را به چپ و راست می‌راند که با مقاومت آب مواجه می‌شود.



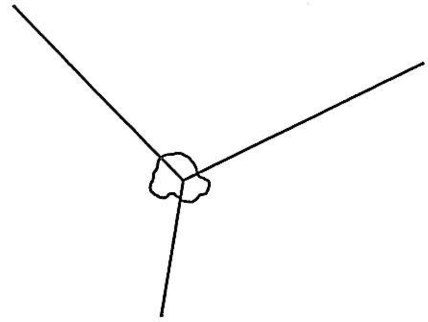
به خاطر همین نیروی جلو برنده که شکل قایق هم با آن هماهنگی دارد قایق به جلو می‌رود.

برای همین است که قایق‌های بادبانی با حرکت زیگزاگ می‌توانند در خلاف جهت باد حرکت کنند. فقط دو نکته را باید رعایت کنند. اوّل این‌که باد همیشه بادبان را تحت زاویه عمود بر سطح آن می‌راند. دوم این که قایق نه در جهتی که باد آن را می‌راند، بلکه در جهتی که نوک قایق رو به آن قرار دارد رانده می‌شود.

سهند : من به بردار بودن نیرو طور دیگری پی بردم. و آن این‌که بالا بردن فرغون روی سطح شیب‌دار بسیار آسان‌تر از بالا بردن آن به‌طور عمودی است.

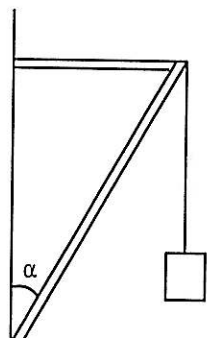
خود را بیازماییم

جسمی با سه طناب دو بدو زاویه 120° می‌سازند با نیروهای مساوی به سه طرف کشیده می‌شود. جسم به کدام سمت حرکت می‌کند؟



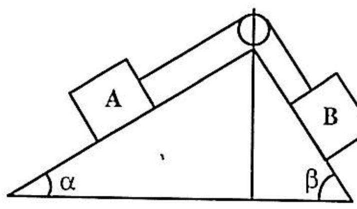
خود را بیازماییم

وزنه‌ای مطابق شکل به یک آویز دیواری آویخته شده است. وزنه به کدام بازو نیروی بیشتری وارد می‌کند؟ چه‌قدر بیش‌تر؟



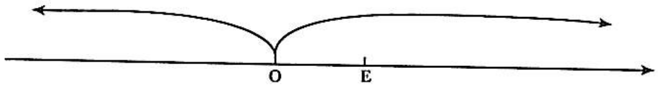
خود را بیازماییم

دو جسم با وزن‌های مساوی مطابق شکل با یک طناب که از روی یک قرقرهٔ بدون وزن می‌گذرد با هم وصل شده‌اند. طناب به کدام یک نیروی بیشتری وارد می‌کند؟ چند برابر بیشتر؟

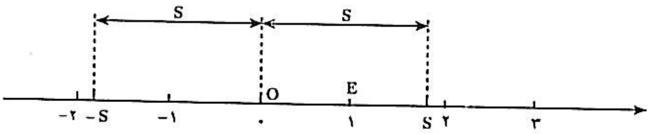


استدلال جبری و محور اعداد حقیقی

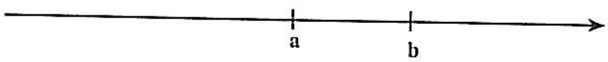
نقاط O و E را روی یک خط راست در نظر بگیرید. نقطهٔ O خط راست را به دو نیم‌خط تقسیم می‌کند. صرف‌نظر از نقطه O قسمتی را که شامل E است جهت مثبت و جهت دیگر را جهت منفی می‌نامیم.



نقطه O را با عدد صفر متناظر می‌کنیم. اگر OE را طول واحد بگیریم، آنگاه به هر نقطه در جهت مثبت می‌توان یک عدد مثبت مانند S نسبت داد. این عدد فاصله آن نقطه تا مبدأ O است. اگر نقطه‌ای با همان فاصله از نقطه O در جهت منفی باشد به آن عدد S− را نسبت می‌دهیم.



این‌طور به هر نقطه روی محور اعداد عدد یکتایی نسبت داده‌ایم. اعدادی که با نقاط روی محور اعداد مشخص می‌شوند اعداد حقیقی نام دارند. اعداد روی محور افقی اعداد که سمت‌راست مبدأ قرار دارند اعداد مثبت و اعدادی که سمت‌چپ مبدأ قرار دارند اعداد منفی هستند. اگر a و b دو نقطه روی محور اعداد باشند و b سمت‌راست a باشد می‌گوییم b بزرگ‌تر از a است یا می‌گوییم a کوچک‌تر از b است و این را با نماد $a < b$ یا $b > a$ نمایش می‌دهیم. ترکیب دو حالت $a < b$ یا $a = b$ را با نماد $a \leq b$ نمایش داده می‌شود. نماد $a < b$ معنای مشابهی دارد.



اگر a مثبت باشد می‌نویسیم $a > 0$

اگر a منفی باشد می‌نویسیم $a < 0$

I) برای هر دو عدد حقیقی a و b. فقط یکی از این سه حالت $a < b$ ، $b < a$ یا $a = b$ اتفاق می‌افتد. می‌توانید این را با قراردادن a، b روی محور تحقیق کنید.

II) $b < a$ و $c < b \Leftarrow c < a$. این نکته را نیز روی محور تحقیق کنید.

استدلال جبری و قدر مطلق

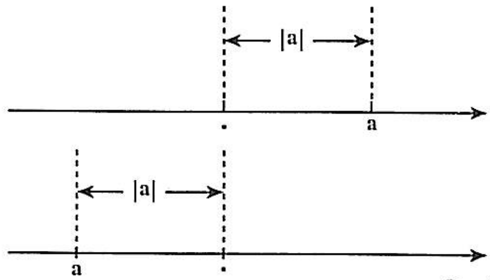
فاصله نقطه a از مبدأ را مقدار مطلق عدد a می‌نامند.

مقدار مطلق ۳ برابر ۳ و مقدار مطلق ۳- هم برابر ۳ است

مقدار مطلق ۰ برابر ۰ است

مقدار مطلق عدد حقیقی a را با $|a|$ نمایش می‌دهیم.

مثال: $|۳| = ۳$ و $|-۳| = ۳$ و $|۰| = ۰$



خود را بیازماییم

جملات زیر را محاسبه کنید

۱) $|۸|$ ۲) $|-۱۰|$ ۳) $|۲/۵|$ ۴) $\left|-\frac{۱}{۳}\right|$ ۵) $\left|\frac{۵}{۶}\right|$

خود را بیازماییم

عدد حقیقی x را پیدا کنید چنان که $|x| = ۷$

فعالیت

مقدار مطلق اعداد حقیقی دارای خواص زیر است.

۱) $a \geq ۰ \Leftarrow |a| = a$

۲) $a < ۰ \Leftarrow |a| = -a$

۳) برای هر عدد حقیقی a داریم $|a| \geq ۰$

۴) $|a| = ۰$ فقط وقتی درست است که $a = ۰$.

این خصوصیات را با استدلال ثابت کنید. اما باید بسیار مراقب باشید. به‌سادگی ممکن است خطا کنید. سپس ثابت کنید معادله مقابل برای هر عدد حقیقی a برقرار است: $|-a| = |a|$

عادل برای اثبات تساوی بالا چنین استدلال کرد: a و a- هر دو در یک فاصله از مبدأ O هستند. پس فاصله همان مقدار مطلق a و a- است که با هم مساوی هستند.

پارسا که دقیق‌تر بود گفت: استدلال عادل به‌نظر من صحیح است؛ امّا برای این که اطمینان بیشتری داشته باشیم بهتر است از زبان ریاضی استفاده کنیم.

معادله را در دو حالت درنظر می‌گیریم $a \geq ۰$ یا $a < ۰$.

I) برای $a \geq ۰$ از آنجا که $-a \leq ۰$ داریم

$|a| = a$ و $|-a| = -(-a) = a$

II) برای $a < ۰$ در آن‌جا که $-a > ۰$ داریم $|a| = -a$ و $|-a| = -a$.

پس در هر دو حالت داریم $|-a| = |a|$.

خود را بیازماییم

ثابت کنید معادلهٔ زیر برای هر عدد حقیقی a برقرار است: $a^۲ = |a|^۲$.

شما چه استدلالی برای اثبات این رابطه ارائه می‌کنید؟

خود را بیازماییم

آیا رابطه $a + |a| \geq ۰$ برای هر a برقرار است؟ درصورت صحت این رابطه آن را به اثبات برسانید.

استدلال با کمک قوانین

جمع و ضرب اعداد حقیقی در قوانین زیر صدق می‌کنند :

قانون جابه‌جایی : $a+b=b+a$ و $ab=ba$

قانون شرکت‌پذیری :

$(a+b)+c=a+(b+c)$ و $(ab)c=a(bc)$

قانون توزیع‌پذیری :

$(a+b)c=ac+bc$ و $a(b+c)=ab+ac$

مثلاً $2+3=3+2$ و $2\times3=3\times2$

مثلاً $2+(3+4)=(2+3)+4$ و $(2\times2)\times3=2\times(2\times3)$

مثلاً $2\times(3+4)=2\times3+2\times4$ و

$(2+3)\times4=2\times4+3\times4$

تساوی (=) نیز از قوانین جبری پیروی می‌کند.

I) برای هر عدد حقیقی c داریم $a+c=b+c \Leftarrow a=b$

II) برای $c\neq0$ داریم $ac=bc \Leftarrow a=b$ و $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$

نامساوی (>) نیز همانند مساوی از قوانینی جبری پیروی می‌کند.

I′) برای هر عدد حقیقی c، $a+c>b+c \Leftarrow a>b$

II′) برای $c>0$ ، $ac>bc \Leftarrow a>b$ و $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

II″) برای $c<0$ ، $ac<bc \Leftarrow a>b$ و $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

می‌توان از این قوانین در استدلال استفاده نمود.

برای مثال : برای هر $a>0$ و $b>0$ داریم $a+b>0$.

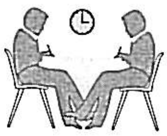
برای اثبات درستی این ادعا چنین استدلال می‌کنیم.

از $a>0$ بنابر I داریم $a+b>b$. از طرفی $b>0$

بنابراین $a+b>0$

خود را بیازماییم

ثابت کنید : اگر $a<0$ و $b<0$ آنگاه $a+b<0$



فعالیت

ضرب و تقسیم اعداد حقیقی در قوانین زیر صدق می‌کنند.

(۱) $\frac{a}{b}>0\ ,\ ab>0 \Leftarrow b>0\ ,\ a>0$

(۲) $\frac{a}{b}<0\ ,\ ab<0 \Leftarrow b<0\ ,\ a>0$

(۳) $\frac{a}{b}<0\ ,\ ab<0 \Leftarrow b>0\ ,\ a<0$

(۴) $\frac{a}{b}>0\ ,\ ab>0 \Leftarrow b<0\ ,\ a<0$

می‌توان برای رابطه (۱) چنین استدلال آورد که اگر $a>0$ و $b>0$ بنابر خاصیت II در بالا با ضرب دو طرف $a>0$ در b داریم $ab>0$ و با تقسیم دو طرف $a>0$ بر b داریم $\frac{a}{b}>0$

حال برای خواص (۲) الی (۴) استدلال بیاورید. می‌توانید از محور اعداد کمک بگیرید.

هنگام استدلال باید به نکات زیر توجه کرد.

۱ــ در هر مورد که نتیجه‌گیری می‌کنیم باید مشخص کنیم که از کدام قانون استفاده می‌کنیم.

۲ــ برای نشان‌دادن درستی یک ادعا از آنچه در حال اثبات آن هستید استفاده نکنید.

۳ــ می‌توانید از روابط و قوانینی که قبلاً ثابت کرده‌اید استفاده کنید به شرط آن که قبلاً برای اثبات آن قوانین از آنچه در حال اثبات آن هستید استفاده نکرده باشید.

خود را بیازماییم

از (۱) و (۲) استفاده کنید و نشان دهید که $\frac{1}{a}>0 \Leftarrow a>0$ و $\frac{1}{a}<0 \Leftarrow a<0$

از خواص (۱) الی (۴) استفاده کنید و نشان دهید همواره $a^2\geq0$ و رابطه $a^2=0$ تنها وقتی برقرار است که $a=0$.

خود را بیازماییم

ثابت کنید اگر a و b اعداد مثبت حقیقی باشند $\frac{1}{a}<\frac{1}{b} \Leftarrow a>b$

فعالیت

ثابت کنید اگر برای اعداد حقیقی a و b داشته باشیم $a^2+b^2=0$ خواهیم داشت $a=b=0$.

امین با دقت در حالتهای خاص مسئله سعی کرد الگویی برای حل مسئله بیابد.

امین چنین استدلال کرد: اوّل صحت این رابطه را با چند مثال بررسی کردم.

a	b	a^2+b^2
0	1	$0^2+1^2=1$
-2	3	$(-2)^2+3^2=13$
-1	1	$(-1)^2+1^2=2$
-3	1	$(-3)^2+1^2=10$

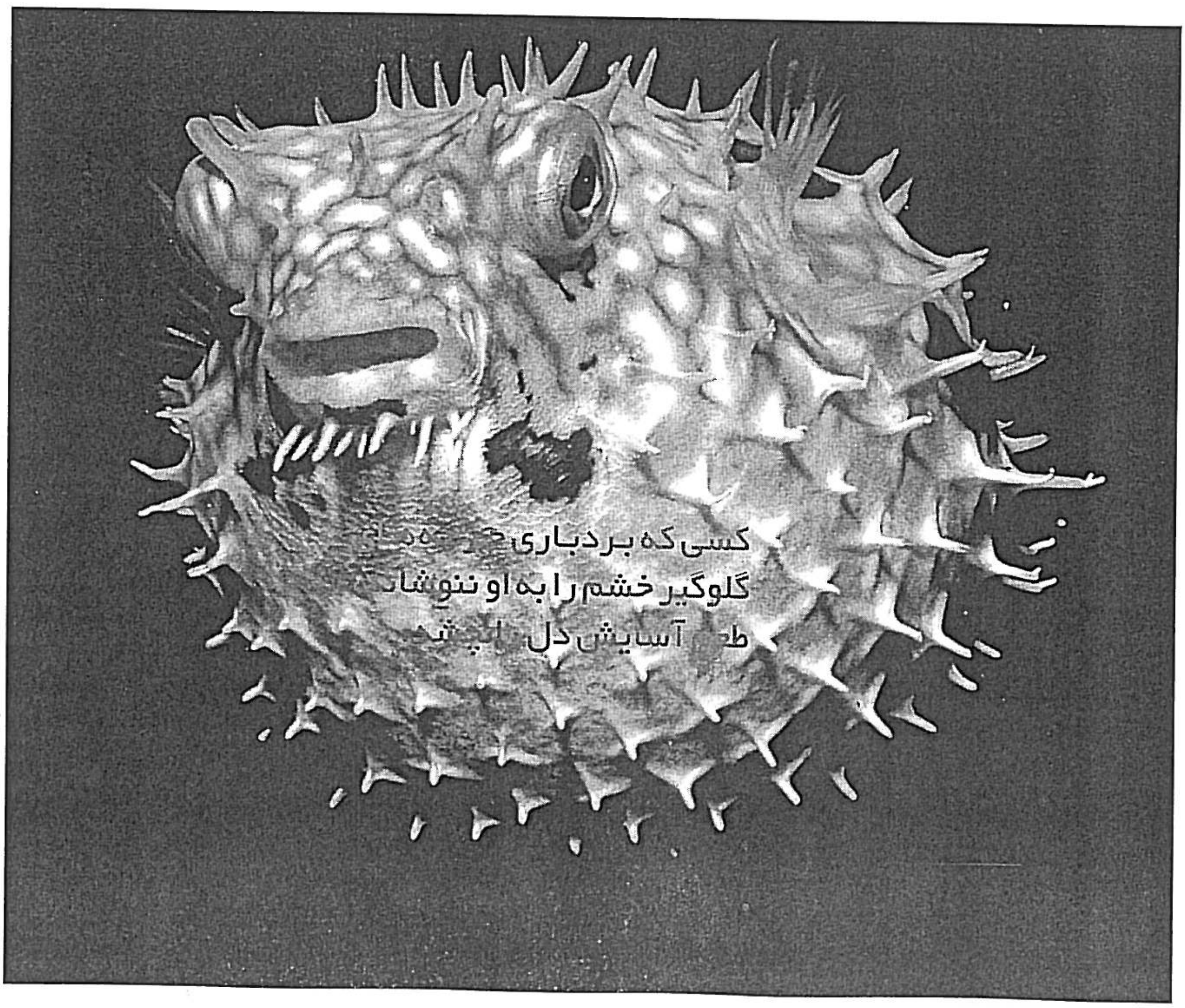
این نکته توجهم را جلب کرد که همواره اعداد مثبتی برای a^2+b^2 به‌دست می‌آید. به یاد مسئله قبل افتادم که نشان دادیم $a^2 \ge 0$. پس داریم $a^2+b^2 \ge b^2 \ge 0$ امّا فرض، این است که $a^2+b^2=0$. پس $0=a^2+b^2 \ge b^2 \ge 0$.

روابط $b^2 \ge 0$، $0 \le b^2$ هر دو برقرارند. بناچار $b^2=0$. باز هم بنابر مسئله قبل نتیجه می‌گیریم $b=0$. اگر b را در رابطه $a^2+b^2=0$ جایگذاری کنیم داریم $a^2+0=0$ و باز هم بنا بر مسئله قبل نتیجه می‌گیریم $a=0$. بنابراین $a=b=0$.

خود را بیازماییم

ثابت کنید اگر برای a و b حقیقی داشته باشیم $(a-1)^2+(b-2)^2=0$ آنگاه داریم $a=1$ و $b=2$.

حال که با نامساوی‌ها و تساوی‌های اعداد حقیقی کار کردید شهود بهتری از این که یک عدد حقیقی چیست دارید. امّا محور اعداد حقیقی تنها مدلی نیست که برای بررسی اعداد حقیقی مطرح شده است. می‌توان مدلهای دیگری برای اعداد حقیقی ساخت.



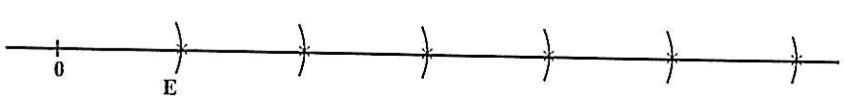
۲ـ۶ـ اعداد را بسازیم

فعالیت

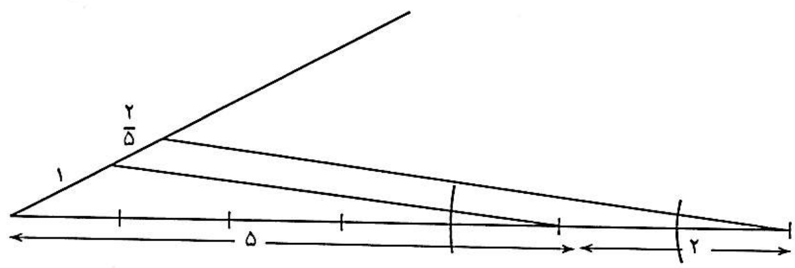
فرض کنید یک خط‌کش غیر مدرج و یک پرگار در اختیار دارید. یک محور اعداد رسم کنید و نقطه‌ای را روی آن به‌عنوان مبدأ انتخاب کنید و آن را O بنامید. پاره‌خط OE را به‌طول دلخواهتان درنظر بگیرید و آن را واحد طول بگیرید. حال سعی کنید با استفاده از خط‌کش و پرگار اعدادی را که می‌شناسید روی محور پیدا کنید.

کلاس مشغول بررسی شدند. پس از چند دقیقه چند نفر از دانش‌آموزان ادّعا کردند که نتایجی به‌دست آورده‌اند و قسمتی از مسئله را حل کرده‌اند. سعی کنید روش حل هر یک را حدس بزنید و اگر می‌توانید راه حل دیگری به‌دست بدهید :

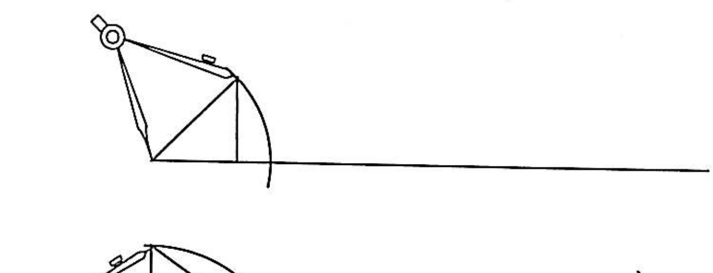
علی ادّعا کرد : من می‌توانم تنها با استفاده از پرگار هر عدد صحیح را روی محور نشان دهم. هرچند اگر این عدد دور از مبدأ باشد این کار زمان زیادی می‌برد. سعی کردم روشی پیدا کنم که در کمترین مراحل ممکن یک عدد صحیح را روی محور مشخص کند. اما در این کار موفق نشدم.

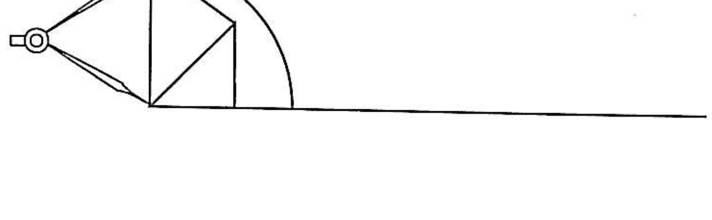


صادق ادامه داد : من با استفاده از آنچه علی انجام داده است و با استفاده از خط‌کش و پرگار، با کمک قضیه تالس می‌توانم هر عدد گویا را روی محور پیدا کنم.

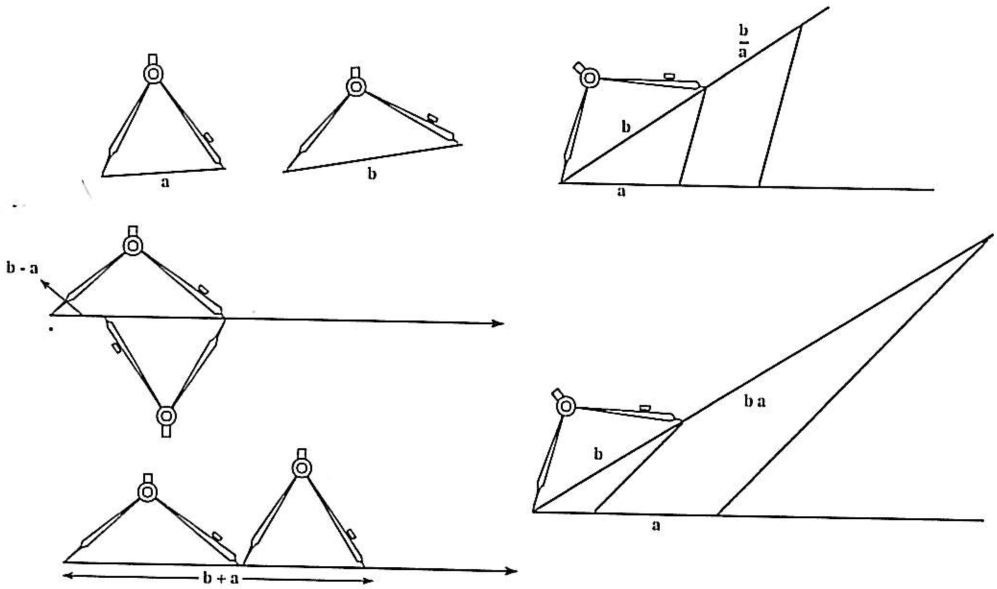


رضا گفت : اگر کسی به من یاد دهد چگونه با خط‌کش و پرگار زاویهٔ قائمه رسم کنم، خواهم توانست اعدادی مانند $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$ و به‌طور کلی ریشه دوّم هر عدد طبیعی را روی محور رسم کنم.

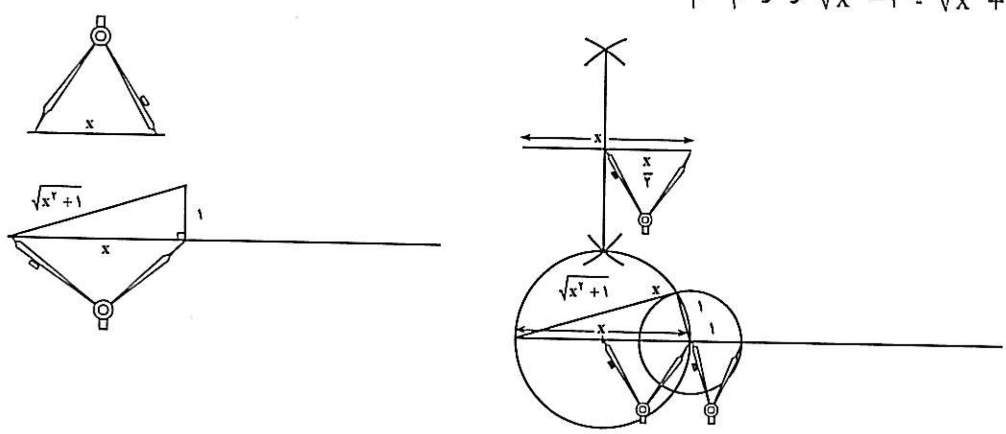




حسین ایدهٔ دیگری داشت : من فکر کردم که بهترین کار این است که روشی پیدا کنم تا از روی طول‌های داده شده بتوان طول‌های جدیدی تولید کرد. من توانستم با در دست داشتن دو طول داده شده مجموع، تفاضل، حاصلضرب و خارج قسمت آن طول‌ها را رسم نمایم.



مهدی گفت : حسین و رضا روش‌هایی ارائه کردند که با کمک آنها می‌توانم با داشتن طول x طولی برابر $\sqrt{x^{۲}+۱}$ یا $\sqrt{x^{۲}-۱}$ را رسم کنم.



مهدی : همه این تلاشها مرا به فکر وا می‌دارد که آیا می‌توان همه‌ی عددها را با خط‌کش و پرگار رسم کرد؟ مثلاً دوست دارم بدانم آیا می‌توان پاره‌خطی به طول π ساخت. اگر هم بشود باید کار بسیار مشکلی باشد. نمی‌شود بی‌حساب دست به‌کار شد. تا ندانم این مسئله چقدر جدّی است و یا اصلاً قابل حل است، دلم راضی نمی‌شود روی آن فکر کنم.

معلم پاسخ داد : قدم گذاشتن در دنیای ناشناخته‌ها بدون شک مرارت دارد. نمی‌توان بدون زحمت و سخت‌کوشی به جایی رسید. هرچند دغدغه شما هم درست است.

خود را بیازماییم

هریک از اعداد زیر را با روش‌های بالا رسم نمایید.

$\frac{۲\sqrt{۷}-۱}{\sqrt{۲}}$ $\qquad$ $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ $\qquad$ $۵\sqrt{۳}$ $\qquad$ $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$

معلم ادامه داد: ریاضیدانان بزرگی روی این مسئله فکر کرده‌اند که چگونه می‌توان طولی برابر π به‌دست آورد. از بین ریاضیدانان عهد باستان تلاش‌های ارشمیدس از همه درخشان‌تر است. ارشمیدس در ریاضیات استاد مسلّم و بی گفت‌وگوی همه بوده است. او عاشق هندسه بود. هر زمینی که از شن پوشیده شده بود یا جایی که خاک نمناک وجود داشت برای او به منزله‌ی تخته‌سیاه به‌کار می‌رفت و در مواردی هنگامی که کنار آتشی می‌نشست خاکستر آن را خارج می‌کرد و به ترسیم اشکال می‌پرداخت. چون از حمام خارج می‌شد و به رسم یونانیان بر تن خود روغن می‌مالید، به‌جای اینکه پس از آن لباس بر تن کند با ناخن بر پوست خویش اعداد و اشکال رسم می‌کرد. او اختراعات بسیاری هم داشت. ازجمله آن‌هاست اهرم‌ها و قرقره‌های مرکبی که منجر به جرثقیل‌های چنگال‌دار بزرگی شد که کشتی‌های دشمن را از روی آب بلند می‌کردند. یا آینه‌های کاو که به‌وسیله‌ی آن‌ها نیمی از کشتی‌های رومیان را آتش زد. یا منجنیق‌های پرتاب سنگ که سلاح کارآمدی هنگام جنگ بود. با این همه، او همیشه به اختراعاتش با نظر تخفیف می‌نگریست. شاید هم حق داشت. چون با همه‌ی کاربرد، اختراعاتش با عظمت تحقیقات ریاضی او قابل مقایسه نیستند. او را یکی از بزرگ‌ترین ریاضیدانان قرون و اعصار می‌دانند. او با روش‌های هندسی عدد π را تا دو رقم اعشار به‌دست آورد. اگر شما هم بتوانید این کار را بکنید به شرط آن که راه حل آن را قبلاً ندیده باشید از ارشمیدس هیچ چیزی کم ندارید. برای دست گرمی با یک فعالیت ساده‌تر شروع می‌کنیم.

فعالیت

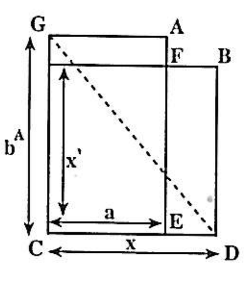
مربعی با خط‌کش و پرگار رسم نمایید که مساحت آن برابر مساحت مستطیل داده شده باشد. روشی پیشنهاد کنید که تعداد کاربردهای پرگار در آن حداقل باشد.

طه و یس مشغول حل این مسئله شدند. آنها همیشه سعی می‌کردند مسائل را با کمک یکدیگر حل کنند. این‌طور خیلی چیزها را از همدیگر می‌آموختند. و به خیلی اشکالات کار خودشان هم بهتر پی می‌بردند.

طه: این مسئله همان مسئله‌ی رسم طولی است که مربع آن برابر عدد داده شده باشد

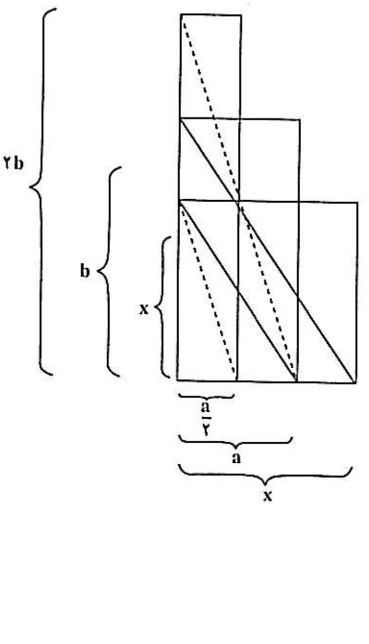
یس: فرض کنیم چنین مربعی پیدا شده باشد. بیا ببینیم درباره آن چه می‌دانیم.

طه: مثلاً می‌توان یک گوشه مربع و مستطیل داده شده را بر هم منطبق کرد.



داریم $ab = x^{۲}$ ، پس $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ پس ΔACE و ΔGCD متشابه هستند. آیا می‌توان از این اطلاعات استفاده کرد؟

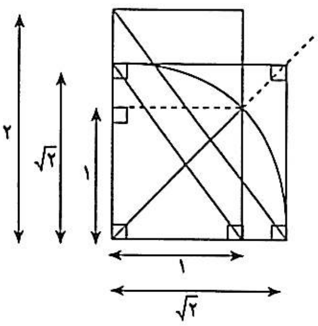
یس: این مربع برای بسیاری مستطیل‌ها جواب مسئله است. مثلاً اگر طول را دو برابر و عرض را نصف کنیم به این مستطیل‌ها همان مربع نسبت داده می‌شود.



طه: سعی داری چکار کنی؟

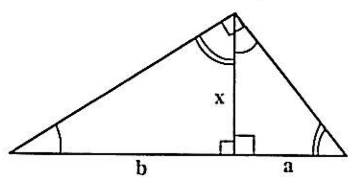
یس: می‌خواهم از روی شکل ببینم چه چیزهایی ثابت و چه چیزهایی متغیر هستند. مثلاً فاصله‌ی خطوط موازی در مثلث‌های متشابه به روشنی مقدار ثابتی نیست و با تغییر مستطیل اوّل، تغییر می‌کند. ولی هنوز موفق نمی‌شوم نظم خاصی پیدا کنم.

طه: بیا حالت‌های خاص را بررسی کنیم. مثلاً همین طول $\sqrt{۲}$ را درنظر بگیر و فرض کن مربعی به ضلع $\sqrt{۲}$ داری که مساحت آن با مساحت مستطیل به طول و عرض ۲ و ۱ برابر است.

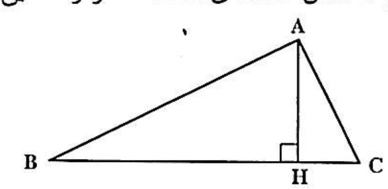


حال: ببینیم که چه نظمی در این شکل هست. شاید بتوان آن را به حالت‌های کلی‌تر تعمیم داد. چون به دنبال مربع یک طول هستیم زاویه‌های قائمه اهمیّت دارند. برای همین همهٔ آن‌ها را در شکل مشخص کردم. زاویه‌هایی هم که متمم هستند اهمیت پیدا می‌کنند. آنها را هم مشخص کردم.

یس: دو مثلث قائم‌الزاویه کلیدی داریم یکی به ضلع‌های x و a و دیگری x و b که با هم متشابهند. می‌توان با کنار هم گذاشتن آنها مثلثی بزرگ‌تر درست کرد و از روی زاویه‌های متمم می‌بینیم که این مثلث قائم‌الزاویه است.



طه: این که همان مسئله‌ای است که در راهنمایی داشتیم

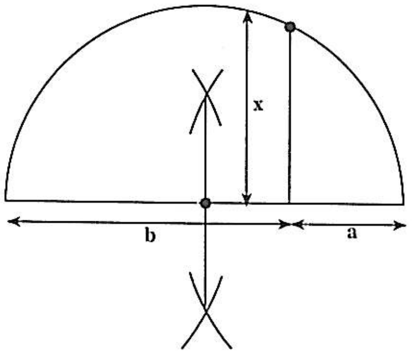


ΔAHC و ΔAHB متشابهند پس $\frac{AH}{HC}=\frac{BH}{AH}$ و

بنابراین $AH^{۲} = BH\times HC$

این همان رابطه $x^{۲} = ab$ است.

یس: برای رسم طول x طول‌های a و b را کنار هم رسم می‌کنیم و با رسم عمودمنصف وسط آن را پیدا می‌کنیم و به مرکز این نقطه و شعاع $\frac{a+b}{۲}$ دایره‌ای می‌زنیم. با اخراج عمودی از محل تقاطع پاره‌خط‌های به طول a و b طول x به دست آمده است.



خود را بیازماییم

با استفاده از خط‌کش و پرگار رسم‌های زیر را انجام دهید

الف ــ مثلثی برابر با مثلث داده شده رسم کنید.

ب ــ زاویه‌ای برابر با زاویه داده شده رسم کنید.

ج ــ از نقطه روی یک خط عمودی اخراج کنید.

د ــ از نقطه‌ای خارج خط عمودی بر خط وارد کنید.

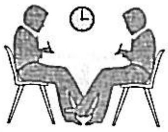
هـ ــ از نقطه‌ای خارج خط، خطی موازی آن بگذرانید.

و ــ برای طول داده شده x طول $\sqrt{x}$ را رسم کنید.

ز ــ مربعی به طول ضلع داده شده رسم کنید.

ح ــ یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع داده شده رسم کنید.

در هریک از موارد بالا استدلالی برای درستی رسم خود ارائه کنید.



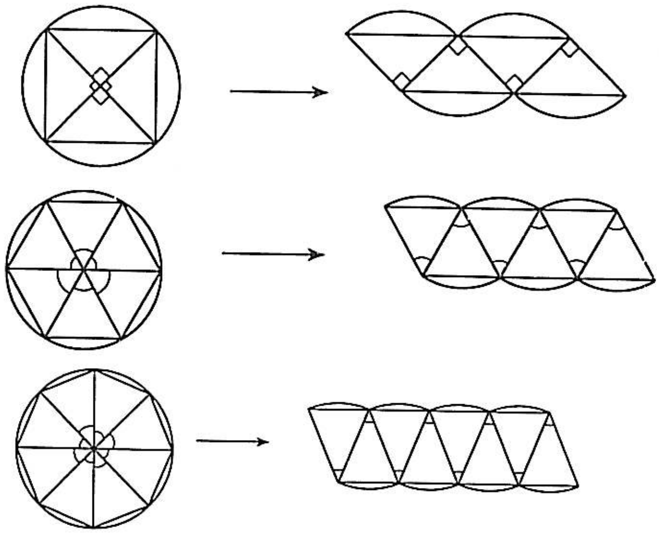
فعالیت

با خط‌کش و پرگار شکلی رسم کنید که مساحت آن برابر عدد π باشد.

مهدی با شنیدن این مسئله به هیجان آمد ؛ اما بلافاصله پاسخ آن را یافت : این که خیلی ساده است؛ دایره‌ای به شعاع واحد مساحتش همان عدد π است.

معلم : حدس شما درست است. امّا باید حدس خود را ثابت کنید.

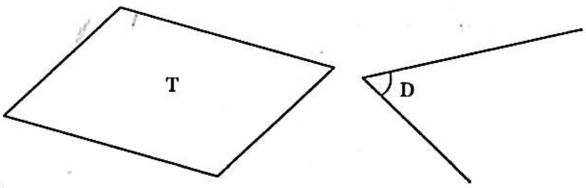
مهدی : این را در سال‌های قبل خوانده‌ایم. مساحت دایره‌ای به شعاع r برابر πr^2 است. اثبات آن را به‌خاطر دارم. کافی است به شکل‌های زیر توجه کنیم.

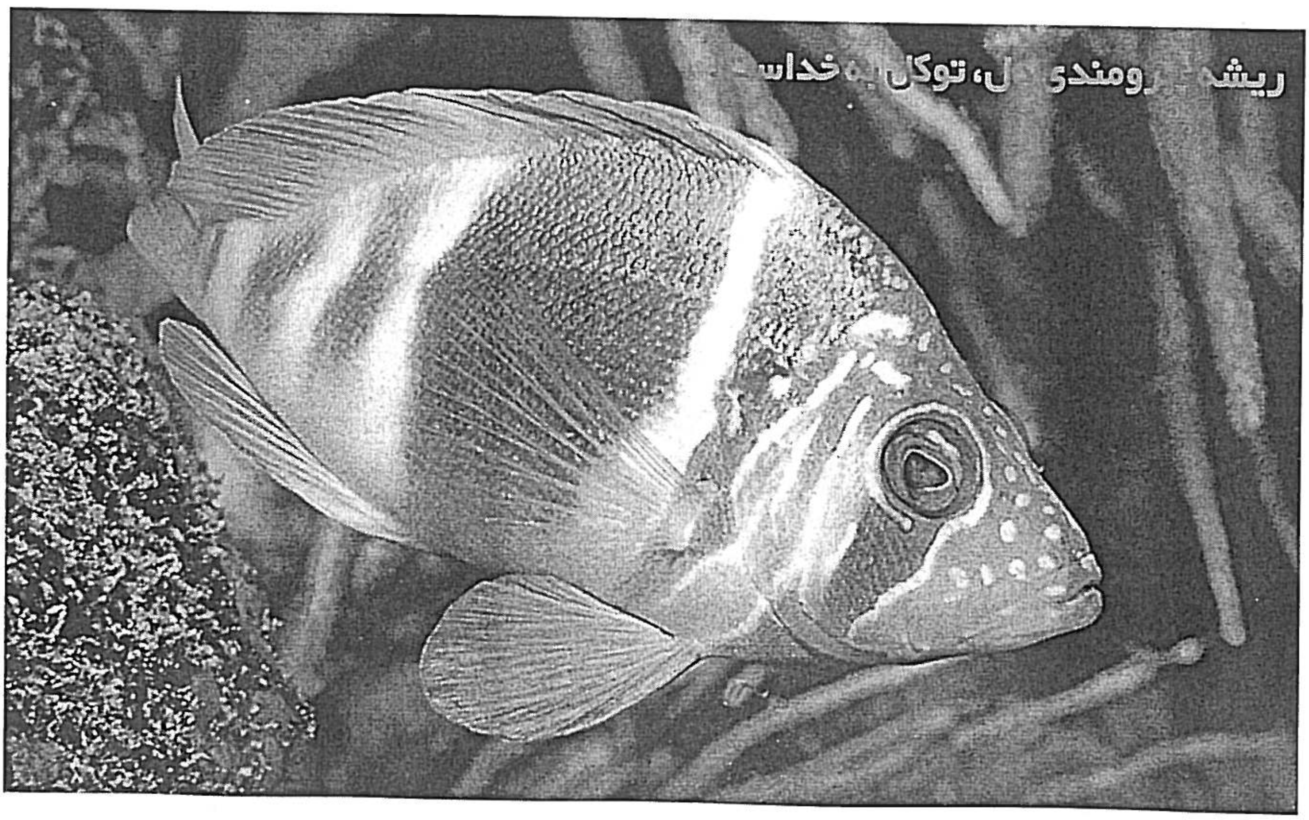


هرچه‌قدر تعداد ضلع‌ها را بیشتر کنیم مساحت چند ضلعی به مساحت دایره نزدیک‌تر می‌شود. همین‌طور مساحت برش‌هایی که کنار هم چیده شده به متوازی‌الاضلاعی به ارتفاع r و به طول ضلع نصف محیط یعنی πr نزدیک می‌شود. اگر تعداد برش‌ها را بی‌نهایت زیاد کنیم به‌دست می‌آوریم که مساحت دایره برابر πr^2 است. البته تا بحال در هیچ استدلالی بی‌نهایت مرحله نداشته‌ایم. حالا که فکر می‌کنم می‌بینم که این اثبات دیگر مرا قانع نمی‌کند. باید چاره‌ای دیگر اندیشید.

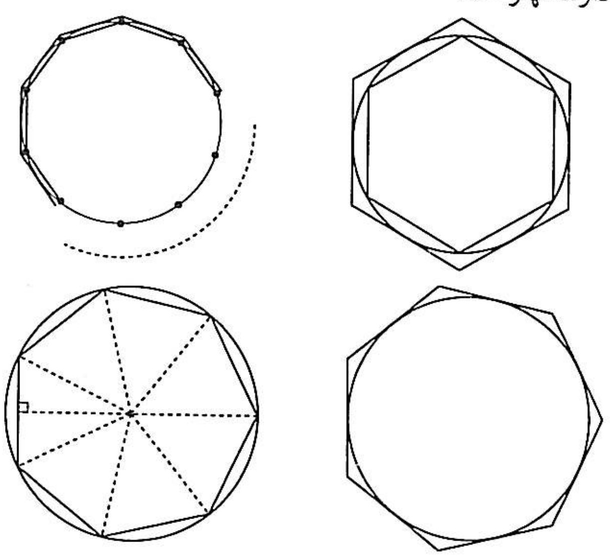
خود را بیازماییم

با خط‌کش و پرگار متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که یک زاویه‌ی آن برابر زاویه داده شدهٔ D و مساحت آن برابر مساحت متوازی‌الاضلاع داده شدهٔ T باشد

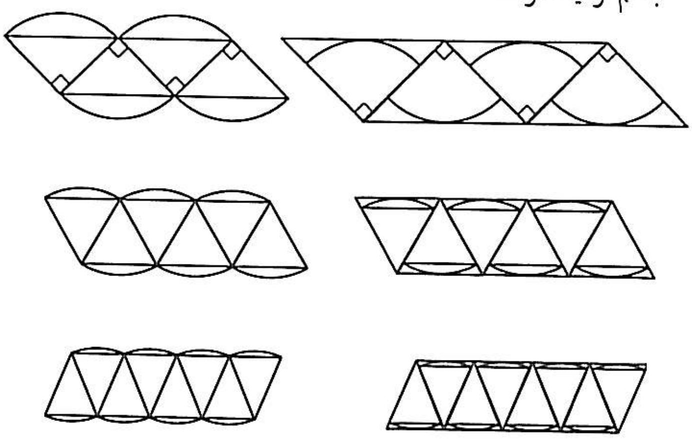




معلم: غیاث‌الدین جمشید کاشانی ریاضیدان بزرگ ایرانی کسی است که می‌تواند شما را قانع کند آنچه در اثبات بالا ادّعا شده مشکلی ندارد. زمانی که او دارفانی را وداع گفت برجسته‌ترین مقام علمی را در مدرسه الهیات و علم که به همت الغ‌بیگ در سمرقند بنیاد نهاده شد به عهده داشت. در آن زمان سمرقند مهم‌ترین مرکز علمی در خاور زمین بود. کاشی اخترشناس بزرگی نیز بود و در ساماندهی رصدخانه با الغ‌بیگ همکاری نزدیک داشت. یکی از کارهای بزرگ کاشی که تا ۲۰۰ سال بی‌رقیب بود محاسبه مقدار 2π تا شانزده رقم اعشاری است. ایده‌ی کاشی چنین است که دایره را بین چند ضلعی‌های منتظم که اضلاع و زوایای مساوی دارند مهار کند.



هرچه تعداد اضلاع بیش‌تر باشد چندضلعی بیرونی و درونی به‌هم نزدیک‌ترند.



می‌بینید که مساحت دایره بین مساحت دو متوازی‌الاضلاع محصور است که با زیاد کردن تعداد ضلع‌ها مساحت هر دو به πr^2 میل می‌کند. کاشی تعبیر جالبی را در کتابش «رسالهٔ محیطیه» که دربارهٔ محاسبه 2π نوشته به‌کار برده است. او می‌گوید که تعداد ضلع‌ها را باید آن‌قدر زیاد کرد تا محیط چندضلعی بیرونی و محیط چندضلعی درونی تفاوتی باریک‌تر از موی اسب داشته باشند. او برای محاسبهٔ 2π از ۸۰۵۳۰۶۳۶۸– ضلعی منتظم کمک گرفت. بی‌شک این محاسبات دقیق در زیج الغ‌بیگ و اعتبار آن نقش مهمی ایفا کرده است.

فعالیت

دست به‌کار شوید و سعی کنید عدد π را با یک عدد اعشاری تقریب بزنید.

خود را بیازماییم

برای کامل شدن اثبات این که مساحت دایره برابر πr^2 است دقیقاً چه چیزی را باید ثابت کنیم؟

خود را بیازماییم

با کمک خط‌کش غیر مدرج و پرگار یک 2^n– ضلعی منتظم بسازید. برای این کار نیاز دارید که با خط‌کش و پرگار زاویه داده شده را با خط به دو نیمهٔ مساوی تقسیم نمایید.

علی اخلاقش این است که برای انجام هر کاری ابتدا نقشه‌ای می‌کشد و سپس دست به عمل می‌زند. او تا جایی که می‌تواند سعی می‌کند از اشیاء اطراف خود استفاده کند. همه می‌گویند که اشیاء ساده‌ی اطراف ما در دست علی تبدیل به ابزارهای نیرومندی می‌شوند که قبلاً اصلاً به‌نظر نمی‌رسید این اشیاء چنین کاربردهایی داشته باشند.

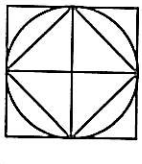
علی پس از چند دقیقه اعلام کرد که برای حل مسئله پیشنهادی دارد و معلم به او اجازه‌ی صحبت داد.

علی : تصمیم گرفتم با یک شیئی که به‌عنوان واحد انتخاب می‌کنم محیط دایره و شعاع آن را به‌طور تقریبی حساب کنم و بعد با استفاده از دستور محیط دایره $P = ۲\pi r$ عدد π را به‌دست بیاورم. فکر کردم چوب کبریت از همه‌چیز مناسب‌تر است چون هم کوچک است و محیط دایره را به‌خوبی تقریب می‌زند و هم به تعداد فراوان یافت می‌شود. می‌توان با گچ و بندکفش دایره بزرگی روی زمین کلاس رسم کرد و قطر آن و محیط آن را با چوب کبریت اندازه‌گیری کرد. هرچه دایره بزرگ‌تر باشد خمیدگی آن کمتر است و خط شکسته‌ای که از چوب کبریت‌ها درست می‌شود به شعاع دایره نزدیک‌تر است.

معلم به علی اجازه داد با کمک چند نفر دیگر نقشه خود را در کلاس به اجرا بگذارد.

علی : قطر دایره‌ای که رسم کرده‌ایم کمی بیش از ۳۵ چوب کبریت است و محیط دایره کمی بیش از ۱۰۹ چوب کبریت است. پس عدد π این‌طور به‌دست می‌آید که تقریباً همان مقداری است که می‌دانیم : $\pi \sim \frac{P}{۲r} = \frac{۱۰۹}{۳۵} \sim ۳/۱۱$

محمد : دایره‌ای به شعاع ۱ در یک مربع ۲×۲ می‌نشیند. بنابراین مساحت دایره از ۴ کمتر است. می‌توان یک مربع $\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}$ درون دایره نشان پس مساحت دایره از ۲ بیشتر است.

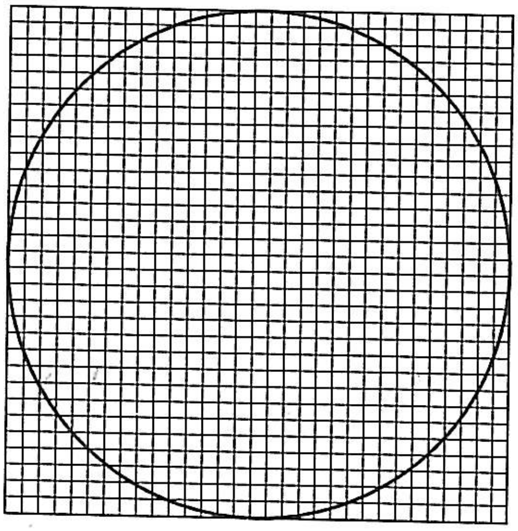


این‌طور می‌بینیم که $۴ > \pi > ۲$. اگر بخواهیم تقریب بهتری به‌دست آوریم می‌توانیم از یک شبکه مربعی استفاده کنیم و مربع‌های داخل دایره و مربع‌هایی که دایره را قطع می‌کنند به دقت بشماریم. مثلاً اگر از یک شبکه ۱۸×۱۸ درون مربع ۲×۲ استفاده کنیم می‌بینیم ۲۷۶ مربع کوچک کاملاً دایره را می‌پوشانند.

پس نتیجه می‌گیریم $\pi < ۲۷۶ \times \frac{۱}{۸۱} \sim ۳/۴۰$

همین‌طور با شمارش مربع‌های کوچکی که کاملاً داخل دایره هستند به‌دست می‌آوریم که مساحت دایره از ۲۱۲ برابر مساحت مربع‌های کوچک بیش‌تر است. پس $\pi < ۲۱۲ \times \frac{۱}{۸۱} \sim ۲/۶۱$

اگر این کار را با شبکه‌ای مربعی با مربع‌های ریزتر انجام دهیم باید بتوانیم به تقریب خوبی برسیم.



خود را بیازماییم

ایدهٔ محمد را به اجراء درآورید و تقریبی از عدد π به‌دست آورید. اگر خوب تلاش کنید خواهید توانست نشان دهید. $۳/۱ < \pi < ۳/۲$

فصل ۳

چگونه مسئله حل کنیم

سِجْزی یکی از پرکارترین هندسه‌دانان قرن چهارم هجری قمری بود. از زندگی او اطلاعات کمی در دست است. نام سجزی حاکی از انتساب وی به سجستان یا همان سیستان امروزی است که در جنوب شرقی ایران واقع است. شواهدی در دست است که سجزی بخشی از عمر خود را در این ناحیه گذراند. او با ابوریحان بیرونی ملاقات داشته است. او اولین کسی است که روش‌هایی برای آموزش حل مسئله پیشنهاد می‌کند. هزار سال پس از او در قرن بیستم پولیا ریاضیدان مجارستانی ایده‌هایی بسیار شبیه به ایده‌های سجزی در آموزش حل مسئله بیان کرد و امروزه در غرب به عنوان یکی از پیش‌کسوتان آموزش ریاضی شناخته می‌شود. شاید پولیا بسیار خوشحال می‌شد اگر می‌دانست هزار سال پیش از او یک ریاضیدان ایرانی به نظرات او اعتقاد داشته است. هدف سجزی این است که قوانینی را برشمارد که با دانستن و فراگرفتن آن‌ها به دست آوردن ترسیم‌های هندسی موردنظر پژوهشگر بر وی آسان شود. او سعی می‌کند شیوه‌هایی را ذکر کند که چون پژوهشگری آن‌ها را درپیش‌گیرد، ذهنش در جنبه‌های مختلف ترسیم شکلها تقویت شود. او درباره آموزش حل مسئله چنین می‌گوید :

«عده‌ای گمان می‌کنند که راهی برای آگاهی از قانونهای به‌دست آوردن شکل‌های جدید، ولو با پژوهش زیاد، تمرین، مطالعه و فراگیری اصول هندسه وجود ندارد. مگر آن‌که شخص دارای استعدادی فطری و ذاتی باشد که او را به کشف شکل‌های هندسی قادر گرداند. چرا که مطالعه و تمرین برای این کار کافی نیست. اما واقعیت چنین نیست. کسانی هستند که توانایی فطری دارند و از قدرت عالی برای یافتن شکل‌های هندسی برخوردارند ولی علم زیادی ندارند و در یادگیری این مطالب کوشا نیستند. اما کسانی هم هستند که کوشش زیاد می‌کنند و اصول و شیوه‌ها را یاد می‌گیرند، ولی توانایی فطری عالی ندارند. اگر کسی استعداد ذاتی و فطری داشته باشد و در مطالعه و تمرین بکوشد، در زمرهٔ دانشمندان طراز اول و برجسته درمی‌آید. اگر توانایی شخص کامل نباشد، اما بکوشد و مطالعه کند می‌تواند از طریق مطالعه به مقام برجسته‌ای نایل شود. اما اگر کسی دارای این قدرت باشد ولی اصول را یاد نگیرد و در ترسیم‌های هندسی تمرین مداوم نکند، به‌هیچ وجه از توانایی خود بهره نخواهد گرفت. چون اوضاع بدین قرار است که گفتیم،اگر کسی تصور کند که کشف هندسی تنها به توانایی ذاتی است و به مطالعه بستگی ندارد، تصورش باطل است.»

سجزی در آسان کردن راه‌های به‌دست آوردن شکلهای هندسی چنین می‌نویسد :

«برکسی که می‌خواهد این رشته را فراگیرد لازم است بر قضایایی که اقلیدس در کتاب اصول خود آورده عمیقاً تسلط یابد. زیرا بین تسلط بر چیزی و خود آن چیز فاصلهٔ عمیقی وجود دارد. همچنین باید تصور کاملی از انواع و خواص شکلها داشته باشد تا وقتی به جستجوی خواص آن‌ها نیاز پیدا کرد به راحتی بتواند آنهارا بیابد. اگر لازم شد پژوهشی انجام دهد، باید مقدمات و قضایایی را که از همان جنس هستند یا وجه اشتراکی با آن دارند، مطالعه و در ذهن خود مجسم کند. مثلاً اگر بخواهیم شکلی مربوط به مثلث به دست آوریم، باید همهٔ خواصی را که در مثلثها هست و قضایایی را که اقلیدس ذکر کرده است، و آنچه از زاویه‌ها و کمانها و ضلعها و خطهای موازی را که به خواص مثلثها مربوط است، در ذهن بیاورید، تا کار بر پژوهشگر آسان شود و بتواند آن شکل را به دست آورد.

بعضی شکلها در یک یا چند ویژگی خاص اشتراک دارند و بعضی دیگر هیچ‌وجه مشترکی ندارند و برخی بسته به شکل، تناسب و جنس آنها وجه اشتراک دور یا نزدیک باهم دارند.

هرگاه بخواهیم شکلی را از مقدمات به دست آوریم (که در اینجا منظور از مقدمه، شکلی است که پیش از آن می‌آید و مبنایی است برای یافتن شکل جدید) و اگر یافتنش از این مقدمه برایمان دشوار باشد، در این‌صورت باید آن را از مقدمه‌ای مربوط به این مقدمه بجوییم، بلکه جستجویمان براساس این قضیه به نتیجه برسد.

پس نتیجه می‌گیریم که اگر شکلی را بتوان از یکی از مقدمات به‌دست آورد، آن را از مقدماتی که به آن مربوط باشند، یا از برخی از آنها برحسب میزان ارتباط، می‌توان به‌دست آورد.

از خواص شکلها آن است که برخی از آنها را می‌توان به‌آسانی از مقدمات گوناگون و به شیوه‌های مختلفی به‌دست آورد و برخی را تنها از یک مقدمه می‌توان به‌دست آورد و برای برخی هیچ مقدمه‌ای وجود ندارد ولو آن که بتوان آن شکل را تجسم کرد یا درستی آن در طبیعت مشهود باشد. این امر نتیجهٔ رابطهٔ نزدیک آن شکل با خواص مقدمات یا تفاوت بین آن شکل و آن مقدمات است.

همچنین، شکلها می‌توانند مقدماتی داشته باشند و مقدمات آنها می‌توانند مقدماتی داشته باشند و مقدمات آنها هم می‌توانند مقدماتی داشته باشند و این شکلها را می‌توان از مقدمات مقدمات به‌دست آورد. این خاصیت نیز از وجوه اشتراک شکلها که ذکر کردیم ناشی می‌شود.

همچنین ممکن است که یافتن شکلها دشوار باشد به خاطر این که نیازمند یافتن یک رشته مقدمات پی‌درپی، از یک یا دو قضیه باشند، چنان که ان‌شاءالله بعداً بیان خواهیم کرد. گاهی هم به قضایای زیاد و مقدمات زیاد نیاز دارند که متوالی نیستند بلکه همه با یکدیگر مرتبطند، چنان که ان‌شاءالله بعداً ذکر خواهیم کرد.

گاهی شیوه‌ای بر پژوهشگر ظاهر می‌شود که با آن به آسانی می‌تواند بسیاری از شکلهای دشوار را به دست آورد. این روش نقل است. ان شاءالله شرح و مثال آن را خواهیم آورد.

شیوهٔ دیگری هم هست که پیروی از آن کار پژوهشگر را

آسان می‌کند. فرض می‌کند مقصود مسئله، چنانچه ترسیم باشد، رسم شده است و چنانچه مقصود جستجوی ویژگی خاصی باشد، آن ویژگی خاص برقرار است. سپس آن را به کمک مقدمات متوالی یا مقدمات مرتبط به هم تحلیل می‌کند، تا آن‌که سرانجام به مقدمات صحیح و درست یا به مقدمات غلط برسد. اگر به مقدمات درست رسید، آنچه مطلوب بود می‌تواند به‌عنوان نتیجه به‌دست آید. اگر به مقدمات غلط برسد، ناممکن بودن آنچه مطلوب بود نتیجه می‌شود. این روش «تحلیل به عکس» خوانده می‌شود. کاربرد این روش از روش‌های دیگر عام‌تر است. ان‌شاءالله بعداً مثالی برای آن خواهیم آورد.

ترکیب عکس تحلیل است. یعنی ترکیب پیمودن راه استدلال به‌سوی نتیجه است با استفاده از مقدمات تحلیل پیمودن راه به‌سوی مقدماتی است که مطلوب از آن‌ها نتیجه می‌شود. کار هندسه این است که مجهول را به کمک آن ترسیم یا معلوم می‌کنند. در اینجا (مجهول) الزاماً یا ترسیمات و یا ویژگی‌های خاص است.

پژوهشگر نخست باید دربارهٔ مسئله و چیزهایی که خواسته شده است تأمل کند. مسئله‌هایی هستند که بذاته و بالطبع امکان‌پذیرند، ولی ما به آن‌ها واقف نیستیم و یا به دست‌آوردن آن‌ها به علت نبود مقدمات ناممکن است...

مسائلی هم هستند که سیاله‌اند و تعداد مثالها یعنی جوابهای آنها بی شمار است. معنی کلمهٔ سیاله آن است که جوابها به وسیلهٔ شرایط کاملی که آنها را از بقیه جدا کند معین نشده‌اند.

شکلهایی هستند که می‌توان آنها را کشف کرد ولی کشف آنها جز با مقدمات زیاد ممکن نیست...

همچنین مسائلی وجود دارد که به تیزهوشی فرد پژوهشگر نیاز دارند، به این صورت که لازم است در آن واحد علاوه بر قضایا و مقدمات، ترسیم‌های زیادی را تجسم کند، ترسیم‌هایی که ویژگی‌هایی خاص را برساند. مردی که این‌گونه در طلب ویژگی‌های خاص است ارشمیدس نامیده می‌شود که تجسم کمال دانش یونانیان است، یعنی مهندس دارای احاطهٔ کامل بر علوم عصر خود.

بر پژوهشگر است که چون قصد یافتن شکلی را دارد، در آغاز به پایان کار بیندیشد و بعکس، چنان که قبلاً گفتیم. بدین ترتیب که در آغاز کار آنچه را مطلوب است فرض کند و آن را نتیجهٔ مقدماتی بداند که شکل را به آنها تحلیل می‌کند.

هندسه‌دانانی در دوران باستان بوده‌اند که وقتی کشف چیزهای مطلوب برایشان دشوار بود شگردهای ظریفی به‌کار می‌بردند؛ مثل آن هندسه‌دان که چیزهای مطلوبش به نسبت مربوط می‌شد و در آنها از اعداد و ضرب استفاده می‌کرد، یا آن هندسه‌دان که مسئله‌اش اندازه‌گیری مساحت یک شکل یا تساوی بین شکلها بود و در این کار از ترسیم آنها بر پارچهٔ نازک یا کاغذ و وزن کردن آنها استفاده می‌کرد یا شگردهای مشابه دیگری به‌کار می‌برد.

اینها شیوه‌های کشف در این فن است. ما آنها را جداگانه برمی‌شماریم تا پژوهشگر با ذهن خود تجسم کند و به خواست خدا و حسن توفیق او. آن‌ها را فراگیرد:

نخست، مهارت و تیزهوشی، و توجه به شرایطی که نظم مناسب مسئله ایجاب می‌کند.

دوم، تسلط عمیق بر قضایا و مقدمات مرتبط با شکل.

سوم، دنبال کردن شیوه‌های مربوط به قضایا و مقدمات به‌نحو عمیق و صحیح، چنان که تنها به قضایا و مقدمات و ترسیمها و نظم آن‌ها که ذکر کردیم متکی نباشد. بلکه همراه با آنها از هوش و گمان و شگردها نیز بهره گیرد. عامل اصلی در این فن، استفاده از شگردهاست و نه فقط با کمک ذهن خود، بلکه همچنین اندیشهٔ ریاضیدانان با تجربه و افراد ماهر و آشنایان به شگردها.

چهارم، آگاهی از وجوه مشترک شکلها، تفاوها و ویژگی‌های خاص آنها. در این نحوهٔ برداشت، ویژگی‌های خاص، مشابهت‌ها و تضادها بدون احتساب قضایا و مقدمات فی‌نفسه درنظر گرفته می‌شوند.

پنجم، به‌کار بردن نقل تبدیل مسئله به مسائل ساده‌تر.

ششم، به‌کار بردن تحلیل.

هفتم، استفاده از شگردها.

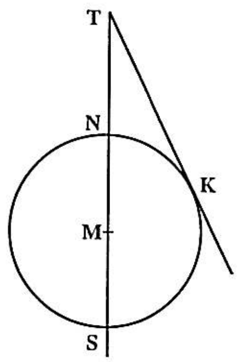
چون این موارد را به‌طور گذرا و آزاد عرضه و ذکر کردیم، اکنون لازم است برای هریک مثالهایی آورده شودتا پژوهشگر به ماهیت واقعی آنها پی ببرد. زیرا دربارهٔ این فن به دو صورت می‌توان سخن گفت: یکی سخن انتزاعی بر سبیل ابهام و تخیل و دیگری به‌صورت عمقی، با توضیحات روشن و عرضهٔ مثالها به‌طوری که کاملاً درک و احساس شود.

«خداوند تبارک و تعالی ما را در کار صحیح موفق بدارد و به راه راست هدایت فرماید.»

۳ـ۱ـ روشهای حل مسائل هندسی

مسئله

خارج دایره‌ای داده شده. نقطه‌ای بیابید به‌طوری که اگر مماسی از آن نقطه بر دایره رسم نماییم و از آن نقطه به مرکز دایره وصل نماییم، دو پاره‌خطی که نقطه را به محیط دایره وصل می‌کنند متناسب با دو پاره‌خط مفروض باشند.



آقای غیور تصمیم گرفت این مسئله را همهٔ کلاس دسته‌جمعی حل کنند. بنابراین هدایت کلاس را به عهده گرفت.

آقای غیور : کسی ایده‌ای برای شروع به ذهنش می‌رسد؟

حامد : من صورت مسئله را درست نمی‌فهمم.

آقای غیور : شکلی رسم کن و نقاط مهم آن را نامگذاری کن. حامد شکلی رسم کرد و سعی کرد صورت مسئله را با آن شکل بهتر بفهمد.

شکل رسم کنید

آقای غیور :چه چیزهایی داده شده‌اند و چه چیزهایی را می‌خواهیم به‌دست آوریم؟

معلوم‌ها و مجهول‌ها را پیدا کنید.

حامد : دایره داده شده است. نقطه T و آنگاه پاره‌خطهای TK و TN را می‌خواهیم به‌دست آوریم.

منصور : نسبت پاره‌خطهای TK و TN نیز داده شده است.

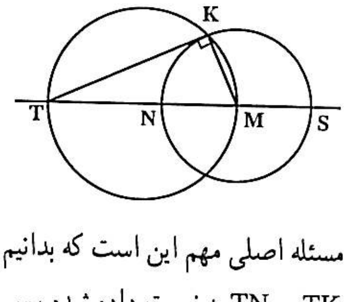
آقای غیور : کدام نقاط مهم در شکل را داریم و کدامها را باید به‌دست بیاوریم؟

منصور : نقاط T و K و N را باید به‌دست آوریم و فقط نقطهٔ M که مرکز دایره است داده شده است.

آقای غیور : فرض کنیم نسبت پاره‌خطهای TK و TN دلخواه باشد چگونه شکل را رسم می‌کنید؟

از فرضیات کم کنید یا فرضیات مناسبی اضافه کنید

رضا : این ساده‌ترین کار است. یک قطر دایره را امتداد می‌دهیم و هر نقطه T روی این امتداد که انتخاب کنیم مماس TK بر دایره و پاره خط TN دو پاره خط می‌دهند که نسبت طول آنها لزوما برابر با نسبت پاره‌خطهای مفروض نیست.



اما در مسئله اصلی مهم این است که بدانیم برای کدام T روی این قطر TK و TN به نسبت داده شده رسم شده‌اند.

آقای غیور : چگونه از نقطه T بر دایرهٔ K مماس می‌کنید؟

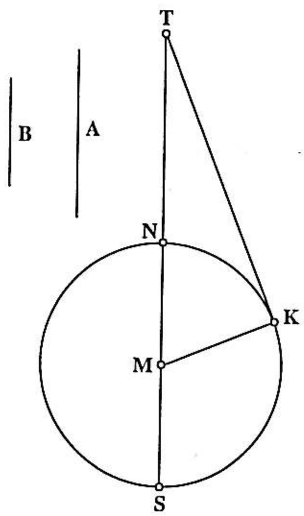
حل مسئله در حالت خاص

رضا : شعاع MK بر مماس TK عمود است. پس مثلث TKM قائم‌الزاویه است. کافی‌است دایره‌ای به قطر TM رسم کنیم و تقاطع آن را با دایرهٔ به قطر NS به‌دست آوریم. برای این کار عمودمنصف TM را رسم می‌کنیم تا مرکز دایرهٔ به قطر TM به‌دست آید.

آقای غیور : بسیار خوب پس می‌فهمیم که شعاع MK هم مهم است. حال فرض کنید که مسئله حل شده است. یعنی به همان شیوه‌ای که سجزی تحلیل می‌نامد، عمل می‌کنیم.

فرض کنید مسئله حل شده است و شرایط موجود را بررسی کنید.

به شیوهٔ تحلیل، فرض می‌کنیم که شکل رسم شده است، تا به جستجوی مقدماتش برآییم. مثلاً در شکل فرض می‌کنیم که نسبت مذکور، نسبت A به B باشد و دایره، دایرهٔ NS باشد و خط‌های TK و TN به نسبت A به B و همان پاره‌خط‌های مطلوب باشند، چنان که اگر TN درون دایره به سمت S امتداد یابد، NS قطری از آن باشد. سپس می‌پرسیم. از چه ترسیمی و چه مقدماتی شکل آن یافته می‌شود؟



چون نقطه T و خط‌های TN و TK و محل تماس دایرهٔ NS در نقطهٔ K، همگی بر ما مجهولند و همچنین اندازهٔ زاویهٔ T نامعلوم است، به دست آوردن آن شکل دشوار است این حدس همان است که سجزی آن را معلوم کردن میزان آسانی و دشواری آن‌ها نامیده است. اگر در شکلی تعداد مجهول‌ها زیاد باشد، یافتن آن‌ها به کمک معلومات دشواراست. بخصوص اگر شکل طوری باشد که بین اجزاء شکل ارتباطی موجود نباشد.

تخمین سختی مسئله

حمید: البته تعداد مجهولها خیلی هم زیاد نیست مثلاً اگر زاویهٔ T را داشته باشیم می‌توانیم همهٔ شکل را رسم کنیم. چون زاویهٔ T و M متمم هستند و با داشتن زاویه M نقطهٔ K و مماس TK بدست می‌آیند و از آنجا نقطه T و پاره‌خطهای TK و TN بدست می‌آیند. پس کافی است زاویه T را پیدا کنیم.

تبدیل مسئله به مسائل ساده‌تر

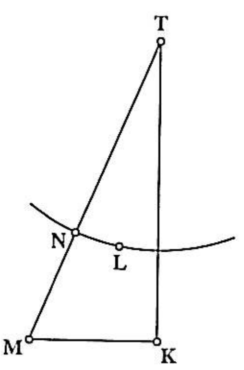
آقای غیور: این همان تبدیل مسئله به مسئله‌ای ساده‌تر است که سجزی آن را نقل می‌نامد.

رضا: پس باید به دنبال یک زاویه بگردیم. یا بدنبال رسم مثلثی باشیم که این زاویه یکی از زوایای آن باشد. مثلا اگر مثلث TMK را رسم کنیم زاویه T هم پیدا می‌شود.

آقای غیور: پس با این برداشت‌ها حل مسئلهٔ دیگری را جستجو می‌کنیم. اگر این مسئله تازه را حل کنیم مسئلهٔ اصلی به کمک آن حل می‌شود. مسئلهٔ تازه این است که:

شکل مثلث TKM چنین مشخص می‌شود که مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که نسبت یکی از ضلعهایش به وتر منهای ضلع دیگر، نسبت مفروضی است. پس با استفاده از روشی که اکنون به‌کار بردیم مسئلهٔ اول به این مسئله تحویل شده است؛ برای آن که جواب خواسته شده در مسئلهٔ اول را می‌دهد.

کسی می‌تواند ایده‌ای برای حل مسئله جدید بدهد؟



حامد: حال باید ببینیم چه چیزهایی معلوم و چه چیزهایی مجهول است.

معلوم‌ها و مجهول‌ها را پیدا کنید.

منصور: می‌توانیم خط KM و نقطه T و نقطه K را معلوم بگیریم. دایرهٔ TN مرکز معلوم و شعاع معلوم دارد چون نسبت TK به TN داده شده است.

مجهول نقطهٔ N روی دایره و نقطه M روی KM است به‌طوری که MN با MK برابر باشد.

آقای غیور: اگر نقطه N داده شده باشد چگونه مسئله را حل می‌کنید؟

منصور: TN را امتداد می‌دهیم تا خط KM را در M قطع کند و مثلث TKM تشکیل شود.

بنابراین زاویهٔ T به‌دست می‌آید و با کمک آن مسئله اصلی حل می‌شود.

آقای غیور: چطور؟

منصور با سردرگمی سر تکان داد: نمی‌دانم. خودتان گفتید فقط زاویه T را احتیاج داریم.

حامد: زاویهٔ T و زاویهٔ M متمم هستند. پس زاویهٔ M را داریم. و با داشتن زاویه M نقطه K و با خارج‌کردن عمودی از نقطه K بر شعاع MK نقطهٔ T به‌دست می‌آید.

آقای غیور: پس معلوم می‌شود معلومها و مجهولها را درست شناخته‌ایم.

وقتی با مسئله جدیدی مواجه می‌شوید باید مهارت خود را به‌کار بیاندازید و حدس بزنید. معلومات قبلی چندان کمکی نمی‌کنند. بعد از آن که حدس درست زدید سعی کنید با کمک معلومات قبلی برای اثبات صحت آن استدلال کنید.

حدس بزنید

[بچه‌ها یک ربع ساعت روی مسئلهٔ جدید فکر کردند و کسی نتوانست ایده‌ای برای حل آن بدهد.]

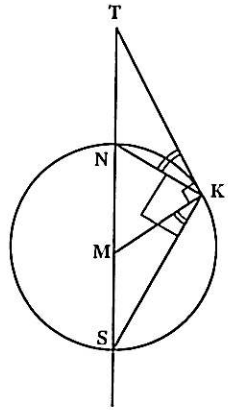
امیر: فکر می‌کنم این مسئله جدید از مسئله اوّل هم سخت‌تر است. بهتر است به عقب بازگردیم و سعی کنیم از طریق دیگری مسئله اصلی را حل کنیم.

بازگشت به عقب

رضا: گفتیم که ما بدنبال زاویه می‌گردیم. بهتر است زاویه‌ها را بررسی کنیم.

امیر : پاره‌خطهایی که برای ما مهم هستند TN و TK هستند پس توجه به مثلث TNK ممکن است کارساز باشد.

زوایای این مثلث زوایای T و K و N هستند. باید سعی کنیم این زوایا را در جاهای دیگر شکل پیدا کنیم.



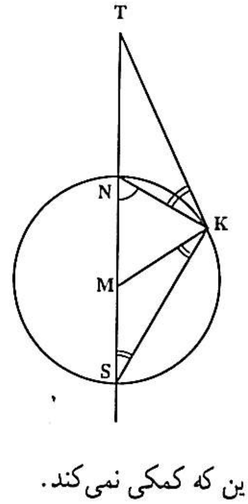
مثلاً زاویه K از مثلث TNKمتمم زاویه K از مثلث MNK است. و زاویهK ازمثلث MKS نیز متمم‌زاویه K از مثلثMNK است. پس زاویه Kاز مثلث MKS با زاویه K از مثلث TNK برابر است.

جستجو کردن اطلاعات کلیدی

حمید : هنوز هم زاویه K در شکل پیدا می‌شود. مثلثهای MKS و MNK هر دو متساوی‌الساقین هستند پس در مثلث MKS زوایای S و K برابرند و در مثلث MNK زوایای N وK برابرند.

حامد : یافتم!یافتم! یک تشابه یافتم!

مثلث TNK و TKS متشابه هستند. چون دو زاویه برابر دارند. زاویه T مشترک است و زاویه K با زاویه S برابر است.



منصور : این که کمکی نمی‌کند.

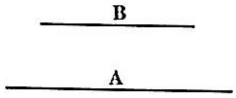
حامد : اتفاقاً همین کمک می‌کند. نسبت پاره‌خطهای TKو TN برای ما مهم است و در تشابه مثلثها نسبت حفظ می‌شود. یعنی بنابر تشابه داریم.

$$\frac{TN}{TK}=\frac{TK}{TS}$$

منصور : پس مسئله حل شده است.

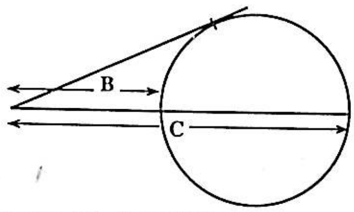
آقای غیور : برای بچه‌ها توضیح دهید.

منصور : اگر پاره خطهای اولیه را A و B بنامیم، می‌توان با کمک قضیه تالس پاره‌خطی یافت که نسبت آن به A برابر نسبت A به B باشد. آن‌را پاره‌خط C می‌نامیم.



حال اگر دایره‌ای به قطر B_C رسم کنیم مانند شکل طول مماس به اندازهٔ پاره‌خط A است. این را حامد نشان داد.

پس کافی است همین شکل را چند برابر بزرگ کنیم تا حل مسئله به‌دست بیاید. بنابراین زاویه T از روی همین شکل قابل محاسبه است.



خود را بیازماییم

از کتاب «هنر حل مسئله» یک مسئله انتخاب کنید و به‌صورت گروهی آن را حل کنید. سپس روند کشف، استراتژیهایی که در حل مسئله به‌کار برده‌اید و تصمیم‌گیریهایی که هنگام حل مسئله انجام داده‌اید و حدس‌هایی که در گروه مطرح شده را به‌صورت مبسوط بنویسید. سپس بار دیگر استدلال حل مسئله را بدون توجه به روند کشف یادداشت کنید و این دو یادداشت را مقایسه نمایید. کدامیک تواناییهای گروه شما را بهتر نشان می‌دهند؟ کدامیک آموزنده‌ترند؟

خود را بیازماییم

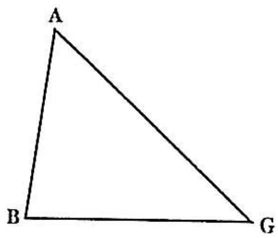
در کلاس موضوع استراتژیهای حل مسئله را به بحث بگذارید و روشهایی که می‌شناسید در یک لیست بنویسید. می‌توانید به کتاب «هنر حل مسئله» مراجعه نمایید.

آقای غیور : سجزی مسئلهٔ دیگری برای توضیح استراتژیهای خود مطرح کرده است. این مسئله را قبلاً حل کرده‌اید. ولی آن را با هم دوباره بررسی می‌کنیم.

مسئله

چون هوشمندی در کشف ویژگیهای خاص بیش از هر چیز در ترسیمها مفید است، مثالی در مورد جستجوی ویژگیهای خاص شکلها می‌آوریم. به این صورت که مثلث ABG را در نظر می‌گیریم و ویژگی خاصی را در زاویه‌هایش جستجو می‌کنیم، بدین قرار که مجموع هر سه زاویه برابر است با مجموع زاویه‌های یک مثلث معلوم، پیش از آن که بدانیم مجموعاً با دو قائمه برابرند.

حامد : من صورت مسئله را نمی‌فهمم. آیا منظور سجزی این است که مجموع زوایای مثلث ABG دلخواه با مجموع زوایای مثلثی معلوم برابر است؟ اگر اینطور باشد بهتر است بگوییم که سجزی می‌خواهد نشان دهیم هر دو مثلث دلخواه مجموع زوایای برابر دارند.



آقای غیور : ما قبلاً ثابت می‌کردیم مجموع زوایای هر مثلث برابر °۱۸۰ یا به زبان سجزی دو قائم است. اما اینجا خواسته شده همین که هر دو مثلث مجموع زوایای برابر دارند را بدون استفاده از زاویه دو قائمه ثابت کنید.

منصور : ولی چطور ممکن است بین دو مثلث که هیچ ربطی به هم ندارند، ارتباط ایجاد کنیم؟

آقای غیور : این همان چیزی است ک شما باید راه حلی برای آن پیدا کنید!

منصور : ولی دو مثلث دلخواه ربطی به هم ندارند.

آقای غیور : هر دو مثلث هستند!

رضا : همین خودش یک ربط است. اگر قرار است همهٔ مثلثها مجموع زوایای برابر داشته باشند نه همین دو مثلث، این به ما می‌گوید که اگر در ذهن خود مثلث را کوچک و بزرگ کنیم و یا شکل آن را تغییر دهیم نباید مجموع زوایای آن عوض شود.

جستجوی روابط بین اشکال و ویژگیهای خاص آنها

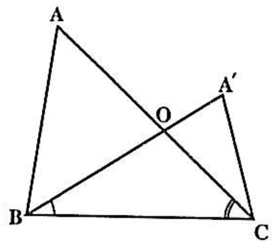
حمید : بگذارید با هم ببینیم ما در ذهن خود چه کارهایی می‌توانیم با یک مثلث انجام دهیم. مثلاً می‌توانیم آن را چند برابر بزرگ یا کوچک کنیم یا حتی فرض کنیم مثلث کم کم رشد می‌کند و بزرگ می‌شود.

رضا : می‌توانیم یک ضلع آن را ثابت بگیریم و رأس سوم را حرکت دهیم و مثلثهایی با یک ضلع برابر داشته باشیم.

منصور : فهمیدم! همین مسئله را حل می‌کند.

رضا : چطور؟

منصور : می‌توان دو مثلث داده شده را با تغییر پیوستهٔ رأسها به همدیگر برد. یعنی می‌توان رأسها را یکی یکی به رأس‌های جدید برد و در هر مرحله نشان داد که مجموع زوایا در دو مثلث برابرند.



رضا : می‌فهمم. مثلاً نشان می‌دهیم در شکل بالا مجموع زوایای مثلثهای ABC و A′BC برابرند.

منصور : دقیقاً!

حمید : پس دست بکار شویم. باید نشان دهیم مجموع زوایای A و B و C در مثلث ABC با مجموع زوایای ′A و B و C در مثلث A′BC برابرند. امّا زوایای B و C در مثلث OBC بین این دو مشترکند.

$$B\hat{A}C + A\hat{B}C + \cancel{A\hat{C}B} = B\hat{A'}C + \cancel{A'\hat{B}C} + A'\hat{C}B$$

$$A\hat{B}C = A\hat{B}O + \cancel{O\hat{B}C} \qquad A'\hat{C}B = A'\hat{C}O + \cancel{O\hat{C}B}$$

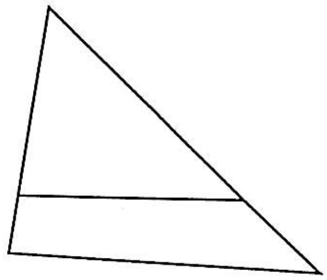
پس باید بدانیم $B\hat{A}C + A\hat{B}C = B\hat{A'}C + A'\hat{C}B$

رضا : خراب شد. این کمک نمی‌کند.

حمید : چرا؟

رضا : این همان مسئله قبل است. در حالتی که یک زاویه ثابت بماند. چون در مثلثهای OAB و OA′C زاویه O برابر است.

حمید : خوب این کمک می‌کند. اگر دو تا مثلث زاویه‌ای برابر داشته باشند تبدیل پیوستهٔ یکی به دیگری خیلی شکل ساده‌تری دارد. به این شکل توجه کنید :

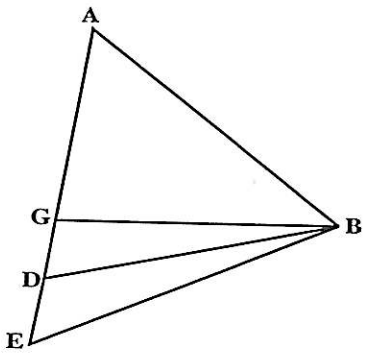


تبدیل مسئله به مسئله ساده‌تر

منصور : پس در یک مرحله، کافی‌است نشان دهیم که یک رأس روی یکی از اضلاع از رأس دیگری دور شود مجموع زوایای مثلث ثابت می‌ماند.

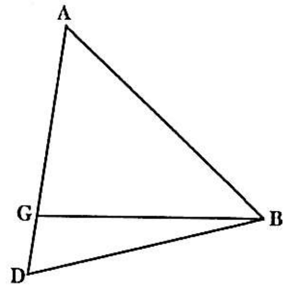
آقای غیور : آفرین بر شما. سجزی هم به همین نتیجه رسید. سجزی چنین گفته است :

راه جستجوی ما در این مرحلهٔ اول چنین است که یک زاویهٔ آن را در وضع خود ثابت می‌گیریم، و اضلاعش را تغییر می‌دهیم، تا ببینیم که آیا دو زاویهٔ دیگر مجموعاً از مجموع دو زاویهٔ اصلی بزرگ‌ترند یا کوچکترند، و یا با آن برابرند.



در شکل بالا زاویهٔ A را، برخلاف زاویه‌های دیگر ثابت فرض کرده‌ایم با درنظرداشتن این که : اگر فرض کنیم دو زاویه ازمثلث مفروضی با دو زاویه از مثلث مفروض دیگر برابر باشند، و ضلع محدود به این دو زاویه با ضلع محدود به این زاویا در مثلث دیگربه‌طوری که هرکدام با نظیر خود برابر باشد، ناچار باید زاویهٔ باقی‌مانده (از یک مثلث)، برابر باز زاویهٔ باقی مانده (از مثلث دیگر) باشد.

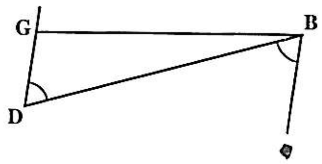
رضا : بگذارید بطور خلاصه بگویم کجا هستیم.



AG را تا D امتداد می‌دهیم و BD را وصل می‌کنیم. زاویهٔ ADB کوچکتر از زاویهٔ AGB می‌شود. سپس به زاویه‌های ABG و ABD نگاه می‌کنیم. زاویهٔ ABD از زاویهٔ ABG بزرگ‌تر است. این کار را تکرار می‌کنیم. ضلع AD را تا E امتداد می‌دهیم و BE را وصل می‌کنیم. در این صورت زاویهٔ E کوچکتر از زاویهٔ ADB و زاویهٔ ABE بزرگ‌تر از زاویهٔ ABD است. این کار را مرتباً تکرار می‌کنیم. به این ترتیب زاویه‌هایی را که رأس آنها بر ضلع AG واقع می‌شوند کوچکتر و زاویه‌های مجاور به ضلع AB در نقطهٔ B را از آنچه قبلاً بوده بزرگ‌تر می‌کنیم.

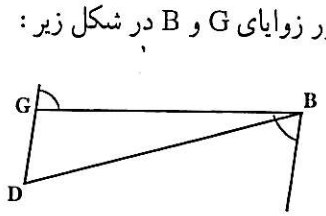
حالا باید بررسی کنیم که آیا این زیاد و کم شدنها به‌طور طبیعی با هم متعادلند یعنی یکدیگر را جبران می‌کنند و آنچه در یک طرف اضافه می‌شود به همان اندازه از طرف دیگر کم می‌شود یا نه.

حمید : این که روشن است. فقط باید نشان دهیم زاویه G از مثلث AGB مجموع زوایای D و B از مثلث BDG است. این را در دورهٔ راهنمایی دیده‌ایم.



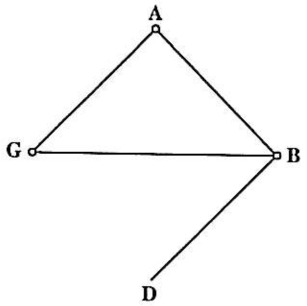
اگر از Bخطی موازی DG رسم کنیم بنابر قضیه خطوط موازی و مورّب زاویه‌های D و B در شکل بالا برابرند.

و همینطور زوایای G و B در شکل زیر :



پس روشن است که زاویه G برابر مجموع زوایای B و C از مثلث BDG است.

آقای غیور : حال بیایید از زبان سجزی ببینیم که چرا مجموع زوایای هر مثلث برابر دو قائمه است!؟



اکنون پس از آن‌که برایمان روشن شد که مجموع زوایای هر مثلث با مجموع زوایای هر مثلث دیگر برابر است، ویژگی خاص دیگری از آن جستجو می‌کنیم، آن‌هم این‌که مقدار مجموع این زوایا را می‌طلبیم. در این‌جا لازم است مقیاسی برای اندازه‌گیری زاویه‌ها داشته باشیم. این مقیاس باید از جنس آنها باشد و آن زاویهٔ قائمه است. پس باید مثلثی را فرض کنیم و زاویه‌ای از آن را قائمه قرار دهیم. زیرا اگر دو زاویهٔ آن را قائمه قرار دهیم، از این ترسیم مثلث به‌وجود نمی‌آید، بلکه دو ضلع آن متوازی می‌شوند و یکدیگر را قطع نمی‌کنند در حالی که مثلث از برخورد سه‌ضلعش ایجاد می‌شود. فرض می‌کنیم که دو ضلع طرفین زاویهٔ قائمه برابرند. مثلث ABG را قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین فرض می‌کنیم و زاویهٔ قائمه، زاویهٔ A است. سپس خط موازی را به‌کار می‌بریم. زیرا تناسب آن با این وضعیت، از خطوط دیگر بیش‌تر است. از نقطهٔ B خط BD را موازی با AG رسم می‌کنیم. زاویه‌ای ایجاد می‌شود که خواص آن را جستجو می‌کنیم. زاویهٔ DBG را مساوی با زاویهٔ BGA یافته‌ایم، ولی زاویهٔ BGA را با ABG مساوی گرفته بودیم. پس زاویه‌های ABG و DBG برابرند اما مجموع آن‌ها با زاویهٔ BAG برابر است. پس لازم می‌آید که مجموع سه زاویهٔ مثلث ABG برابر با دو قائمه باشد.

اما این ویژگی خاصی است که در مثلث مشخصی یافتیم، یعنی مثلثی که یک زاویه‌اش قائمه است و دو ضلع طرفین آن برابرند. اما گفته‌ایم که مجموع زاویه‌های مثلثهای نامشخص و کلی باهم برابرند. پس معلوم می‌شود که مجموع سه زاویهٔ هر مثلث

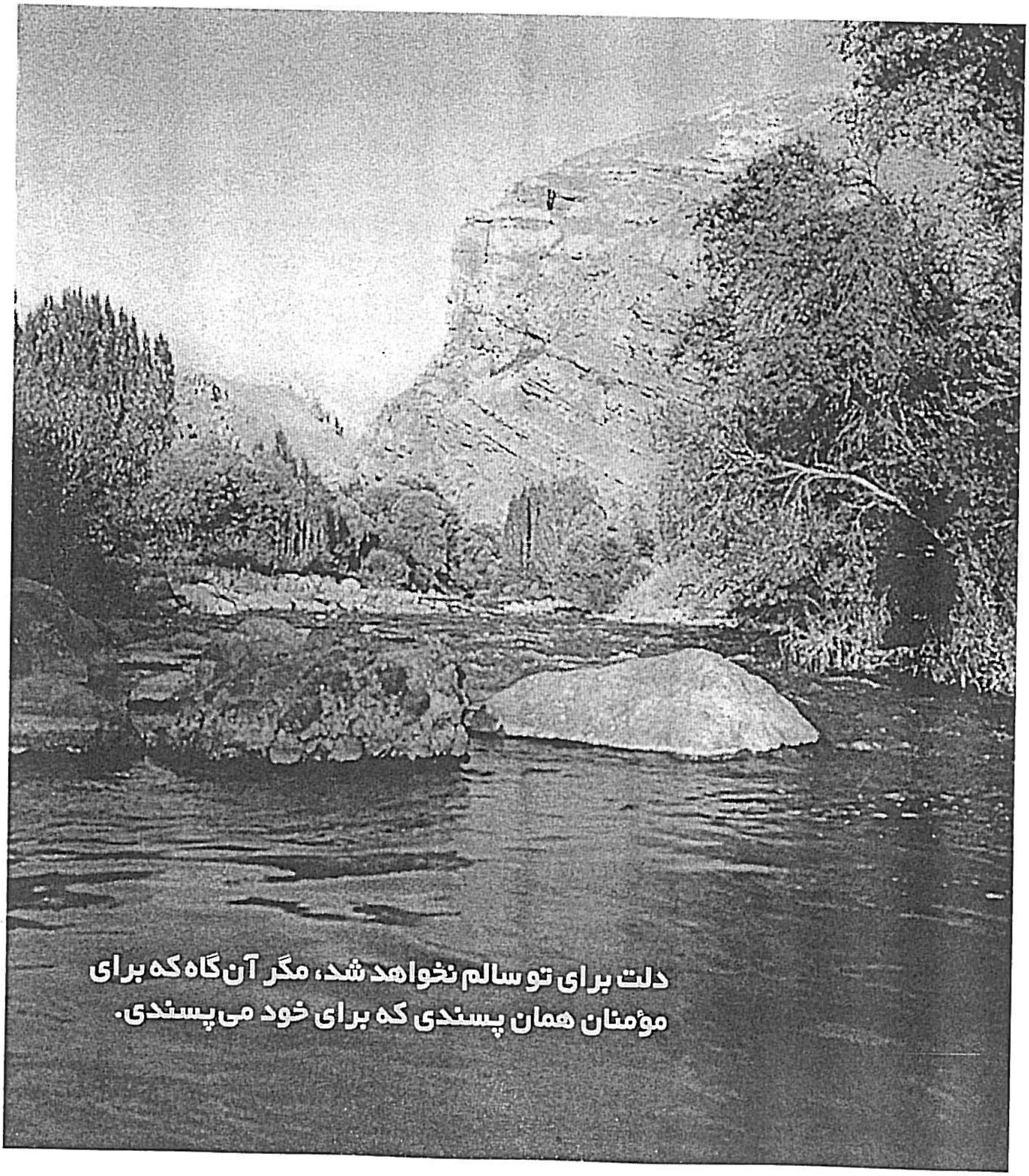
با دو زاویهٔ قائمه برابر است. این همان چیزی است که می‌خواستیم نشان دهیم.

این یکی از راههای جستجوی ویژگیهای خاص است. پس لازم است فهم و ذهن خود را در این فن اصلاح کنیم. در این طریق، یعنی کشف شکلها، اصلاح فهم و باز بودن ذهن مفیدتر از خواندن کتابهای هندسه است که پیشینیان تجویز می‌کردند، چرا که قصد آن‌ها از این کار خواندن کتابهای هندسه به‌عنوان مدخلی بر سایر کتابهای فلسفهٔ ریاضی و پرورش ذهن بود.

خود را بیازماییم

ثابت کنید در یک مثلث متساوی‌الاضلاع میانه‌ها همرسند و میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کنند.

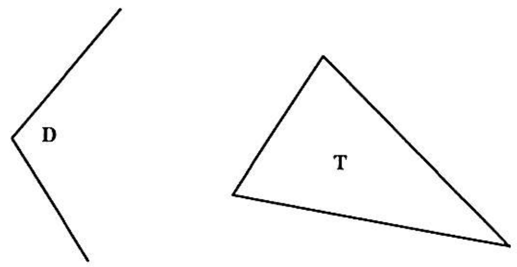
حال با تغییر مثلث به طور پیوسته نشان دهید در هر مثلث میانه‌ها همرسند. (از قضیه تالس کمک بگیرید.)



۳ـ۲ـ حل معادله با ترسیمهای هندسی

فعالیت

مثلثی با مساحت T و زاویه D داده شده‌است. با خط‌کش و پرگار مثلثی رسم کنید که زاویه‌ای برابر D و مساحتی برابر Tداشته باشد.



حل این مسئله منجر به حل یک معادله می‌شود. با داشتن زاویه D و پاره‌خط AB به چه اطلاعات دیگری برای مشخص‌شدن متوازی الاضلاع احتیاج داریم؟ مجهول کدام است؟ با دانستن مساحت متوازی‌الاضلاع چگونه می‌توان مجهول را یافت؟

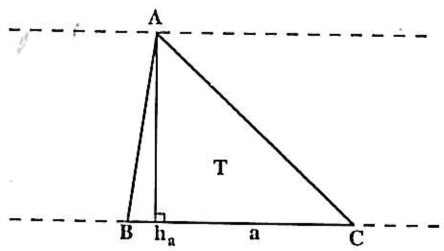
آیت و حجّت ترسیم با خط‌کش و پرگار را پس از حل مسئله بررسی کردند.

آیت : می خواهیم مثلثی با مساحت برابر با مثلث T که داده شده رسم کنیم.

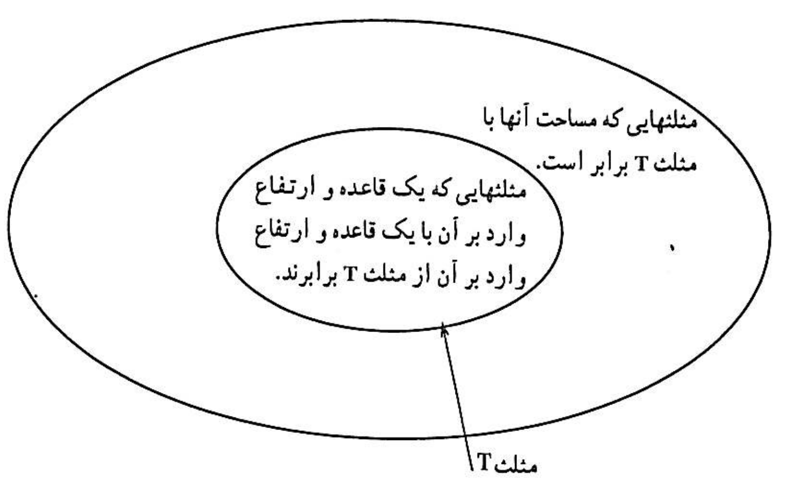
این مسئله چندین جواب دارد. از بین آنها می‌توان مثلثی انتخاب کرد که یک زاویهٔ آن برابر D باشد.

حجت : از بین همهٔ مثلثهایی که مساحت برابر با T دارند، کافی‌است یک خانواده از آنها را انتخاب کنیم. شاید بتوان شرط زاویه را در همین خانواده برقرار کرد. مثلاً مساحت مثلث T برابر است با نصف حاصلضرب قاعده در ارتفاع آن. می‌توان چندین مثلث با همین قاعده و ارتفاع پیدا کرد.

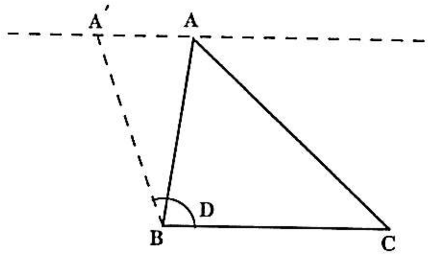
آیت : فرض کنیم مثلث T مثلث زیر باشد. قاعده a و ارتفاع h_a را که بر آن وارد شده انتخاب می‌کنیم.



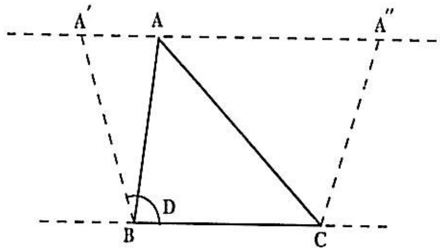
اگر بخواهیم قاعده ثابت بماند و h_a هم تغییر نکند، رأس A تنها می‌تواند روی خطی موازی ضلع BC و با فاصله h_a از آن حرکت کند. به‌نظر می‌رسد از بین همین مثلثها بتوان مثلثی انتخاب کرد که زاویه B برابر با زاویه D باشد.



حجّت : بسیار خوب پس با خط کش و پرگار روی یکی از دو سر ضلع BC زاویه D را جدا می‌کنیم. این کار خود چند مرحله دارد. بعد از رأس A خطی موازی BC رسم می‌کنیم. این کار هم چندین مرحله دارد. این خط و ضلع زاویه D که طی مراحلی رسم کردیم همدیگر را در نقطه‌ای قطع می‌کنند که آن را ′A می‌نامیم. مثلث A′BC یک جواب است.



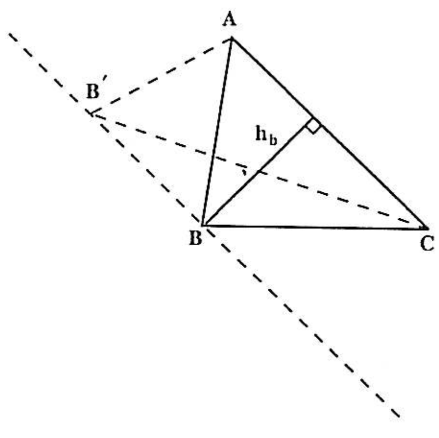
آیت : اگر به‌جای زاویه B مثلثی را انتخاب کنیم که در آن زاویه C برابر با زاویهٔ D باشد یک جواب دیگر به‌دست خواهد آمد.



حجّت : امّا این دو مثلث که ساختی، با هم برابرند. یکی تصویر دیگری در آینه است.

می‌توان این تساوی مثلثها را از تساوی A′B و A″C نتیجه گرفت. که آن‌هم از تساوی ارتفاعها به‌دست می‌آید.

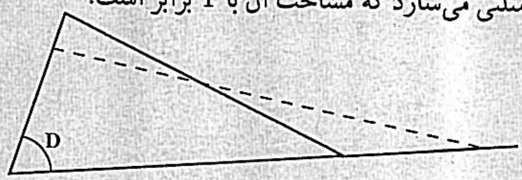
آیت : بسیار خوب. اگر به‌جای قاعدهٔ a و ارتفاع h_b، قاعدهٔ b و ارتفاع h_b را انتخاب می‌کردیم، جواب دیگری به‌دست می‌آوردیم.



حجّت : می‌فهمم. می‌خواهی بگویی بااین اطلاعات جواب مسئله یکتا نیست. این را از طریق دیگری هم می‌شود گفت. اگر مثلثی با زاویهٔ D و مساحت T داده شده باشد با تغییر ضلع روبه‌رو به زاویه D می‌توان مثلثهای دیگری با همین خاصیت به‌دست آورد.

خود را بیازماییم

مثلثی با زاویه D و مساحت Tداده شده است، آیا هر خطی که از وسط ضلع مقابل به زاویه D می‌گذرد با دو ضلع زاویه D مثلثی می‌سازد که مساحت آن با T برابر است؟



خود را بیازماییم

متوازی‌الاضلاعی بسازید که مساحت آن برابر مساحت مثلث داده شده T باشد و یک زاویه آن برابر زاویه داده شده D باشد.

خود را بیازماییم

زاویه E و چهارضلعی Q داده شده‌اند. متوازی الاضلاعی با زاویه E بسازید که مساحت آن برابر مساحت چهارضلعی Q باشد.

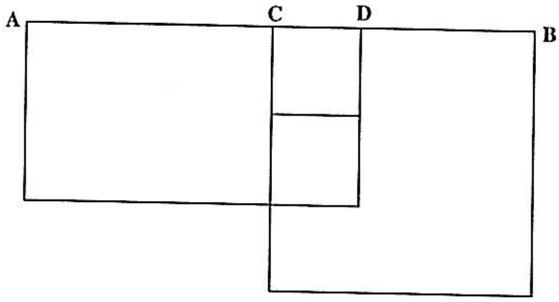
برای رسم این متوازی‌الاضلاع مجهولها کدامند؟ بین مجهولها و مساحت متوازی‌الاضلاع چه رابطه‌ای برقرار است؟ برای کم کردن تعداد مجهولها می‌توانید یکی از آنها را داده شده فرض کنید.

خود را بیازماییم

برای ساختن یک مکعب مستطیل با حجم داده شده چند مجهول داریم؟ بین مجهولها چه رابطه‌ای برقرار است؟ چه فرضهایی می‌توان کرد تا تعداد مجهولها کم‌تر شوند؟ چه فرضهایی می‌توان کرد تا مسئله یک جواب یگانه داشته باشد؟

مسئله

فرض کنید پاره‌خط AB توسط نقطه C به دو نیمه مساوی و توسط نقطه D به دو پاره نامساوی تقسیم شده باشد. با هر روشی که می‌دانید نشان دهید مستطیلی که اضلاع آن برابر دو پاره نامساوی پاره‌خط AB است و مربعی که ضلع آن برابر پاره‌خط CD است در مجموع مساحتی برابر مربعی به ضلع نیمهٔ پاره‌خط AB دارند.



طول AB را برابر a و طول DB را برابر x بگیرید. فرض کنید مساحت مستطیل مفروض باشد و برابر عدد مثبتی مانند b^2 باشد. در این‌صورت داریم :

$$ax - x^2 = (a - x)x = b^2$$

با داشتن b ، a می‌توان طول x را محاسبه کرد. صورت هندسی این مسئله چنین است :

مستطیلی بسازید که مساحت آن برابر مساحت مربع معلوم و مجموع طول و عرض آن برابر طول پاره‌خط معلوم باشند. حل این مسئله منجر به حل معادلهٔ $ax - x^2 = b^2$ خواهد شد. حال مسئله‌ای هندسی طرح کنید که حل آن منجر به حل معادلهٔ $ax + x^2 = b^2$ شود. سپس مسئله هندسه را حل کنید.

ایمان و آرمان در یک گروه دونفری به بحث در مورد مسئله پرداختند.

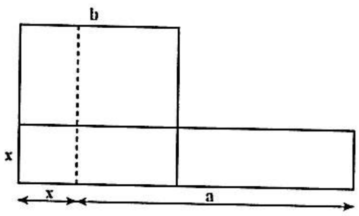
آرمان : اگر بخواهم از صورت هندسی ارائه شده برای معادلهٔ $ax - x^2 = b^2$ الگو بگیرم باید بنویسم

$$(a + x)x = ax + x^2 = b^2$$

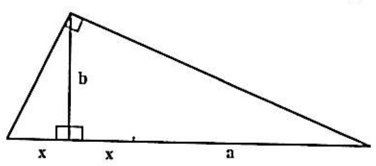
پس مستطیلی می‌خواهیم که یک ضلع آن x و ضلع دیگر $a + x$ است و مساحت آن هم داده شده است.

بهتر بگویم یک ضلع آن x مجهول است و ضلع دیگر نیز $a + x$ مجهول است اما تفاضل طول و عرض $(a + x) - x = a$ معلوم است. پس مستطیلی می‌خواهیم که مساحت آن و تفاضل طول و عرض آن داده شده‌اند.

ایمان : درواقع مستطیل مجهول مساحتی برابر مساحت مربع به ضلع b دارد. فکر می‌کنم شکل کشیدن بتواند کمک کند :

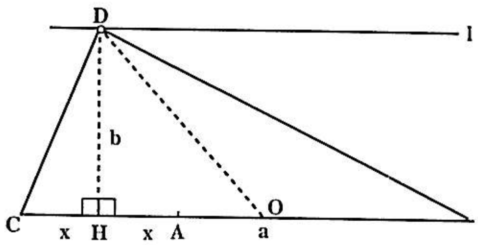


آرمان : رابطه $(a + x)x = b^2$ مرا به یاد ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه می‌اندازد.



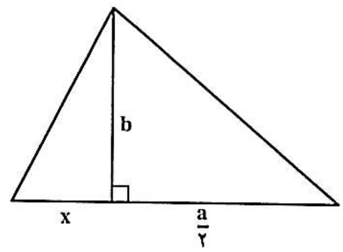
اگر مجهول x را بدانیم پاره‌خطهایی به طول $a + x$ و x را کنار هم قرار می‌دهیم و از نقطه برخورد عمودی بر آنها اخراج می‌کنیم و روی آن طول b را جدا می‌کنیم. داریم $(a + x)x = b^2$ پس $\frac{x}{b} = \frac{b}{a + x}$. بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل بالا متشابه‌اند و در نتیجه یک مثلث قائم‌الزاویه به قاعدهٔ $a + 2x$ کشیده‌ایم.

ایمان: آفرین. این حتماً کمک می‌کند. بیا ببینیم معلومها و مجهولها کدام‌اند! طولهای a و b را می‌دانیم. رأس مثلث قائم‌الزاویه روی خطی به فاصلهٔ b از پاره‌خط به طول a قرار دارد. مثلث را مطابق شکل نام‌گذاری می‌کنیم.



مجهول، طول x و نیز محل نقطه D روی خط l موازی با پاره‌خط AB است. اگر O وسط BC باشد فاصله آن تا C برابر $x+\frac{a}{2}$ است. بنابراین فاصله آن تا H برابر $\frac{a}{2}$ خواهد بود. پس مثلث ODH را داریم. باید ببینیم آیا می‌توان همهٔ شکل را از روی این مثلث قائم‌الزاویه به‌دست آورد یا نه!

آرمان: این دیگر خیلی روشن است. اگر به مرکز O و شعاع OD دایره‌ای بزنیم B و C به‌دست می‌آیند و همه شکل را می‌توان تولید کرد و طول x به‌دست می‌آید.



ایمان: خیلی ذوق زده‌ام دوست دارم ببینم هر معادله‌ای که بنویسم می‌توانم برای حل آن یک مسئله هندسه طرح کنم؟ مثلاً:

$$x^2 - b^2 = ax \quad \text{یا} \quad x^2 + b^2 = ax \quad \text{یا} \quad x^2 - ax = b^2$$

خود را بیازماییم

برای هریک از معادلات

$x^2 - b^2 = ax$ یا $x^2 + b^2 = ax$ یا $x^2 - ax = b^2$

یک مسئله هندسه طرح کنید. سپس آن مسئله را حل نمایید.

خود را بیازماییم

هریک از روابط زیر را با شکلهای هندسی به اثبات برسانید.

مربع مجموع

$$\text{(I)}\quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مربع تفاضل

$$\text{(II)}\quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

حاصل‌ضرب یک مجموع و یک تفاضل

$$\text{(III)}\quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$\text{(IV)}\quad (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

می‌توان همهٔ این روابط را با محاسبات جبری هم ثابت کرد.

خود را بیازماییم

با اشکال سه‌بعدی مقوایی نشان دهید روابط زیر برقرارند.

مربع مجموع

$$\text{(V)}\quad (a+b)^3 = a^3 + 3ab + 3ab^2 + b^3$$

مربع تفاضل

$$\text{(VI)}\quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\text{(VII)}\quad (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$\text{(VIII)}\quad (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

روابط بالا با محاسبات جبری با دردسر بسیار کم‌تری به‌دست می‌آیند:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

به‌علاوه در اثباتهای هندسی بالا حروف نشان‌دهندهٔ طولهای مثبت هستند. اما در اثبات جبری بالا حروف نشان‌دهنده اعداد حقیقی دل‌خواه (مثبت یا منفی) هستند. بنابراین اثبات جبری دست ما را بازتر می‌گذارد.

یک جمله‌ای و چندجمله‌ای

به‌عبارتی که از حاصل‌ضرب چند حرف و چند عدد به‌دست بیاید یک جمله‌ای می‌گوییم. مانند:

$$۵\ ,\ a\ ,\ \frac{۱}{۳}x^{۲}\ ,\ -۲ax^{۲}y\ ,\ bxyz^{۲}$$

تعداد حرفها در یک جمله‌ای را درجهٔ آن می‌گوییم و آنچه با حذف حروف می‌ماند ضریب یک‌جمله‌ای می‌گوییم.

مثلاً یک جمله‌ای $-۲ax^{۲}y$ یک a و دو x و یک y دارد پس از درجه ۴ است. می‌گوییم $۲ax^{۲}y$ نسبت به x از درجه ۲ و نسبت به a از درجه ۱ است.

اگر حروف a و x و y را حذف کنیم ۲- می‌ماند که ضریب یک جمله‌ای بالاست اگر یک جمله‌ای از بیش از دو حرف تشکیل شده باشد مانند $bxyt^{۲}$ می‌توان یک یا چند حرف را مشخص کرد و درجه را فقط نسبت به آنها درنظر گرفت. مثلاً درجهٔ $bxyz^{۳}$ نسبت به z برابر ۳ و نسبت به x و y برابر ۲ است.

عبارتی که از جمع دو یا چند یک جمله‌ای به‌دست می‌آید چند جمله‌ای می‌گوییم مانند:

$$۳x+x^{۲}\ ,\ ۴xy+(-۲z)\ ,\ ۳x^{۲}+axy+(-by^{۲})$$

چند جمله‌ایهایی مانند $۴xy+(-۲z),\ ۳x^{۲}+axy+(-by^{۲})$ را معمولاً به این شکل می‌نویسیم: $۴xy-۲z\ ,\ ۳x^{۲}+axy-by^{۲}$

جملاتی که از حروف یکسان تشکیل شده است جملات متشابه نامیده می‌شوند مانند:

$$۲x^{۲}y\ ,\frac{۵}{۳}x^{۲}y\ ,\ -۶yx^{۲}$$

جملات متشابه در یک چندجمله‌ای می‌توانند به یک جمله کاهش بیابند مانند زیر:

$$۲x^{۲}y+\frac{۵}{۳}x^{۲}y-۶yx^{۲}=(۲+\frac{۵}{۳}-۶)x^{۲}y=-\frac{۷}{۳}x^{۲}y$$

درجهٔ چندجمله‌ای بزرگ‌ترین درجهٔ جملات آن چندجمله‌ای است. در اینجا هم ممکن است درجه را نسبت به‌حروف خاصی درنظر بگیریم.

اگر جملات یک چند جمله‌ایْ را جابه‌جا کنیم با خود آن چندجمله‌ای برابر است. مانند:

$$۳x-۲+x^{۲}=x^{۲}+۳x-۲$$

در واقع چند جمله‌ای تعمیمی از عدد است.

وقتی یک معادله تشکیل می‌دهیم $۲x^{۲}+x+۵=۰$ در واقع یک عدد تعمیم یافته را با یک عدد حقیقی مثلاً صفر برابر می‌کنیم. این تساوی نمی‌تواند همواره برقرار باشد و محدودیتهایی را روی مقدار x می‌گذارد. پیدا کردن این محدودیتها را حل معادله می‌گویند. درجهٔ چندجمله‌ای ظاهر شده در معادله را درجهٔ معادله گویند. مثلاً $۲x=۵$ از درجه ۱ و $x^{۲}+۲x=۷$ از درجه ۲ است.

خود را بیازماییم

در هر یک از چند جمله‌ایهای زیر درجهٔ چندجمله‌ای را مشخص نمایید. اگر چند جمله دو حرف یا بیش‌تر دارد درجه نسبت به هریک از حروف را هم بنویسید:

۱) $۲+x^{۲}-x^{۴}$

۲) $۲x^{۳}y-x^{۲}+y-۲x^{۳}y$

۳) $a^{۳}+۳a^{۲}b+۳ab^{۲}+b^{۳}$

۴) $\frac{۱}{۳}x^{۴}y^{۲}z$

معمولاً برای سادگی محاسبات جملات چندجمله‌ایها را با ترتیب نزولی درجات می‌نویسیم و این نمایش را نمایش استاندارد می‌نامیم. مانند زیر:

$$x-۸-۷x+۱۵x^{۲}=-۶x-۸+۵x^{۲}$$
$$=۵x^{۲}-۶x-۸$$

اگر می‌خواستیم با ترتیب صعودی جملات چندجمله‌ای بالا را مرتب کنیم می‌نوشتیم:

$$-۸-۶x+۵x^{۲}$$

خود را بیازماییم

چندجمله‌ای $۵x^{۲}-۳y+۷xy-x-۴y^{۲}+۲$ را با ترتیب نزولی نسبت به‌درجه x و با ترتیب صعودی نسبت به درجه y مرتب کنید.

خود را بیازماییم

چند جمله‌ایهای زیر را به فرم استاندارد درآورید :

۱) x^2+x^5-3x+1 ۳) $1+x+x^2+x^4$

۲) $x^1+x^2+8x^4+12$ ۴) $(x+1)^3$

جمع و تفریق چند جمله‌ایها مانند جمع و تفریق اعداد انجام می‌گیرد. می‌توان حاصل را به فرم استاندارد هم تبدیل کرد.

فعالیت

برای چند جمله‌ایهای $A=4x^3-2x^2+4$ و $B=2x^3+4x^2-3x-8$ مقدار $A+B$ و $A-B$ را محاسبه کنید. برای چند جمله‌ایهای $C=x^3-6x+1$ و $D=2x-3$ حاصل‌ضرب CD را محاسبه کنید.

گلایل در محاسبات بسیار سریع است. او فرمولها را خوش‌خط و منظم می‌نویسد ؛ برای همین کم‌تر اشتباه می‌کند. او چنین محاسبه کرد :

$$A+B=(4x^3-2x^2+4)+(2x^3+4x^2-3x-8)$$
$$=(4+2)x^3+(-2+4)x^2-3x+(4-8)$$
$$=6x^3+2x^2-3x-4$$

$$A-B=(4x^3-2x^2+4)-(2x^3+4x^2-3x-8)$$
$$=4x^3-2x^2+4-2x^3-4x^2+3x+8$$
$$=(4-2)x^3+(-2-4)x^2+3x+(4+8)$$
$$=2x^3-6x^2+3x+12$$

ارکیده دختر منظمی است. او برای هر کاری نظمی مخصوص به خودش را دارد. او چنین محاسبه کرد :

$$\begin{array}{r} 4x^3-2x^2+4 \\ +\ \underline{+2x^3+4x^2-3x-8} \\ 6x^3+2x^2-3x-4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x^3-2x^2+4 \\ -\ \underline{+2x^3+4x^2-3x-8} \\ 2x^3-6x^2+3x+12 \end{array}$$

خود را بیازماییم

در هریک از زوج چندجمله‌ایهای زیر مجموع آنها و تفریق دوّمی از اوّلی را محاسبه نمایید و جواب را به شکل استاندارد درآورید.

۱) $x^3-1-3x-x^2$, $4x^3-5x-6x^2+1$

۲) $7y-2x^3+6-5y^2$, $8y^2+9y-6y^3-3$

خود را بیازماییم

از فرمول‌های $(a^m)^n = a^{mn}$ و $(ab)^n = a^n b^n$ و $a^m a^n = a^{mn}$ برای m و n اعداد طبیعی استفاده کنید و محاسبات زیر را انجام دهید :

۱) $x \times x^3 \times x^5$ ۲) $(-a^2b)^3(2ab)$

۳) $(-x)^2(5x^3y)(-2x^2y)^3$

گلایل برای ضرب چندجمله‌ایها از قانون توزیع‌پذیری استفاده می‌کنیم. مانند زیر : $(x^3 - 6x + 1)(2x - 3)$

$$= (x^3 - 6x + 1)(2x) + (x^3 - 6x + 1)(-3)$$
$$= 2x^4 - 12x^2 + 2x - 3x^3 + 18x - 3$$
$$= 2x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 20x - 3$$

ارکیده همین محاسبه را به روش زیر انجام داد :

$$x^3 \quad -6x + 1$$
$$\times) \qquad 2x - 3$$
$$+2x^4 \quad -12x^2 + 2x \leftarrow (x^3 - 6x + 1)(2x)$$
$$-3x^3 + 18x - 3 \leftarrow (x^3 - 6x + 1)(-3)$$
$$2x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 20x - 3$$

گلایل که از نظم ارکیده خیلی خوشش آمده بود با یک جدول چندجمله‌ایها را ضرب کرد

	x^3	$-6x$	$+1$
$2x$	$2x^4$	$-12x^2$	$+2x$
-3	$-3x^3$	$+18x$	-3

سپس حاصل جمع تک‌جمله‌ایها را به فرم استاندارد درآورد. $2x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 20x - 3$

خود را بیازماییم

به هر روشی که بیش‌تر می‌پسندید محاسبات زیر را انجام دهید.

۱) $(2x^2 - 4x + 1)(3x - 4)$

۲) $(a^2 - 3a + 5)(a^2 + 4a - 3)$

۳) $(-3x + x^2 - 1)(2 + x - 5x^2)$

۴) $(4x + 3)(2x - x^3 - 1)$

حساب چندجمله‌ایها به ما کمک می‌کنند اتحادهای جبری را به روشی آسانتر از شکلهای هندسی به اثبات برسانیم. به‌علاوه در بسیاری موارد حل معادله با اتحادهای جبری جواب سرراست‌تری به ما می‌دهد. مثلاً اگر بدانیم $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ حل معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ منجر به حل معادله $(x-1)(x-2) = 0$ خواهد شد. حاصل‌ضرب دو عدد فقط وقتی برابر صفر است که حداقل یکی از آنها صفر باشد. پس $x - 1 = 0$ یا $x - 2 = 0$. پس معادله دارای دو جواب $x = 1$ و $x = 2$ است. می‌توانید این مقادیر را در $x^2 - 3x + 2$ جایگزین کنید و ببینید که واقعاً جواب معادله هستند.

خود را بیازماییم

چند جمله‌ایهای درجه دو زیر را به‌صورت حاصل‌ضرب دوچند جمله‌ای درجه ۱ بنویسید :

۱) $x^2 + 10x + 25$ ۲) $9x^2 - 1$

۳) $x^2 + 11x + 10$ ۴) $b^2 - (a - b)^2$

خود را بیازماییم

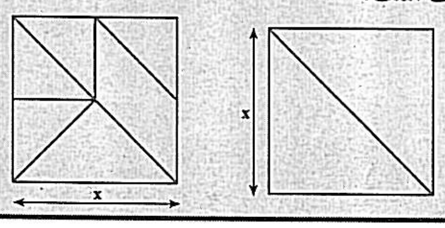
جای خالی را چنان پرکنید که حاصل، مربع یک‌چند جمله‌ای درجه ۱ باشد.

۱) $x^2 + 4x + \square$ ۲) $x^2 - 6x + \square$

۳) $a^2 + \square a + 1$ ۴) $4a^2 - \square a + 9$

خود را بیازماییم

در شکلهای زیر مساحت هریک از قطعات را برحسب x به‌دست آورید. آیا می‌توانید با همهٔ این قطعات یک مربع کامل بسازید؟ طول ضلع این مربع را با روش جبری حدس بزنید و سپس از آن حدس در ساختن مربع بزرگ کمک بگیرید. به روش جبری نشان دهید مجموع مساحتهای این قطعات برابر مساحت مربع بزرگ است.



۳ــ۳ــ خطا در حل مسائل واقعی

بیرونی: دوست من، ابوعلی! اخیراً نقشه‌ای از رود نیل یافته‌ام که منصوب به خوارزمی است. علاقه‌مندم نقشه‌ای دایره‌ای‌شکل از دریاها تهیه کنم تا مسلمانان در سفرهای خود از آن بهره ببرند، اخیراً یک ماه گرفتگی را در کاث رصد کردم و ترتیبی دادم تا ابوالوفا در بغداد نیز همین رویداد را رصد کند. اختلاف زمانی که از این طریق به دست آمد به من امکان داد که اختلاف طول جغرافیایی میان این دو شهر را محاسبه کنم. اگر بتوانم به این روش نقشه‌ای از جهان اسلام رسم کنم و در هر شهری جهت قبله را مشخص نمایم به نهایت آمال و آرزوهای خود رسیده‌ام.

ابن سینا: خوارزمی کتابی به نام کتاب‌الارض نوشته که در آن طول و عرض جغرافیایی همهٔ شهرهای مهم مسلمین را آورده. اما در مورد جهت‌یابی قبله علاقمندم و درباره‌اش تاکنون اندیشیده‌ام. از رصدهای تو درمی‌یابم که به کروی بودن زمین اعتقاد داری. باید بدانی که در خارج از جهان اسلام، چنین نمی‌اندیشند و سطح کرهٔ زمین را مسطح می‌دانند. اگر بخواهی جهت قبله را از روی نقشه‌ای مسطح به دست آوری، حتی اگر بتوانی چنین نقشهٔ دقیقی از جهان اسلام تهیه کنی، بی‌شک گمراه خواهی شد. زیرا اگر بخواهی در مسیر همان جهت که نقشهٔ مسطح نشان می‌دهد به‌سوی قبله حرکت کنی، کوتاه‌ترین مسیر را نپیموده‌ای چون زمین کروی است. کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه روی زمین با دایرهٔ عظیمه‌ای که از آن دو نقطه می‌گذرد، مشخص می‌شود و این مسیر در نقشه مسطح شما یک مسیر خمیده خواهد بود و نه یک خط راست.

بیرونی: به این نکته توجه داشتم که برای محاسبهٔ قبله ناچارم با خطوط خمیده روی سطح کره کار کنم نه با خطوط راست روی نقشه. هر چند این ملاحظات تاکنون در نقشه‌های معروف زمان ما در نظر گرفته نشده است. امروزه محاسبات مسلمانان از دقت و صحت بیش‌تری نسبت به محاسبات بطلمیوس و اراتوستن برخوردار است.

ابن سینا: البته سطح زمین نباید کرهٔ کامل باشد. چون از آتش‌فشانها چنین بر می‌آید که درون زمین بسیار گرم است و از این حقیقت چنین بر می‌آید سطح زمین سرد شده و این‌طور سخت گردیده و روزی سطح آن هم مانند درونش گرم بوده. هیچ بعید نیست که روزی زمین، از خورشید جدا شده باشد. در هر حال، حرکت زمین به دور محورش نتیجه می‌دهد که زمین چنان سرد شده باشد که مدارها تقریباً دایره شکل باشند ولی احتمالاً نصف‌النهارها دایرهٔ کامل نیستند و زمین بیش‌تر شبیه پیاز است تا یک کرهٔ کامل.

بیرونی: رصدهای من چنین چیزی را نشان نمی‌دهد. آن‌طور که من محاسبه کرده‌ام قطر زمین در بزرگ‌ترین مدار که چون کمربندی زمین را فراگرفته با طول محوری که زمین به دور آن می‌چرخد، برابر است.

ابن سینا: می‌دانی که محاسبه چنین طولهایی خالی از خطا نیست. آنچه ما می‌دانیم این است که زمین تقریباً کروی است. اگر کره نزدیک‌ترین شکل به زمین نباشد، برای محاسبات قبله باید چاره‌ای دیگر بیاندیشیم.

خود را بیازماییم

فرض کنیم پرگار در رسم دایره خطا نداشته باشد. در رسم با خط کش و پرگار چه خطاهایی کار رسم دقیق را مشکل می‌کنند؟ یک رسم بخصوص مانند رسم عمودمنصف یک پاره خط را در نظر بگیرید و خطاهای وارد شده در آن را بررسی کنید.

خود را بیازماییم

در اندازه‌گیری یک فاصله با یک واحد اندازه‌گیری مثلاً یک تکه چوب چه خطاهایی وارد می‌شوند؟ در اندازه‌گیری یک فاصله با چوب کبریتهایی که ردیف شده، چه خطاهایی وارد می‌شود؟

فعالیت

روشی برای نقشه‌کشی یک زمین کشاورزی ناهموار ارائه کنید به طوری که با توجه به نقشه بتوان مساحت زمین را محاسبه کرد. خطاهایی که در روش شما (که برای محاسبه مساحت زمین ناهموار ارائه کرده‌اید) وارد می‌شوند را بررسی کنید.

احمد و محمود گفت‌وگوی ابن سینا و بیرونی را برای پدرشان یارمحمد خواندند. یارمحمد کشاورز از آن چه احمد و محمود آموخته‌اند بسیار شادمان شد و خدای بزرگ را سپاس گفت و برای تشویقشان از آنان خواست که نقشه‌ای برای زمین کشاورزیشان تهیه کنند و مساحت آن را محاسبه نمایند.

احمد : بیا هم اکنون به طرف زمین کشاورزی برویم و برای پدرمان نقشه‌ای برای زمین کشاورزی‌اش بکشیم.

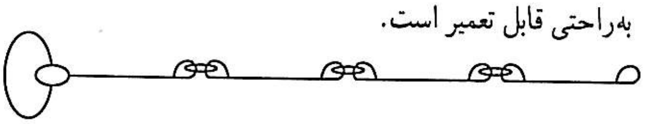
محمود : صبر داشته باش. زمین پدر ناهموار است. برای نقشه‌کشی حتماً به ابزارهایی نیاز داریم.

احمد : می‌توانیم با طول قدمهایمان زمین را اندازه بگیریم و یا اگر دقت آن کم است با یک چرخ‌دستی که روی چرخ آن علامت‌گذاری شده، می‌توانیم فاصله‌ها را برحسب محیط چرخ محاسبه کنیم.

خود را بیازماییم

در اندازه‌گیری فاصله دو نقطه با چرخ دستی چه خطاهایی وارد می‌شوند.

محمود : بهترین وسیله برای اندازه‌گیری فاصله در زمینهای ناهموار، زنجیر مساحی است که از میله‌های فلزی حلقه‌دار درست شده که توسط حلقه‌هایی به هم متصل شده‌اند. زنجیر مساحی به‌راحتی قابل تعمیر است.



خود را بیازماییم

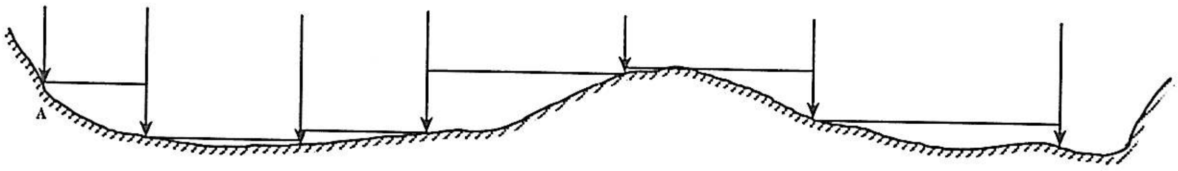
در اندازه‌گیری فاصله دو نقطه در زمین ناهموار با زنجیر مساحی چه خطاهایی وارد می‌شوند؟

احمد : زنجیر مسّاحی از کجا بیاوریم؟ اگر می‌خواهی این‌قدر دقیق محاسبه کنی متر فولادی پدر را برمی‌داریم. از زنجیر مساحی سبک‌تر و دقیق‌تر است و با آن فاصله‌های طولانی‌تری را می‌توان اندازه گرفت.

خود را بیازماییم

در اندازه‌گیری فاصله دو نقطه با متر فولادی بلند چه خطاهایی وارد می‌شوند؟

محمود : یک مشکل دیگر که در رسم نقشه داریم اندازه‌گیری فاصله نقاطی است که بین آنها پستی و بلندی است. می‌توان از میله‌های عمود بر زمین برای این کار کمک گرفت.



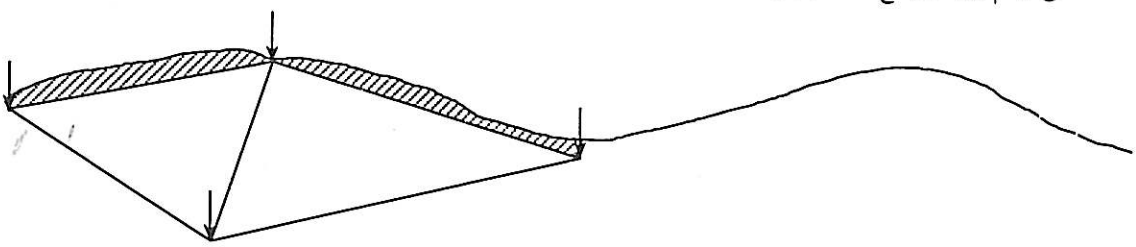
احمد : ما نمی‌توانیم مطمئن باشیم که میله‌ها کاملاً عمود بر زمین هستند و این دقت اندازه‌گیری را بسیار کم می‌کند. بهتر است از شاغولِ عمو بنّا استفاده کنیم. هرچند به میله‌هایی برای علامت‌گذاشتن روی زمین احتیاج داریم.

محمود : یادت باشد که زمین پدر بسیار ناهموار است. ناچاریم برای محاسبهٔ مساحت آن را به مثلثهایی تقسیم کنیم که تقریباً هموار هستند. مساحت زمین تقریباً برابر مجموع مساحت مثلثها خواهد بود.

احمد : می‌فهمم این در واقع همان روش ارشمیدس است. همان‌طور که دایره را می‌توان با چند ضلعی منتظم تقریب زد و طول محیط آن را با محیط چند ضلعی محاسبه کرد، می‌توان یک سطح ناهموار را با مثلثهایی که بسیار به سطح ناهموار نزدیکند تقریب زد. در این صورت مساحت سطح ناهموار، بسیار نزدیک به مجموع مساحتهای مثلثها خواهد بود.

محمود : اما مساحت مثلثها را چطور حساب کنیم؟

احمد : می‌توانیم هر گوشهٔ هر مثلث یک میله کار بگذاریم و میله‌ها را با ریسمان به هم وصل کنیم.



برای محاسبهٔ مساحت کافی است ارتفاع وارد شده از یک رأس بر ضلع مقابل را حساب کنیم که آن هم با توجه به این ایده که پای ارتفاع نزدیک‌ترین نقطه ضلع مقابل به رأس است، با یک ریسمان قابل محاسبه است. یک سر ریسمان را به میله می‌بندیم و با سر دیگر کمانی نزدیک به ضلع می‌زنیم و طول ریسمان را کم کم اضافه می‌کنیم تا ریسمان فقط در یک نقطه ضلع مقابل را قطع کند.

خود را بیازماییم

می‌خواهیم دیواری را با آجر سه سانتی روکاری کنیم. با متر فولادی ارتفاع دیوار ۲/۸۵ متر و طول آن ۱۰/۳۵ متر اندازه‌گیری شده است. چند آجر با قطع ۱۰×۳ که با خط‌کش اندازه‌گیری شده برای روکاری دیوار لازم داریم؟ خطاهایی را که در مسئله وارد می‌شوند در نظر بگیرید. به دنبال جواب واقعی باشید.

خود را بیازماییم

در محاسبه مساحت یک مثلث با متر فولادی و ریسمان چه خطاهایی وارد می‌شوند.

خود را بیازماییم

یارمحمد برای آبیاری زمین کشاورزی‌اش نیاز به یک نقشه تراز از زمین دارد. احمد و محمود را در تهیهٔ این نقشه یاری نمایید. ملاحظاتی را که در تهیهٔ نقشهٔ تراز باید در نظر داشت، بنویسید و آن را با ملاحظات همکلاسیهایتان مقایسه کنید. به نظر شما ترازیابی در چه مواردی کاربرد دارد؟ یک کاربرد این است که می‌توان با این روش مساحت زمین را با خطای کم‌تری اندازه گرفت.

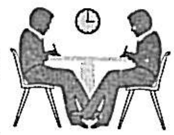
خطای نسبی

مینا و مینو با هم به کلاس نقاشی می‌روند. معلّم نقاشی امروز به ایشان آموخت که اندازه‌های اشیاء در نقاشی چه‌قدر در زیبایی نقاشی آنها می‌تواند مؤثر باشد.

مینا: داشتم فکر می‌کردم که چه‌قدر مهم است حوضی که دور آن مردم نشسته‌اند به همان اندازه‌ای که جا دارد به‌نظر بیاید و یا میزی که غذا روی آن چیده شده است به همان اندازه‌ای که می‌توان دور آن نشست به نظر بیاید.

مینو: چه مثال جالبی، هم دور میز باید درست به تعداد جا برای نشستن باشد و هم سطح میز باید آن‌قدر که غذا در آن جا می‌گیرد به نظر بیاید وگرنه ظرفها کوچک‌تر یا بزرگ‌تر از اندازهٔ واقعی به نظر می‌رسند.

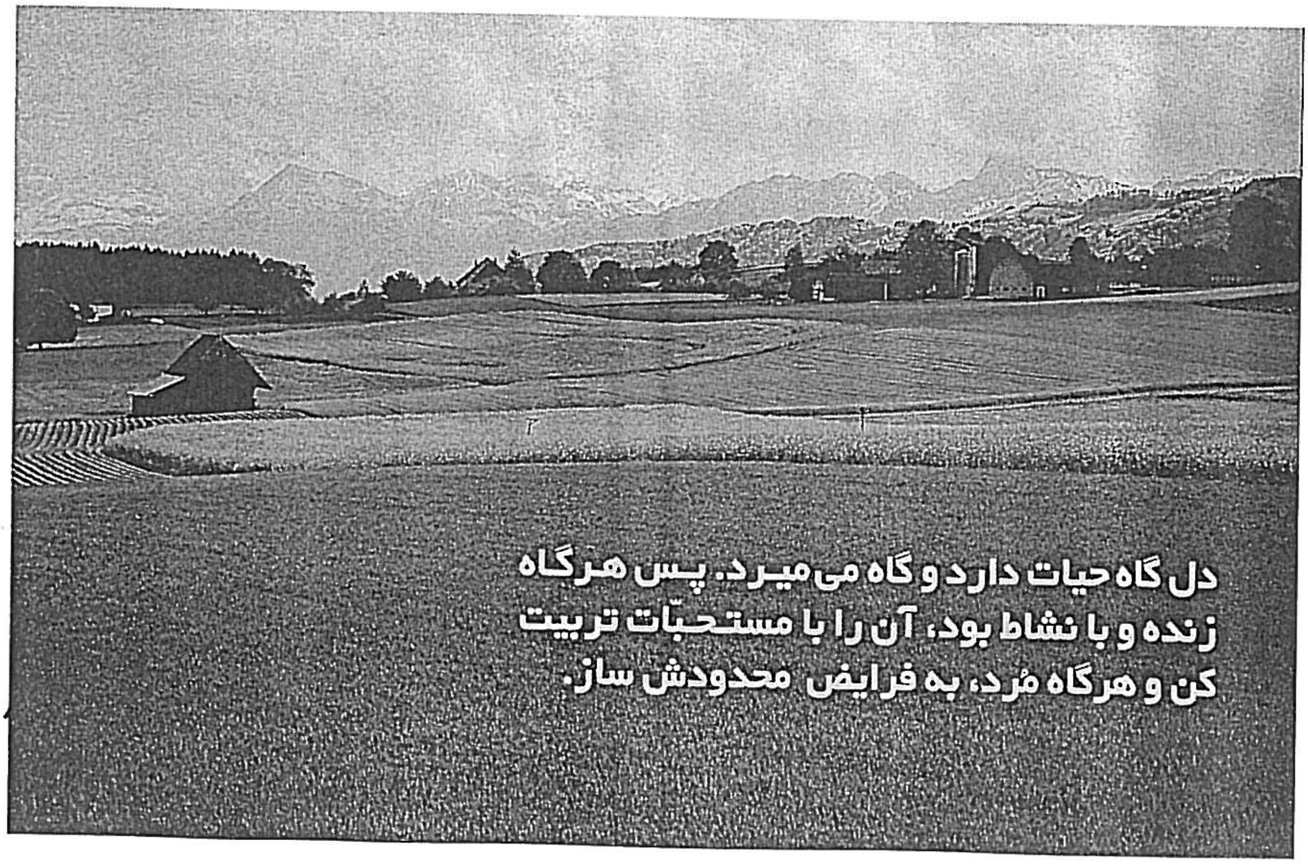
مینا: در واقع با این که محیط و مساحت میز چه‌قدر است سروکار داریم. همین سؤال را می‌توان در مورد حجم هم مطرح کرد. مثلاً گنجایش ظرفهای غذا باید همان‌قدر که غذا دربرگرفته‌اند به نظر برسد وگرنه غذا کم‌تر یا بیش‌تر از مقدار لازم برای افرادی که دور میز نشسته‌اند به نظر خواهد رسید. نکته‌ای که به نظرم جالب است این است که خطاهای نقاش که در فاصله‌ها ظاهر می‌شوند به طرز متفاوتی در سطح و حجم خود را نشان می‌دهد.



فعالیت

چند شکل ساده هندسی انتخاب کنید و برای آنها بررسی کنید اگر همهٔ طولها به اندازه ۰/۱ بزرگتر رسم شوند، محیط و مساحت هرکدام چقدر بزرگ‌تر به‌نظر می‌رسند؟ همین کار را برای کره یا مکعب هم انجام دهید. یعنی با فرض این‌که قطر کره یا ضلع مکعب کمی بزرگ‌تر رسم شده باشد بررسی کنید سطح خارجی و حجم هرکدام چقدر بزرگ‌تر به نظر خواهند رسید.

مینا: خوب می‌توان با محاسبه این را دید. محیط دایره $۲\pi r$ است که حاصلضرب طول قطر در عدد π است. فرض کنیم شعاع دایره ۴cm باشد. اگر قطر به مقدار ۰/۱ cm بزرگ‌تر به نظر برسد، محیط آن $\pi(۸+۰/۱)$ به نظر خواهد رسید. یعنی π ۰/۱ سانتی‌متر بزرگ‌تر. ولی مساحت دایره از فرمول $\pi r^۲$ به دست می‌آید. اما $\pi r^۲ = \frac{۱}{۴}\pi(۲r)^۲$



پس اگر قطر به مقدار E بزرگ‌تر به نظر برسد، مساحت $\frac{1}{4}(8+0.1)^2\pi$ به نظر خواهد رسید.

$$\frac{1}{4}(8+0.1)^2\pi=\frac{1}{4}(64+8\times0.1+0.1\times8+0.01)\pi$$

$$=(16+0.2+0.2+0.0025)\pi$$

پس اگر از $0.0025\pi cm^2$ صرف‌نظر کنیم مساحت $0.4\pi cm^2$ بزرگ‌تر به‌نظر خواهد رسید.

مینو : حالا می‌فهمم. مثلاً یک میز مربعی اگر ضلع آن E واحد بزرگ‌تر از اندازهٔ درست نقاشی شود محیط آن $4(a+E)-4a=4E$ بزرگ‌تر و مساحت آن :

$$4(r+E)^2-4r^2=4r^2+8rE+4E^2-4r^2$$

$$=8rE+4E^2\cong 8rE$$

بزرگ‌تر به‌نظر می‌رسد.

دوباره از جملات مرتبه دوّم و بالاتر برحسب E صرف‌نظر کردیم.

مینو : بگذار این اثر را برای حجم یک کره محاسبه کنیم. حجم کره ($\frac{4}{3}\pi R^3$) است. اگر بخواهیم آن را بر حسب قطر بنویسیم $\frac{1}{6}\pi(2R)^3$ خواهد بود حال اگر قطر به مقدار E بزرگ‌تر به نظر برسد، حجم کره $\frac{1}{6}\pi(2r+E)^3$ به نظر خواهد رسید.

حجم کره به قطر $2r+E$ $=\frac{1}{6}\pi(2r+E)(2r+E)(2r+E)$

$$=\frac{1}{6}\pi(4r^2+2rE+2Er+E^2)(2r+E)$$

$$\simeq\frac{1}{6}\pi(4r^2+4rE)(2r+E)$$

$$=\frac{1}{6}\pi(4r^2\times2r+4r^2E+4rE\times2r+4rE^2)$$

$$\simeq\frac{1}{6}\pi(8r^3+12r^2E)$$

هر جا توانستم جملات توان دوم از E را حذف کردم.

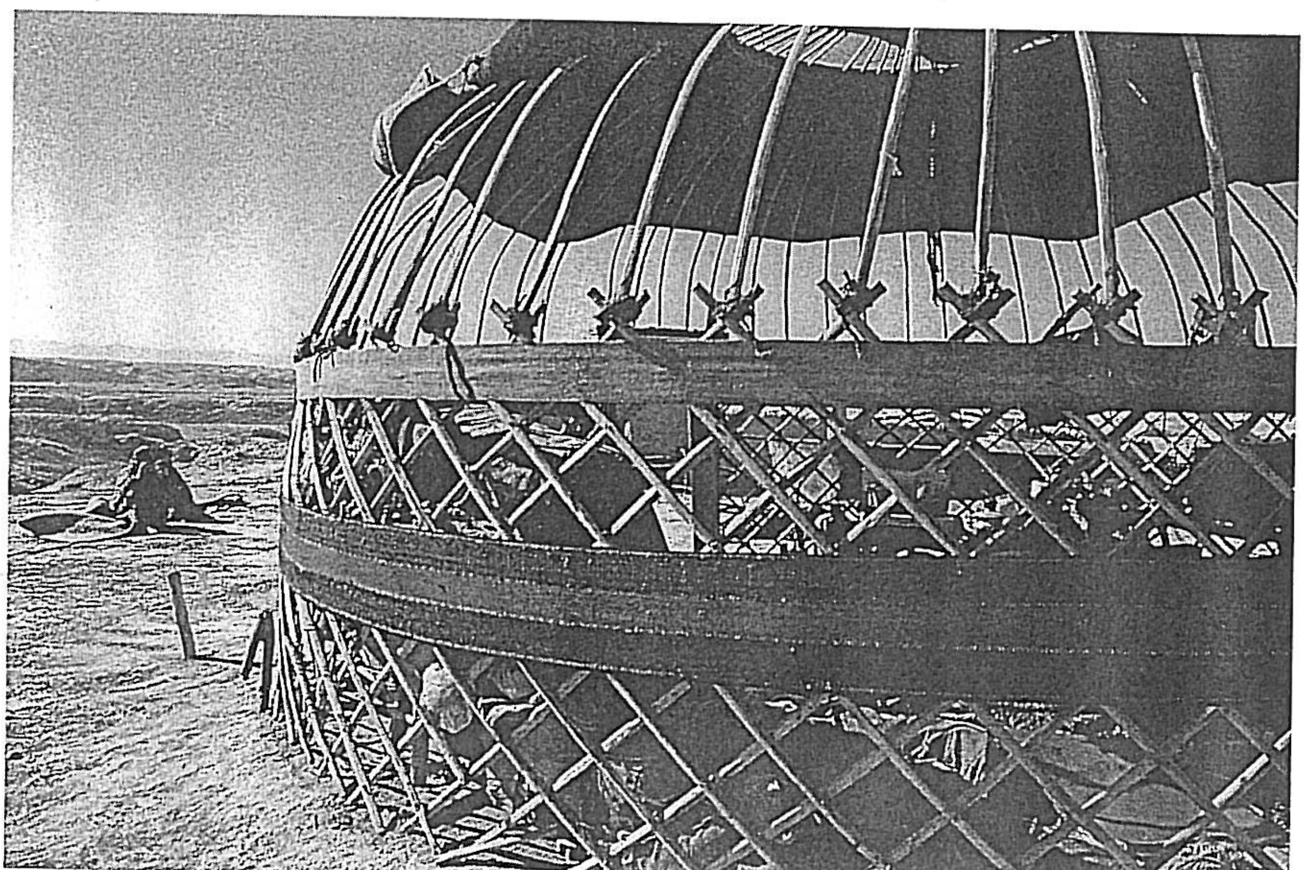
در نهایت حجم کره تقریباً

$$\frac{1}{6}\pi(8r^3+12r^2E)-\frac{1}{6}\pi\, 8r^3=2\pi r^2E$$

بزرگ‌تر به‌نظر می‌رسد.

مینا : مقایسه کن! تغییرات حجم نسبت به r از درجهٔ دوم است ولی تغییرات مساحت نسبت به r از درجهٔ اول است. تغییرات محیط، مساحت و حجم به کلی فرق دارند. اگر شعاع بزرگ شود محیط بیش‌تر از طول و مساحت خیلی بیش‌تر از محیط بزرگ می‌شود.

مینو : درست است. یعنی اگر در یک نقاشی چند تا بچه دور حوض نشسته باشند و حوض را کمی بزرگ‌تر نقاشی کنیم ممکن است خیلی بزرگ به نظر نیاید، ولی اگر در همان حوض



کمی بزرگ‌تر بچه‌ها در حال شنا باشند مساحت حوض بیش‌تر از اندازه واقعی به نظر می‌آید.

مینا : نتیجه می‌گیریم که نقاش باید بین موضوعاتی که محیط، مساحت و حجم موردنظر است تمایز قائل شود و در موارد مربوط به محیط و مساحت به ترتیب بیش‌تر و خیلی بیش‌تر در اندازه‌گیری دقت کند! چه جالب. من فکر می‌کردم در همهٔ اندازه‌گیری‌ها به‌یک اندازه دقت لازم است.

مینو : صبر کن. این مقایسهٔ ما کار اشتباهی است. اگر شعاع دایره یک سانتی‌متر باشد و در نمایش قطر آن، به اندازهٔ E خطا کنیم دیدیم که محیط πr سانتی‌متر بیش‌تر نشان می‌دهد. ولی مساحت تقریباً πrE سانتی‌متر مربع بیش‌تر نشان می‌دهد. ما نمی‌توانیم سانتی‌متر را با سانتی‌متر مربع مقایسه کنیم و بگوییم یکی بزرگ‌تر یا یکی کوچک‌تر است.

مینا : درست می‌گویی. ما نمی‌توانیم خطاها را مقایسه کنیم چون از یک جنس نیستند. اما می‌توانیم خطاهای نسبی را مقایسه کنیم یعنی نسبت خطای محیط به کل محیط یا نسبت خطای مساحت به کل مساحت یا نسبت خطای حجم به کل حجم را بررسی کنیم. در واقع آنچه چشم ما می‌بیند و ما از روی تصویر در مغزمان تحلیل می‌کنیم با مقایسه نسبتهاست. مثلاً از روی عکس یک درخت غول‌پیکر نمی‌توان اندازهٔ واقعی آن را فهمید ولی اگر یک آدم کنار آن ایستاده باشد، بزرگی درخت کاملاً مشخص می‌شود. چون چشم ما به نسبتها حساس است. در نقاشی چنان خطا می‌کند که نسبتها همان‌طور حفظ شود. وگرنه نقاش احساس می‌کند یک جای کار اشتباه است و تصویر درست به‌نظر نمی‌رسد.

فعالیت

خطای نسبی محیط و مساحت دایره و مربع را بررسی کنید.

امین و پارسا هنوز شهود خوبی از خطا نداشتند تا چه رسد به خطای نسبی! آنها ساده‌ترین شکل را برای محاسبه انتخاب کردند.

امین : فرض کنید مربعی به ضلع $۵cm$ داشته باشیم و آن را اشتباهاً $۵/۱\ cm$ اندازه‌گیری کرده باشیم. آن‌گاه محیط اندازه‌گیری شده $۴\times۵/۱cm$ و محیط واقعی $۴\times۵cm$ است و روی هم رفته $۰/۴\ cm$ در اندازه‌گیری محیط خطا داشته‌ایم. خطای نسبی می‌شود $\frac{۰/۴cm}{۴\times۵cm}$ که برابر $۰/۰۲$ می‌شود.

پارسا : ببین امین! خوب دقت کن. اگر ما می‌دانستیم خطای ما دقیقاً چقدر است که دیگر مشکلی نبود. همهٔ سختی مسئله به این است که نمی‌دانیم خطا چه‌قدر است؟ مثلاً اگر با یک خط‌کش مدرج اندازه‌گیری کنیم از روی نوع درجه‌بندی خطای ابزار مشخص می‌شود. در اکثر خط‌کشها خطا چیزی بین $۰/۱$ و $-۰/۱$ است. برای همین خطا را E می‌گیریم که عددی است کوچک بین $۰/۱$ و $-۰/۱$ که ما آن را نمی‌دانیم.

امین : بسیار خوب اگر ضلع اندازه‌گیری شده $۵+E cm$ باشد محیط اندازه‌گیری شده $۴\times(۵+E)cm$ و محیط واقعی $۴\times۵cm$ است. خطای اندازه‌گیری محیط $۴E\ cm$ خواهد بود و خطای نسبی $\frac{E}{۵}=\frac{۴E}{۴\times۵}$ می‌شود.

پارسا : باز هم خطا کردی! اگر ما طول ضلع واقعی را می‌دانستیم $۵cm$ است تا بگوییم محیط واقعی $۴\times۵cm$ است دیگر مشکلی نداشتیم. برای محاسبه خطای نسبیِ محیط باید خطای ابزار را بر محیط اندازه‌گیری شده تقسیم کنیم.

$$\frac{۴E}{۴\times(۵+E)}\simeq\frac{۴E}{۴\times۵}$$

اما این عدد با همان که گفتی تقریباً برابر است.

می‌توانیم $\frac{\text{خطا}}{\text{محیط واقعی}}$ را هم خطای نسبی بگیریم ولی برای طول ضلع واقعی a که آن را نمی‌دانیم.

امین : بهتر است چند شکل هندسی مهم را که محیط و مساحت آنها را می‌دانیم لیست کنیم. اشکالی که به نظر من می‌رسد دایره، مربع، مستطیل، لوزی، ذوزنقه، متوازی‌الاضلاع و مثلث هستند.

پارسا : خیلی مهم نیست لیست بلندبالایی داشته باشیم. بیش‌تر مهم است مثالهای متنوعی را مورد بررسی قرار دهیم. فکر می‌کنم مربع و دایره ساده‌ترین شکلها باشند. بیا سعی کنیم اول تغییرات نسبی را برای محیط و مساحت مربع حساب کنیم. اگر ضلع مربع با خطای E اندازه‌گیری شود خطای نسبی اندازه‌گیری طول $\frac{E}{a}$ خواهد بود که a نماینده طول ضلع مربع است.

$$\text{خطای نسبی محیط} = \frac{4(a+E)-4a}{4a} = \frac{4E}{4a} = \frac{E}{a}$$

$$\text{خطای نسبی مساحت} = \frac{(a+E)^2-a^2}{a^2} = \frac{a^2+2aE+E^2-a^2}{a^2}$$

$$= \frac{2aE+E^2}{a^2} = \frac{2E}{a}+\frac{E^2}{a^2} \simeq \frac{2E}{a}$$

امین : بگذار همین محاسبات را در مورد دایره هم انجام بدهیم.

فرض کنید قطر دایره با خطای E اندازه‌گیری شده باشد. در این صورت :

$$\text{خطای نسبی محیط} = \frac{\pi(2r+E)-2\pi r}{2\pi r} = \frac{\pi E}{2\pi r} = \frac{E}{2r}$$

خطای نسبی مساحت

$$= \frac{\frac{1}{4}\pi(2r+E)^2-\pi r^2}{\pi r^2} = \frac{\frac{1}{4}\pi(4r^2+4rE+E^2)-\pi r^2}{\pi r^2}$$

$$= \frac{rE+\frac{1}{4}E^2}{r^2} = \frac{E}{r}+\frac{1}{4}\frac{E^2}{r^2} \simeq \frac{E}{r} = \frac{2E}{2r}$$

خود را بیازماییم

خطای نسبی مساحت و محیط چند شکل سادهٔ هندسی مانند متوازی‌الاضلاع، مثلث و لوزی را محاسبه کنید و در آن الگویی جستجو کنید.

فعالیت

می‌دانیم که سلولها از سطح خارجی خود تغذیه می‌شوند. تغییرات نسبی سطح خارجی سلول و تغییرات نسبی حجم سلول را هنگام رشد مقایسه کنید و نتیجه بگیرید سلول برای تغذیه نیازمند تقسیم شدن است.

آرمان : رشد سلولها باعث تغییراتی در قطر، مساحت سطح خارجی و گنجایش قسمت محصور داخلی می‌شود. تغییرات مساحت سطح خارجی و حجم درون کره نسبت به تغییرات قطر با هم متفاوت هستند. می‌توان این را با محاسبه نشان داد.

امید : اگر قطر $2r$ رشد کند و به $2r+E$ تبدیل شود، می‌توان تغییرات سطح خارجی و همین‌طور تغییرات حجم سلول را محاسبه کرد.

$$\text{تغییرات سطح خارجی} = \pi(2r+E)^2-\pi(2r)^2$$

$$= \pi(4r^2+4rE+E^2)-\pi(2r)^2$$

$$= 4\pi rE+\pi E^2 \simeq 4\pi rE$$

$$\text{تغییرات حجم} = \frac{1}{6}\pi(2r+E)^3-\frac{1}{6}\pi(2r)^3 \simeq 2\pi r^2E$$

اگر بخواهیم تغییرات نسبی را محاسبه کنیم چنین خواهیم داشت :

$$\text{تغییرات نسبی قطر} \simeq \frac{E}{2r}$$

$$\text{تغییرات نسبی سطح خارجی} \simeq \frac{4\pi rE}{4\pi r^2} = \frac{E}{r} = \frac{2E}{2r}$$

$$\text{تغییرات نسبی حجم} \simeq \frac{2\pi r^2E}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3E}{2r}$$

آرمان : پس تغییرات نسبی حجم بیش از تغییرات نسبی سطح خارجی و آن بیش از تغییرات نسبی قطر است. شاید اگر سلول از یک مقداری بزرگ‌تر شود دیگر سطح آن نتواند برای تغذیه سلول جواب‌گو باشد و به ناچار سلول تقسیم شود!

امید : البته در این محاسبات شکل سلول را تقریباً کروی فرض کرده‌ایم. البته این اشکالی ندارد. برای تحلیل ریاضی ناچاریم بعضی فرضیات معقول را در نظر بگیریم.

خود را بیازماییم

خطای نسبی اندازه‌گیری مساحت جانبی و حجم چند شکل سادهٔ هندسی مانند استوانه، مکعب و منشور را محاسبه کنید و در آن الگویی جستجو کنید.

۳ـ۴ـ کنترل خطا

فعالیت

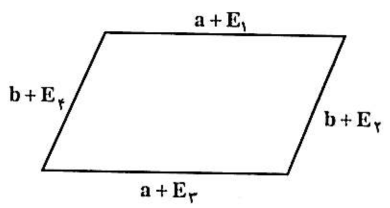
محیط و مساحت شکلهای مستطیل، لوزی، ذوزنقه، مثلث می‌توانند برحسب اضلاع، ارتفاعها و فواصل متفاوتی حساب شوند. هر یک از این محیطها و مساحتها را چگونه حساب کنیم تا با خطای کم‌تری مقدار واقعی را به دست آوریم؟

تارا و سارا از بین اشکال هندسی ساده متوازی‌الاضلاع را انتخاب کردند.

تارا : اول باید توجه کنیم که متوازی‌الاضلاع ساخته دست بشر هرگز یک متوازی‌الاضلاع واقعی نیست. برای اندازه‌گیری محیط متوازی‌الاضلاع دو راه بیش‌تر نداریم. یکی این‌که هر چهارضلع را اندازه‌گیری کنیم و دیگری اینکه دو ضلع را اندازه‌گیری کنیم و مجموع طول آنها را دو برابر کنیم. این‌جا فرض، این است که یک متوازی‌الاضلاع تقریبی داریم. یعنی با ابزارهای اندازه‌گیری که ما داریم اضلاع روبرو طول برابر دارند.

سارا : بسیار خوب. فرض کنیم یک چهارضلعی داریم که با اندازه‌گیری خطادار ما دو ضلع روبه‌روی آن برابر با 5cm و دیگر ضلع روبه‌روی دیگر برابر با 3cm هستند. اگر ابزار اندازه‌گیری ما از این خط‌کشهای معمولی باشد خطای اندازه‌گیری 1mm و یا 0/1 cm خواهد بود.

تارا : بیا برای کلی بودن راه‌حلمان اضلاع روبه‌رو را به‌ترتیب a و b سانتی‌متر بگیریم هر بار که اندازه‌گیری می‌کنیم اندازه‌گیری ما خطا دارد. اما خطای واقعی هر بار فرق می‌کند. پس درواقع چنین متوازی‌الاضلاعی داریم که ممکن است واقعاً متوازی‌الاضلاع نباشد.



اگر چهار ضلع را با یک ابزار که خطای آن ۱ میلی‌متر است مثل خط‌کش اندازه‌گیری کنیم محیط را چنین به‌دست می‌آوریم :

$$\text{محیط واقعی} = (a+E_1)+(b+E_2)+(a+E_3)+(b+E_4)$$

در این‌جا a طول اندازه‌گیری شدهٔ ضلع بزرگ‌تر توسط خط‌کش است و $a+E_1$ طول واقعی ضلع بزرگ‌تر است و E_1 خطای اندازه‌گیری است که می‌دانیم عددی است کوچکتر از خطای خط‌کش. یعنی فاصله $a+E_1$ و a کم‌تر از یک میلی‌متر است. پس E_1 عددی است با قدرمطلق کوچک‌تر از 1mm که ممکن است مثبت یا منفی باشد.

$$-1\text{mm} < E_1 < 1\text{mm}$$

چون همهٔ طولها را با خط‌کش اندازه‌گیری کردیم، برای هر $i=1,2,3,4$ داریم

$$-1\text{mm} < E_i < 1\text{mm}$$

یعنی E_1, E_2, E_3, E_4 همه بین 1mm و 1mm− هستند.

پس می‌توان در مورد خطای اندازه‌گیری محیط، چنین بنویسیم :

$$\text{محیط اندازه‌گیری شده} = a+b+a+b$$

$$\text{محیط واقعی} = (a+E_1)+(b+E_2)+(a+E_3)+(b+E_4)$$

محیط اندازه‌گیری شده– محیط واقعی= خطای اندازه‌گیری محیط

$$= E_1+E_2+E_3+E_4$$

البته این خطاها ممکن است همدیگر را خنثی کنند و کمتر شود اما چیزی که ما می‌دانیم این است که $-4\text{mm} < E_1+E_2+E_3+E_4 < 4\text{mm}$ پس در هر حال خطای اندازه‌گیری محیط 4mm است.

سارا : اگر دقت کنی E_iها همه اعدادی بسیار کوچک هستند. فرض برابری آنها چندان خدشه‌ای به محاسبات ما وارد نمی‌کند. هرچند فرضی واقعی نیست، ولی همان جواب نهایی را به ما می‌دهد. با فرض $E_1=E_2=E_3=E_4$ داریم.

$$4E = \text{خطای اندازه‌گیری محیط}$$

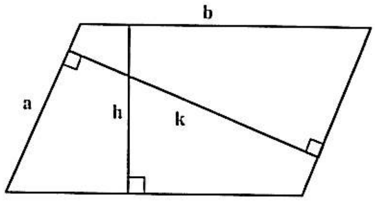
و می‌دانیم $-1\text{mm} < E < 1\text{mm}$ خطای اندازه‌گیری خط‌کش است.

پس $-4mm < 4E < 4mm$ که همان جواب قبلی را می‌دهد. یعنی به ما می‌گوید که خطای محاسبهٔ محیط متوازی‌الاضلاع با خط‌کش حداکثر ۴mm است.

تارا : حال برویم به سراغ مساحت متوازی‌الاضلاع

سارا : تا جایی که من می‌دانم، مساحت متوازی‌الاضلاع را فقط یک جور می‌توان حساب کرد. قاعده ضرب در ارتفاع!

تارا : ولی، انتخاب داریم که کدام قاعده را انتخاب کنیم.



مساحت هم از فرمول bh و هم از فرمول ak قابل محاسبه است.

سارا : بیا مشغول محاسبه شویم.

$ak =$ مساحت اندازه‌گیری شده

$(a+E_1)(k+E_2) =$ مساحت واقعی

$$= ak + aE_2 + E_1k + E_1E_2$$

مساحت اندازه‌گیری‌شده − مساحت‌واقعی = خطای‌اندازه‌گیری‌مساحت

$$= aE_2 + E_1k + E_1E_2$$

تارا : این خیلی پیچیده شد. من اصلاً نمی‌فهمم چکار داریم می‌کنیم.

سارا : خوب بگذار مثالی برایت بزنم اگر a را ۱۰۰mm اندازه‌گیری کردیم و k را ۵۰mm خطای اندازه‌گیری مساحت می‌شود $100mm \times E_2 + E_1 \times 50 + E_1E_2$

$$-100mm^2 < 100 \times E_2 < 100mm^2$$

اما $-50mm^2 < 50 \times E_1 < 50mm^2$ پس داریم.

$$-1mm^2 < E_1 \times E_2 < 1mm^2$$

$-100mm^2 - 50mm^2 - 1 <$ خطای‌اندازه‌گیری مساحت $< 100mm^2 + 50mm^2 + 1mm^2$

$-150mm^2 <$ خطای اندازه‌گیری مساحت $< 150mm^2$

از آن $1mm^2$ هم صرف‌نظر کردم چون تأثیری ندارد. پس در یک مساحت $50cm^2$ حدود $1/5cm^2$ خطا داریم.

تارا : این محاسبات سخت شد بیا مثل قبل همهٔ خطاها را همان E بگیریم.

سارا : خوب اگر اینطور است از خطای اندازه‌گیری طول برابر E باشد خطای محاسبه مساحت در هرکدام از این دو روش اینطور محاسبه می‌شود :

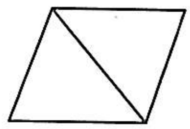
$$(b+E)(h+E) - bh = bh + bE + Eh + E^2 - bh$$
$$= (b+h)E + E^2 \cong (b+h)E$$
$$(a+E)(k+E) - ak = ak + aE + Ek + E^2 - ak$$
$$= (a+k)E + E^2 \cong (a+b)E$$

پس برای اینکه خطای محاسبه مساحت تا جای ممکن کم

باشد باید آن قاعده‌ای را انتخاب کنیم که قاعده + ارتفاع کوچکتر باشد.

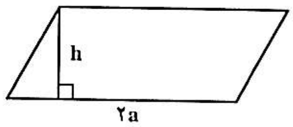
تارا : خیلی خوب. اما باید واقعاً ببینیم که $a+k$ و $b+h$ فرقی هم می‌کند؟ مثلاً از دو مثلث متساوی‌الاضلاع یک متوازی‌الاضلاع درست می‌شود.

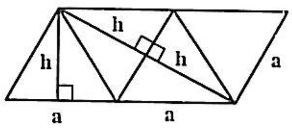
اما در این حالت $b+h=a+k$!

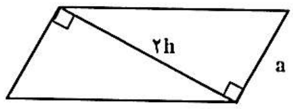


سارا : من مثال دیگری در نظر گرفتم. از چهار مثلث متساوی‌الاضلاع هم می‌شود یک متوازی‌الاضلاع ساخت.

می‌بینی که ۲a + h و ۲h + a با هم برابر نیستند. پس





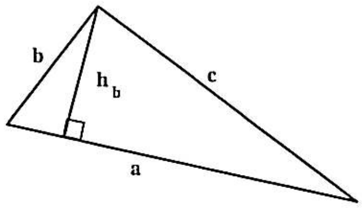


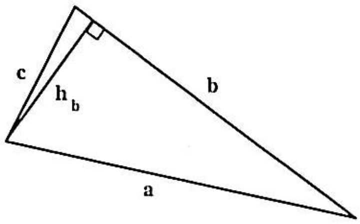
مناسب‌تر است که از فرمول h × ۲a مساحت را حساب کنیم تا از فرمول ۲h × a .

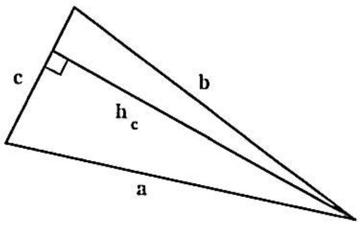
تارا : h × ۲a که با ۲h × a فرقی نمی‌کند.

سارا : اگر بخواهی دو قاعده و دو ارتفاع را با یک ابزار که خطای E دارد اندازه‌گیری کنی خطا خیلی هم فرق می‌کند.

تارا : بیا همین کار را برای مثلث انجام بدهیم. برای محاسبهٔ مساحت سه راه داریم فرمول نصف حاصل‌ضرب قاعده در ارتفاع برای سه انتخاب قاعده می‌تواند استفاده شود که خطای متفاوتی دارند.







$$\frac{1}{۲}(a+E)(h_a+E)-ah_a=\frac{1}{۲}(a+h_a)E+\frac{1}{۲}E^{۲}$$

$$\cong\frac{1}{۲}(a+h_a)E$$

$$\frac{1}{۲}(b+E)(h_b+E)-bh_b=\frac{1}{۲}(b+h_b)E+\frac{1}{۲}E^{۲}$$

$$\cong\frac{1}{۲}(b+h_b)E$$

$$\frac{1}{۲}(c+E)(h_c+E)-ch_c=\frac{1}{۲}(c+h_c)E+\frac{1}{۲}E^{۲}$$

$$\cong\frac{1}{۲}(c+h_c)E$$

پس برای این‌که خطای محاسبه مساحت مثلث کمتر باشد باید قاعده‌ای را انتخاب کنیم که قاعده + ارتفاع کم‌ترین باشد.

فعالیت

مهرزاد می‌خواست ظرفی بسازد که گنجایش آن یک لیتر باشد و با آن ظرف گنجایش بشکه‌ای را که پدرش در آن روغن ماشین نگه‌داری می‌کند، محاسبه کند. مهرزاد در محاسبه دقیق بود، اما در کار با ابزارها چندان تجربه نداشت. به‌همین خاطر از دوستش پدرام کمک خواست تا او را در ساختن یک ظرف چوبی یک لیتری کمک کند.

فکر می‌کنید مهرزاد و پدرام در ساختن این ظرف چوبی با چه خطاهایی سروکار خواهند داشت؟

مهرزاد : پدرام، می‌خواهم یک ظرف چوبی سرباز بسازم که درون آن به شکل یک مکعب به ضلع ۱۰ سانتی‌متر باشد، تا گنجایش آن یک لیتر باشد. می‌دانم که ممکن نیست ظرفی با گنجایش دقیقاً یک لیتر ساخت ولی می‌خواهم بدانم حداکثر اختلاف ممکن بین گنجایش ظرف و یک لیتر چه‌قدر است.

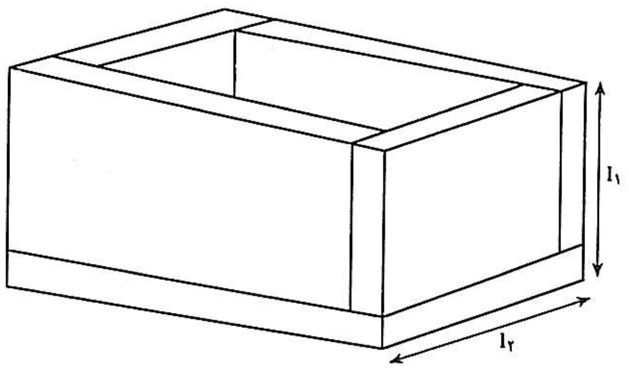
پدرام : برای این کار احتیاج به یک ابزار اندازه‌گیری و مقداری تخته داریم.

مهرزاد : من فقط یک خط‌کش دارم که در آن هر سانتی‌متر به ۱۰ میلی‌متر تقسیم شده است.

پدرام : من فکر می‌کنم در کارگاه پدرم بتوانیم چند تخته چوب پیدا کنیم.

مهرزاد : پس بیا به کارگاه برویم و ببینیم به اندازه کافی تخته چوب هست یا نه. پنج قطعهٔ ۱۰×۱۰ برای کار ما کافی است.

پدرام : اشتباه می‌کنی. حاشیه‌ها را حساب نکردی. بهتر است اوّل یک نقشه بکشیم.



مهرزاد : از این نقشه تازه می‌فهمم که بیش‌تر چیزها را در نظر نگرفته بودم. اولین کار این است که قطر این چند تخته چوب را پیدا کنیم. ببینم این‌جا کولیس ــ ورنیه داری؟

پدرام : نه! ولی برای اندازه‌گیری شما همان خط‌کش کافی است. خط‌کش را بده ببینم ... یک سانتی‌متر قطر تقریبی تمام این تخته چوبهاست. البته خودت بهتر می‌دانی که قطر این تخته‌ها همه جا دقیقاً یک سانتی‌متر نیست، اما با تقریب وسیله اندازه‌گیری ما که همین خط‌کش است می‌شود آن را یک سانتی‌متر گرفت.

مهرزاد : برای من مهم است که گنجایش ظرف خیلی نزدیک به یک لیتر باشد. برای این که بتوانم محاسباتم را انجام دهم، بهتر است قطر را چیزی بین ۹ میلی‌متر و ۱۱ میلی‌متر بگیریم.

پدرام : بسیار خوب، ولی یادت باشد که قطر تخته عدد ثابتی نیست. ضمناً بهتر است فعلاً آن را همان یک سانتی‌متر حساب کنی و آخر کار وقتی که جعبه ساخته شد به خطا فکر کنی.

مهرزاد : صبر کن ببینم چه تخته‌هایی لازم داریم ... یک مربع ۱۲×۱۲ برای کف و چهار مستطیل ۱۱×۱۰ برای چهار دیوار احتیاج داریم و همهٔ این اندازه‌ها را با ابزاری که داریم فقط می‌توان تا تقریب یک سانتی‌متر محاسبه نمود.

پدرام : محاسبات مشکل خواهد شد، چون هیچ وقت نمی‌توانیم مطمئن باشیم که شکلی که برای کف داریم مربع است. هر چهار ضلع آن تقریباً برابر ۱۲ سانتی‌متر هستند. اما هیچ کدام دقیقاً این طول را ندارند. ضمناً مربع بودن شکل را هم با گونیا می‌توان بررسی کرد ولی آن‌هم با خطاست.

مهرزاد : درست است که خط‌کش ما با میلی‌متر مدرج شده اما چشم ما می‌تواند تا نیم میلی‌متر را هم تشخیص دهد. می‌خواهم بگویم اگر گونیا زوایا را قائمه نشان دهد حداکثر نیم میلی‌متر جابه‌جایی اضلاع در خط ظاهر می‌شود.

پدرام : اگر می‌خواهی علمی کار کنی، تشخیص چشمی را باید کنار بگذاری و با خط‌کش اندازه‌گیری کنی.

مهرزاد : منظورت را نمی‌فهمم. خط‌کش را هم با چشمهایمان می‌خوانیم. چه اشکالی دارد. با این چشم تا نیم میلی‌متر را تشخیص بدهیم؟

پدرام : اشکال کار این است که چشم هم خطا دارد، اما ما سعی می‌کنیم با ابزار اندازه‌گیری خطای آن را ناچیز کنیم. چشم ممکن است یک مربع ببیند، ولی چهار ضلع آن هر یک کمی با مقدار موردنظر ما متفاوت باشد. مثلاً یک ضلع ۱۱۹ و یک ضلع ۱۲۰ و دو ضلع دیگر ممکن است ۱۲۱ میلی‌متر باشند، ولی ما این تفاوت را تشخیص ندهیم.

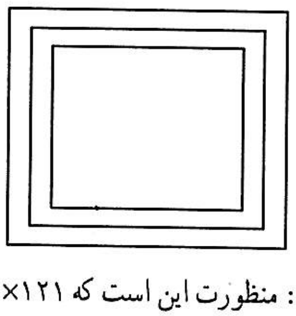
مهرزاد : بسیار خوب. فقط یادت باشد که خطا کم‌تر از یک میلی‌متر است. بهتر است اضلاع را $12+E_1$ و $12+E_2$ و $12+E_3$ و $12+E_4$ بگیریم که هر کدام از E_1, E_2 و ... عددی مثبت یا منفی بین یک میلی‌متر و منهای یک میلی‌متر است. خوب! اول باید بدانیم چه‌قدر چوب احتیاج داریم.

پدرام : پیدا کردن مساحت این شکل که چهار ضلع مختلف دارد کار ساده‌ای نیست، بخصوص که زوایای آن را نمی‌دانیم.

خود را بیازماییم

شما چه راه حلّی برای ساده شدن محاسبهٔ مساحت دارید؟

پدرام: من می‌گویم که بهتر است همه‌اضلاع را $12+E$ بگیریم که اگر خطای E همه جا بیش‌ترین مقدار هم باشد، یک مربع به‌ضلع ۱۲ سانتی متر به علاوهٔ یک میلی‌متر یا در واقع یک مربع به ضلع ۱۲۱ میلی‌متر احتیاج داریم. یعنی مطمئن هستیم که مربع ما حتماً در آن‌جا می‌گیرد.



مهرزاد: منظورت این است که ۱۲۱×۱۲۱ میلی‌متر مربع مساحت چوب مورد نیاز است؟

پدرام: خیر ۱۲×۱۲ سانتی‌متر مربع مساحت مورد نیاز است، اما چون در اندازه‌گیری خطا داریم آن را $(12+E)^2$ سانتی‌متر مربع بگیریم و چهار قطعه به مساحت $(10+E)\times(11+E)$ سانتی‌متر مربع.

خود را بیازماییم

مقدار چوب لازم برای بریدن قطعات بالا را محاسبه کنید. واقعی فکر کنید و همه خطاهایی را که در این محاسبه وارد می‌شوند در نظر بگیرید.

خود را بیازماییم

خطای حجم این ظرف چوبی حداکثر چقدر خواهد بود؟ برای سادگی از جملاتی مانند E^2 و E^3 که بسیار کوچک می‌شوند صرف‌نظر کنید.

دگرگونی و اندازه‌گیری

نامه خوارزمی به بوزجانی: دوست من، ابوالوفا. در پی آن هستم که نقشه‌ای از جهان اسلام تهیه کنم. اگر بتوانم ارتفاعات قله‌های کوه‌ها را در این نقشه مشخص کنم خواهم توانست بلندترین قله جهان اسلام را مشخص نمایم.

اما در این محاسبات به مشکل بزرگی برخوردم و آن این که نمی‌توانم تصمیم بگیرم که ارتفاع قله را نسبت به کدام یک از نقاط محاسبه حساب کنم. این سؤالات مشکل جدی‌تری را در نظرم آشکار نمود و آن این که سرزمینهای اطراف قله‌ها خود سرزمینهای مرتفعی هستند و این پستیها و بلندیها باعث می‌شود دیگر نتوانم قله‌های دور از هم را مقایسه نمایم. چون نقاطی را که مبداء اندازه‌گیری ارتفاع قله هستند نمی‌توانم مقایسه کنم، احتیاج به یک ارتفاع در دسترس دارم که همه جا برابر و قابل ارجاع باشد. تنها چاره‌ای که به نظرم می‌رسد محاسبه ارتفاع قله‌ها از سطح دریاست. اما دریا در بیابانها بسیار دور از دسترس است. با این روش تنها می‌توانم قله‌های نزدیک یک دریا را با هم مقایسه نمایم و این برای منظور من کفایت نمی‌کند. چند ماه است که به این مشکل فکر می‌کنم و چاره‌ای نجسته‌ام. دوست من، ابوالوفا اگر در این باره چاره‌ای بجویی مرا از سرگردانی نجات داده‌ای.

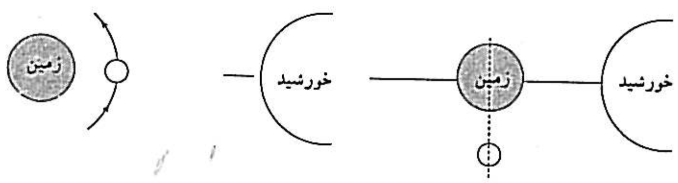
خود را بیازماییم

مشکل خوارزمی را بررسی کنید و سعی کنید برای حل این مشکل پاسخی بیابید چند مثال دیگر پیدا کنید که در آن اندازه‌گیری نیاز به خلاقیت داشته باشد.

نامهٔ بوزجانی به خوارزمی: دوست من، ابوجعفر. کار عظیمی که شروع کرده‌ای مرا متحیر ساخته است. گمان نمی‌برم که بتوانی چنین کار بزرگی را به تنهایی به انجام برسانی. در بغداد کارهای رصدخانه ما را چنان مشغول ساخته که گمان نمی‌کنم بتوانیم تو را در تصمیمت یاری کنیم. بی‌شک باید خودت دست به کارشوی و چندین شاگرد برای محاسبات مربوط به نقشه‌ات تربیت نمایی. شاید بغداد هم در این امر تو را یاری نماید. چون تهیهٔ نقشه‌ای از جهان اسلام آرزوی دیرینه حکام بغداد است.

و اما در مورد سؤال تو در باب سطح دریاها به عنوان مبدأ برای اندازه‌گیری ارتفاع قله‌ها باید بگویم که می‌توان چنین تصور کرد که سطح دریاها به‌طور فرضی به زیر خشکیها گسترانیده شده و با فرض این که دریاها همه به هم راه دارند یک سطح مبنا برای اندازه‌گیری در نظر گرفته شده است. هرچند در این انتخابها خللی هست، زیرا که به علت جریان آب دریاها و اختلاف نیروی کششی زمین در نقاط مختلف و نیروی کشنده ماه و خورشید سطح دریا ارتفاع ثابتی ندارد.

در هر شبانه روز آب دریاها دو بار بالا و پایین می‌رود که این حرکات متناوب و منظم هر یک بیش از ۶ ساعت طول نمی‌کشد. هنگام حلول ماه که ماه دقیقاً بین زمین و خورشید قرار می‌گیرد و پشت تاریک ماه به سوی زمین است نیروهای کششی ماه و خورشید یک‌دیگر را تقویت می‌کنند و در حالت بدر کامل که سایهٔ زمین روی ماه نمی‌افتد زمین تقریباً بین ماه و خورشید است و نیروهای کششی در یک محور ولی در جهات مخالف عمل می‌کنند.



چاره این است که حد وسطی برای این تغییرات قائل شویم. اگر بالاترین سطح آب دریا هنگام مد را مشخص کنیم و همین‌طور پایین‌ترین سطح آب را هنگام جذر، می‌توان حد وسط این دو مقدار را به عنوان سطح دریا در نظر گرفت. اما بعید می‌دانم که این سطح متوسط بتواند یک مبدأ جهانی برای اندازه‌گیری سطح قله‌ها باشد. چون این سطح متوسط به خصوصیات جغرافیایی منطقه نیز مربوط می‌شود.

با این حال سطح آب دریاها به نظر من هم، همه جا در دسترس نیست. چند وقت است هنگام رصد کردن به این فکرم که آیا ممکن است در سیاره‌ای دیگر در همین حین که ما آن سیاره را رصد می‌کنیم دیگری ما را رصد بنماید؟ یا آیا ممکن است روزی بشر از بیرون، کره زمین را رصد کند؟ اگر چنین باشد مقایسه ارتفاع قله‌ها از بالا بسیار راحت‌تر است تا از روی زمین. شوق دیدن کره خاکی از دور مرا از خواب و خوراک انداخته است آیا این رویا هیجان شما را برنمی‌انگیزد؟

اندازه‌گیری توسط ماهواره

حامد : این مجله را ببین! در آن به مقاله‌ای دربارهٔ نقشه‌کشی توسط ماهواره برخورد کردم. فکر نمی‌کردم ماهواره‌ها چنین اطلاعات جالبی در مورد کره زمین در اختیار ما بگذارند.

محمود : بله در این مورد چیزهایی تا به حال شنیده‌ام. مثلاً در مجلهٔ کوهنوردی خواندم که اخیراً گروهی از کارشناسان سازمان نقشه‌برداری کشور به قله دماوند صعود کرده‌اند و ارتفاع قله را توسط ارتباط با شبکه ماهواره‌ای (G.P.S) محاسبه نموده‌اند. محاسبات مربوط به این اندازه‌گیری در سازمان نقشه‌برداری انجام شده و ارتفاع قله ۵۶۱۰/۲۷ متر از سطح متوسط دریا اعلام شده است که با مقدار اعلام شده قبلی (۵۶۷۵ متر) بیش از ۶۰ متر تفاوت دارد. نوشته بود این کارشناسان پس از ارتباط با ۲۶ ماهواره که در ۲۰،۰۰۰ کیلومتری سطح زمین به دور آن گردش می‌کنند قادرند طول و عرض جغرافیایی و ارتفاع هر نقطه از زمین را محاسبه کنند، شگفت‌انگیز نیست؟

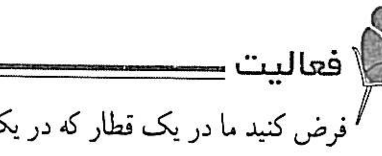
حامد : عجب! پس قله دماوند را ما ۶۰ متری بلندتر می‌دانستیم ... اینجا نوشته اولین‌بار تکنیک اندازه گیری ارتفاع توسط ماهواره به وسیله ماهواره SKYLAB در سالهای ۷۴ـ۱۹۷۳ به کار گرفته شد که دقت سنجش آن حدود یک تا دو متر بود. در سال ۱۹۸۵، GEOSAT توسط نیروی دریایی آمریکا پرتاب شد که دقت رادار ارتفاعی آن حدود ۳/۵ سانتی‌متر می‌باشد. هدف اصلی مأموریت این ماهواره تعیین سطح متوسط دریا در نقاط مختلف اقیانوسها با دقت بالا بود. به همین دلیل داده‌های آن در ۱۸ ماه اوّل آن محرمانه بود و تنها قسمت کوچکی در سال ۱۹۹۰ ارائه شد. در سال ۱۹۹۱ هم اولین ماهوارهٔ سنجش از دور اروپا (ERSI) به فضا پرتاب شد.

محمود : اما در ذهن من سؤالی پیش آمده و آن این که ماهوارهٔ در حال حرکت چه‌طور می‌تواند اندازه‌گیری نماید؟ مگر برای اندازه‌گیری احتیاج به سکون نداریم؟ بالاخره اندازه‌گیری وقت می‌برد.

فعالیت

فرض کنید ما در یک قطار که در یک ریل مستقیم با سرعت ثابت حرکت می‌کند نشسته‌ایم و می‌خواهیم در مورد مناظر اطراف اندازه‌گیری کنیم. هر چه سرعت بیش‌تر باشد ما وقت کم‌تری برای اندازه‌گیری داریم و خطا بیش‌تر می‌شود. روشی برای اندازه‌گیری فاصلهٔ یک درخت از ریل ارائه کنید.

محمود : بیا فرض کنیم که سرعت آن‌قدر زیاد نباشد که وقت نداشته باشیم اندازه‌گیری کنیم ولی قطار ثابت هم نباشد و می‌خواهیم در مورد مناظر اطراف اندازه‌گیری کنیم. هر چه سرعت بیش‌تر باشد ما وقت کم‌تری برای اندازه‌گیری داریم و خطا بیش‌تر می‌شود. مثلاً ما می‌توانیم فاصله یک تیرچوبی را تا نقطه خاصی از ریل به این روش محاسبه کنیم:



با زاویه θ نسبت به جهت حرکت نگاه می‌کنیم به محض این که تیر روی خط دید ما قرار گرفت، زمان‌سنج را روشن می‌کنیم و بعد در جهت زاویه α نسبت به خلاف جهت حرکت قطار نگاه می‌کنیم و به محض این که تیرچوبی روی خط دید ما قرارگرفت زمان‌سنج را خاموش می‌کنیم. زمان اندازه‌گیری شده فاصلهٔ دو نقطهٔ مورد اندازه گیری را به ما می‌گوید چون سرعت حرکت قطار را داریم و به این روش محل نسبی تیرچوبی نسبت به ریل قطار را محاسبه می‌کنیم.

احمد : بله و این اندازه‌گیری این اشکال را دارد که اگر بخواهی فاصلهٔ تیرچوبی تا قطار در حال حرکت را حساب کنی تا محاسبات را انجام دهی ما به کلی از نقطه قبلی دور شده‌ایم.

محمود : معجزهٔ کامپیوتر هم در این است که این همه محاسبات را در کسری از ثانیه انجام می‌دهد. اما بحث اصلی خطای این محاسبات است. چون زوایای دید θ و α با سرعتهای متفاوتی به تیر چوبی نزدیک می‌شوند. خطای روشن و خاموش کردن به موقع زمان‌سنج در این دو حالت متفاوت است.

فصل ۴

مدلسازی تغییر

مقدمه

آلبرتی : بی‌شک لئوناردوی جوان به نقاشی بی‌اندازه علاقه‌مند است. بگو ببینم لئوناردو به نظر تو مهم‌ترین چیزی که یک نقاش برجسته باید بداند چیست؟

داوینچی : باتیستای عزیز، نور و بینایی! و من در هندسهٔ بینایی بسیار اندیشیده‌ام. پخش نور از منبع نور، بسیار شبیه است به پخش موج عرضی که بر اثر افتادن سنگی در آب راکد پدید می‌آید. توان موج متناسب با نیروی ضربه تغییر می‌کند و شکل آن از تعداد نامحدودی هرم تشکیل شده است که با نزدیک شدن به‌چشم به‌تدریج محو می‌شوند و از طرف دیگرِ مردمک چشم مخروط یا هرم دیگری از پرتوهای نوری را تشکیل می‌دهد. تصویر از طریق اعصاب به بخش اثر گذارندهٔ مغز می‌رود و در آن‌جا تأثیرات حاصل از ضربه‌های اعصاب را که به کار حواس دیگر می‌آیند (داوینچی این طور فکر می‌کرد) به هم می‌پیوندد. به نظر من همه حواس در اثر ساز و کارهای ضربه‌ای مشابهی به فعالیت درمی‌آیند.

آلبرتی : شنیده‌ام که به کالبد شکافی هم علاقه‌مند هستی. هر چند این نظریه که اعصاب با ضربه کار می‌کنند بسیار جالب است، اما از دید من که یک نقاش هستم این نظر که شعاع نور باعث دیدن می‌شود اهمیت دارد. فیلسوفان باستانی در این مورد که این شعاعها از چشم ما به جسم می‌رسند، یا از اجسام به چشمان ما می‌رسند بسیار مباحثه کرده‌اند، اما این بحثها برای ما بسیار مشکل و خارج از فایده است. سؤال من این است که برای فهمیدن شعاع نور و این که چگونه با این شعاعهای مستقیم می‌بینیم چه باید بدانیم؟

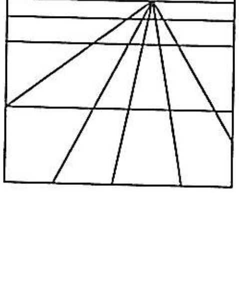
داوینچی : بی‌شک کلید فهم نیروهای طبیعت ریاضیات است. اما قواعد مربوط به آن نیروها را باید با تجربهٔ بصری، آزمایش و عقل دریافت.

آلبرتی : درست است. اما بگذار قبل از هر چیزی روشن کنم که من یک نقاش هستم. از ریاضیات استفاده می‌کنم، ولی نه به عنوان یک ریاضی‌دان بلکه به عنوان یک نقاش. از دید من نقطه شکلی است که نمی‌تواند به چند قسمت تقسیم شود. اگر این نقاط یکی پس از دیگری در یک ردیف کنار هم قرار گیرند یک خط را می‌سازند که طول آن قابل تقسیم است، اما پهنای آن چنان باریک است که نمی‌تواند شکافته و قسمت شود. بعضی از خطوط مستقیم و بعضی خمیده‌اند. اگر خطوط همان‌طور که یک پارچه از تاروپود تشکیل شده است کنار هم قرار بگیرند یک سطح تشکیل می‌شود. که شکلی است که پهنا و طول دارد، اما فاقد هرگونه عمق است. اما سطح را می‌توان با خصوصیاتی مشخص کرد. مانند بیرونی‌ترین نقاط آن که لبه‌های آن را تشکیل می‌دهد، که می‌توانند از خطوط خمیده یا راست تشکیل شده باشند و با تغییرات شکل این لبه‌ها نام سطح تغییر می‌کند ؛ مثلاً دایره، مثلث، مربع و یا چند ضلعی نامیده می‌شود. این تغییرات می‌توانند با کوتاه شدن و بلند شدن خطهای لبه‌ای باشند یا با بزرگ و کوچک شدن نواحی گوشه‌ای محدود به دو خط که هم‌دیگر را می‌شکنند. این نواحی را زاویه می‌نامیم. بعضی از سطوح تخت هستند و اگر به هر روشی یک خط کش راست روی آنها بگذاریم همهٔ قسمتها کاملاً با آن سطح تماس پیدا می‌کند و بعضی سطوح خمیده و کروی هستند. مانند کره یا سطح تخم‌مرغ.

داوینچی : می‌خواهید بگویید که برای نقاش مهم نیست که تصویر در اعصاب درونی تشکیل می‌شود یا در سطح چشم مانند یک آینهٔ زنده. می‌گویید عمل چشم به عنوان یک موجود زنده لازم نیست مورد توجه باشد و فقط باید به نقاط، خطوط و صفحات بیاندیشیم؟

آلبرتی : دقیقاً همین طور است. حال که منظورم را فهمیدی بگو ببینم در مورد خطوط راست چه مشاهداتی داشته‌ای؟

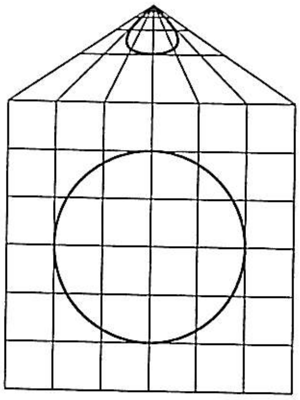
داوینچی : وقتی افق را می‌بینم، همهٔ خطوط موازی به نقطه‌ای روی خط افق منتهی می‌شوند.



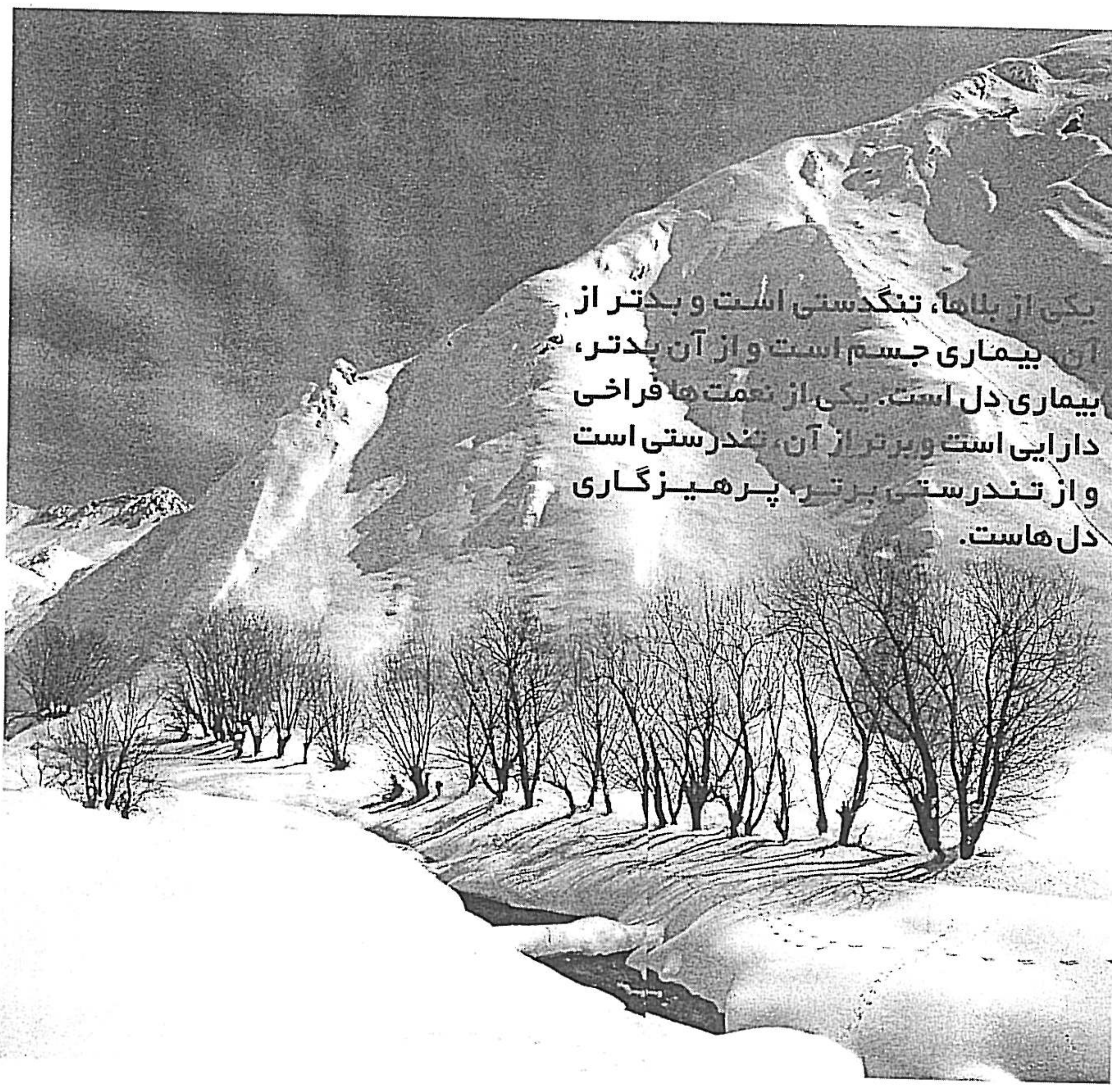
همین‌طور هر چه دورتر را نگاه می‌کنم، فاصله‌های مساوی به تناسب کوچک‌تر به نظر می‌رسند.

آلبرتی : آفرین بر تو! این همان نکته‌ای است که می‌خواستم بگویم. ما همه چیز را با مقایسه کردن می‌شناسیم. چون مقایسه درون خود نیرویی دارد که می‌تواند بلافاصله اشیاء کم‌تر، بیش‌تر یا مساوی را نمایان کند. بنابراین، چیزی را بزرگ می‌بینیم که از چیز کوچکی بزرگ‌تر باشد و چیزی را روشن می‌بینیم که از سایه، روشن‌تر باشد و چیزی را درخشان می‌بینیم که درخشان‌تر از چیزی درخشنده باشد.

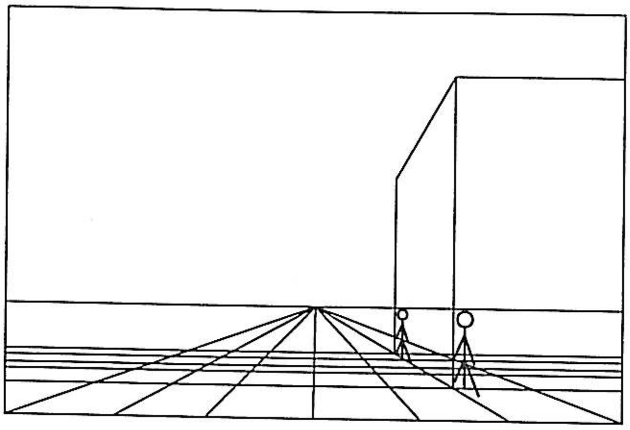
داوینچی : و به همین دلیل است که درکشیدن یک حوض دایره‌ای شکل قسمتهایی که از ما دورند باید با خمیدگی کم‌تری رسم شوند.



آلبرتی : آفرین بر تو! به این اصل «پرسپکتیو» می‌گویند. می‌بینی که اگر هندسه بدانی، برای این که یک نقاش بزرگ باشی، یکی از چیزهایی که لازم داری، این است که یاد بگیری با دستان خود خطوطی را که در ذهن خود داری، دنبال نمایی!



۴ـ۱ـ مدلسازی عددی هندسی و جبری



بنفشه دختر با دقتی است. همیشه اطراف خود را با دقت مشاهده می‌کند و به ریزه‌کاریها توجه می‌کند.

بنفشه : اگر روی یک صفحه شطرنجی که تا افق ادامه دارد ایستاده باشیم صحنه عجیبی را مشاهده خواهیم کرد. این‌طور به نظر می‌آید که خطوط موازی صفحه شطرنجی در افق همدیگر را قطع کرده‌اند. امّا این کاملاً آشکار است که این خطوط چون موازی هستند، نباید همدیگر را قطع کنند. باید رازی در این پدیده نهفته باشد.

فعالیت

خطوط دید خود را در نظر بگیرید و سعی کنید با آنها توضیح دهید چرا به نظر ریلهای راه‌آهن در آن دوردورها به هم می‌رسند.

بنفشه : اولین بار در خیابان متوجه این نکته شدم. تمام خطوط ساختمانهای دو طرف خیابان که موازی خیابان هستند به نظر متقاطع می‌رسند. این واقعاً باور نکردنی است!

لاله که نقاش زبردستی است و به نقاشی طبیعت و مناظر اطراف خود بسیار علاقه دارد پاسخ داد : فکر می‌کنم من این راز را بدانم. راز این پدیده تناسب است.

بنفشه : تناسب به خطوط موازی چه ربطی دارد؟

لاله : استاد نقاشی ما همیشه درباره تناسب صحبت می‌کند. او می‌گوید ما همه چیز را با مقایسه می‌شناسیم. مقایسه در ذات خود دارای قدرتی است که فوراً به ما می‌گوید که شیء مورد نظر بزرگ‌تر، کوچک‌تر یا برابر با شیئی دیگری است. با مقایسه شیء را بزرگ می‌بینیم وقتی بزرگ‌تر از شیء کوچک باشد و شیء را بسیار بزرگ می‌بینیم وقتی بزرگ‌تر از شیء بزرگ باشد. شیء را روشن می‌بینیم وقتی روشن‌تر از سایه باشد و شیء را درخشان می‌بینیم وقتی روشن‌تر از شیء روشن باشد. هر چه اشیایی که با آن مقایسه می‌کنیم برای ما آشناتر می‌باشند، مقایسه قوی‌تر اثر می‌گذارد.

مقایسه کردن نه‌تنها در تصویرسازی ابزاری قدرتمند است، بلکه در پیشگویی رفتار پدیده‌ها بسیار مهم بلکه تنها روشی است که در دست داریم.

رشد و تقسیم سلولها

آرمان و امید دربارهٔ فرآیند رشد و تقسیم سلولها بسیار کنجکاو بودند. آنها دوست داشتند بدانند که سلول چگونه از زمان تقسیم خود آگاه می‌شود و چگونه این تقسیم به تولید دو سلول هم اندازه می‌انجامد. امید و آرمان علاقه داشتند تا دربارهٔ پاسخ این سؤالات تحقیق و بررسی کنند. اما هیچ وسیله‌ای دراختیار نداشتند تا بتوانند در مورد سلولها به آزمایش بپردازند. به همین دلیل از معلم زیست‌شناسی خود کمک خواستند.

معلّم، امید و آرمان را با خود به یکی از آزمایشگاه‌های زیست‌شناسی برد و وسائل آزمایشگاهی در اختیار آنها گذاشت.

امید : اولین چیزی که باید به آن توجه کنیم این است که ما به دنبال اصول بنیادی برای رشد و تقسیم سلولها هستیم. تدوین تئوری معتبر برای تکثیر سلول باید بر مبنای ویژگیهای مشترک سلولهای گوناگون بسیاری باشد. اما آیا دلیلی وجود دارد که فرض کنیم میان سلولهای مختلف اصول مشترکی حکم‌فرماست؟

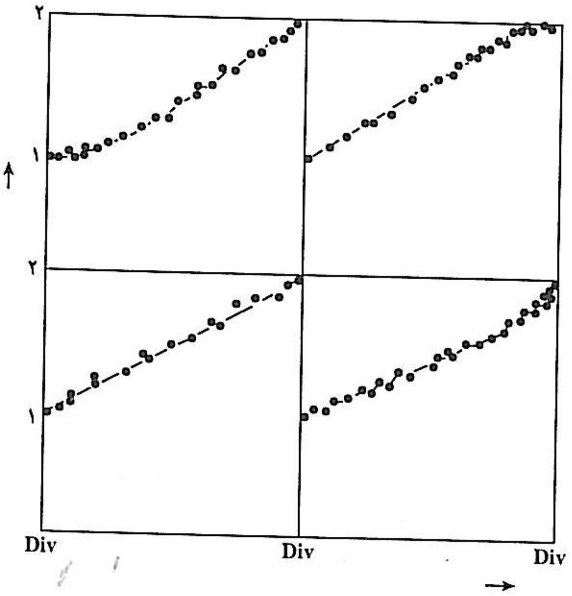
آرمان : این چه سؤالی است که می‌پرسی؟ علوم مختلف همین‌جور به‌وجود آمده است. در واقع ما سلولها را با تقریبی یکسان می‌گیریم و یک تئوری تقریبی برای رشد و تقسیم آنها می‌دهیم. انواع سلولها بسیار بسیار زیاد است و ما فقط می‌توانیم آزمایشهای محدودی انجام دهیم. ناچاریم چند سلول معروف را انتخاب کنیم. و اولین سؤال این است که سلول را چطور وزن کنیم چون وزن سلول در حال رشد ساده‌ترین اطلاعاتی است که می‌توانیم جمع‌آوری کنیم.

امید : وزن کردن یک کودک یا یک گیاه در حال رشد آسان است. اما وزن کردن سلول کار ساده‌ای نیست.

آرمان :حتماً روشهایی برای اندازه‌گیری وزن سلولها وجود دارد. باید از دبیر زیست‌شناسی در این مورد سؤال کنیم. اما همیشه می‌توان عدهٔ زیادی سلول را وزن کرد و وزن متوسط آنها را به‌دست آورد.

امید : وزن متوسط فایده‌ای ندارد. می‌خواهیم ببینیم یک سلول خاص در چه وزنی تقسیم می‌شود.

امید و آرمان از معلّم خود روشی دقیق برای اندازه‌گیری وزن سلولها آموختند و مشغول آزمایش شدند و به این نتیجه رسیدند که برای تمام سلولهایی که مورد آزمایش قرار دادند رشد وزن اندکی پس از تقسیم به صورت خطی درمی‌آید. برای هر کدام از سلولها نموداری برای رشد وزن از هنگام تقسیم تا آمادگی برای تقسیم دوباره رسم نمودند و به وسیله این نمودار قادر بودند رفتار رشد و تقسیم سلول را پیش‌بینی کنند.



آرمان و امید از آزمایش نتیجه گرفتند که پدیده رشد سلول یک فرآیند خطی است. معلم آزمایش و نتیجه‌گیری ایشان را تأیید کرد و گفت : معمولاً پدیده رشد غیرخطی است. اما آزمایش شما نشان می‌دهد که رشد سلول خطی است. بنابراین باید درون سلول سیستم کنترل‌کننده‌ای وجود داشته باشد که رشد آن را کنترل کند.

امید : به پاسخ هیچ کدام از سؤالات اساسی خود در مورد رشد و تقسیم دست نیافته‌ایم. اما با نمودارهای خود می‌توانیم رشد و تقسیم سلولهای مورد مطالعه‌مان را پیشگویی کنیم. به نظر می‌رسد برای پیشگویی چندان هم لازم نیست چیزهای زیادی بدانیم!

خود را بیازماییم

یک پدیدهٔ رشد در اطراف خود انتخاب کنید و غیرخطی بودن آن را مورد تحقیق قرار دهید.

فعالیت

دی‌اکسیدکربن موجود در جوّ زمین

در نمودار زیر مقدار دی‌اکسیدکربن موجود در اتمسفر برای چندین سال مختلف محاسبه شده است. مقدار دی‌اکسیدکربن موجود در اتمسفر یکی از عوامل کلیدی گرم شدن سرتاسری کرهٔ زمین است.

در این جدول نشان داده شده که در هر سال چند میلیونیوم از اتمسفر را دی‌اکسیدکربن تشکیل داده است.

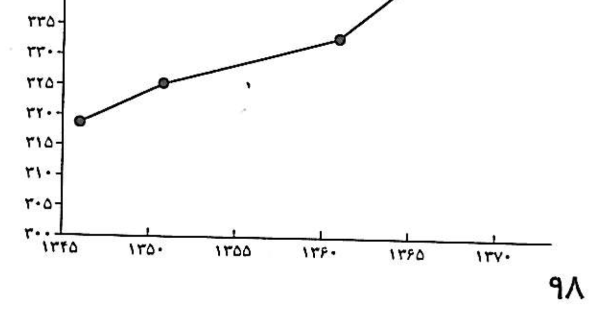
سال	میلیونیوم (تمرکز دی‌اکسیدکربن)
۱۳۴۶	۳۱۹/۹
۱۳۵۱	۳۲۵/۳
۱۳۶۱	۳۳۸/۵
۱۳۶۹	۳۵۱/۳

دی‌اکسیدکربن با چه سرعتی رشد می‌کند؟ در چه سالی تمرکز دی‌اکسیدکربن ۳۰۰ میلیونیوم بوده است؟ در چه سالی به ۴۰۰ میلیونیوم خواهد رسید؟ تمرکز دی‌اکسیدکربن در سال آتی را نیز محاسبه کنید.

کیومرث و کامران وکاوه از سه روش عددی، هندسی و جبری این مسئله را مورد بررسی قرار دادند.

کامران : من برای حل این مسئله از نمودارهای هندسی کمک گرفتم. مختصات دکارتی و معادلهٔ خط در آن توجه مرا جلب کرد. تصمیم گرفتم به جای آن که درمعادله برای نمایش خط از زبان جبری استفاده کنم، از خط برای نمایش هندسی یک رابطه جبری بهره ببرم. چیزی کمی متفاوت با آن‌چه موردنظر دکارت بود. الگوی هندسی به دست آمده این‌جاست. نقاط نمودار را با پاره‌خط‌هایی وصل کردم تا الگویی به‌دست بدهند.

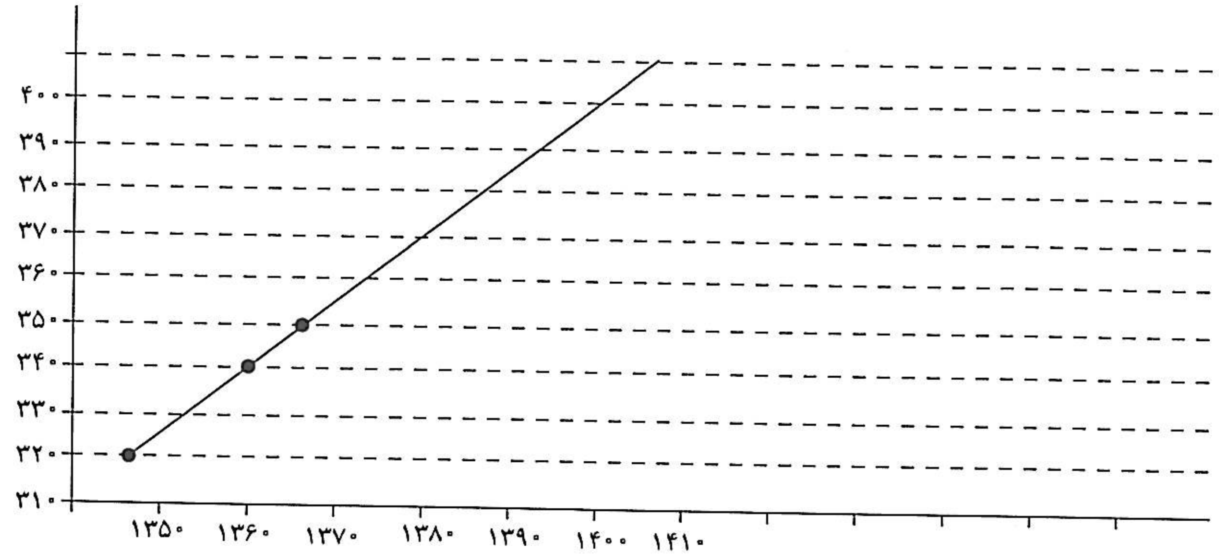
به ادامه دادن این پاره‌خط‌ها از دو طرف تقریباً می‌توان حساب کرد در چه سالهایی تمرکز دی‌اکسیدکربن ۳۰۰ و ۴۰۰ میلیونیوم بوده است.



کیومرث : من خیلی ساده‌تر فکر کردم. از سال ۱۳۴۶ تا ۱۳۵۱ تمرکز دی‌اکسیدکربن ۵/۴ میلیونیوم افزایش داشته و در ۱۰ سال بعد ۱۳/۲ میلیونیوم و در ۸سال آخر ۱۲/۸. اگر بخواهیم فرض کنیم رشد سالانه تمرکز دی‌اکسیدکربن تقریباً ثابت بوده است باید به آن عددی نسبت دهیم. اعداد بالا نشان می‌دهند این رشد سالانه حداقل ۱/۰۸ و حداکثر ۱/۶ است و این نشان می‌دهد که مثلاً از سال ۱۳۶۹ چند سال باید بگذرد تا تمرکز دی‌اکسیدکربن به ۴۰۰ برسد. چیزی بین $\frac{۴۰۰-۳۵۱/۳}{۱/۰۸}$ و $\frac{۴۰۰-۳۵۱/۳}{۱/۶}$ که اگر حساب کنیم می‌شود چیزی بین ۴۵ سال و ۳۰ سال. البته به‌طور تقریبی! شما دو نفر چه عددی به دست آوردید؟

کامران : حدود ۴۰ سال و ۳۰ سال. البته نمی‌دانم چه قدر دقیق اما مطمئن هستم خطای روش من به زیادی روش کیومرث نیست. حداکثر ۵ سال خطا داشته باشد.

کاوه : کاری که من کردم خیلی شبیه روش کیومرث است. سعی کردم خطی پیدا کنم که بهترین تقریب برای این چهار نقطه باشد. چون ما خبر نداریم در آینده چه اتفاقی می‌افتد و مجبوریم با ساده‌ترین سیستم ریاضی نمودار را تقریب بزنیم.



معادله را با عوض کردن ضرایب کم و بیش بهتر و بهتر کردم. آخرین ضرایبی که تقریباً به داده‌ها می‌خورد این ضرایب است.

دی‌اکسیدکربن =۱/۳۶۶× سال −۱۷۴۴

در سال ۱۴۰۲ مقدار دی‌اکسیدکربن این طور به‌دست می‌آید :

دی‌اکسیدکربن =۱/۳۶۶×۱۴۰۲−۱۷۴۴ = ۳۹۸/۴۱۸

که کمی کم‌تر از ۴۰۰ سال است. در سال ۱۴۰۴

دی‌اکسیدکربن =۱/۳۶۶×۱۴۰۴−۱۷۴۴ = ۴۰۱/۱۵

که کمی بیش از ۴۰۰ است. سال ۱۴۰۳ را حساب کردم و عدد ۳۹۹/۷۸۴ را به‌دست آوردم. فکر می‌کنم روش من از هر دوی روش‌های شما جواب بهتری به‌دست آورده.

کیومرث : اوّل صبر کن ببینم فرمول تو چه‌قدر به اعداد واقعی نزدیک است.

مثلاً در سال ۱۳۵۱ تمرکز دی‌اکسیدکربن را حساب می‌کنم :

دی‌اکسید کربن =۱/۳۶۶×۱۳۵۱−۱۷۴۴ = ۳۲۶/۰۲

در حالی که جدول مقدار ۳۲۵۰۳ را نشان می‌دهد. ماکزیمم این اختلاف را می‌شود توسط داده‌های جدول حساب کرد.

کامران : چون کاوه توانسته یک معادله برای تمرکز دی‌اکسیدکربن پیدا کند، می‌تواند با حل این معادله بداند دقیقاً در چه سالی تمرکز دی‌اکسید کربن به ۴۰۰ می‌رسد.

تمرکز دی‌اکسیدکربن =۱/۳۶۶× سال −۱۷۴۴

۱/۳۶۶× سال −۱۷۴۴ =۴۰۰

سال ×۱/۳۶۶ = ۴۰۰+۱۷۴۴

سال ×۱/۳۶۶ = ۲۱۴۴

سال = $\frac{۲۱۴۴}{۱/۳۶۶}$

سال = ۱۴۰۲/۱۶

روش کاوه این خوبی را دارد که نه تنها مقدار دی‌اکسیدکربن در هر سال را می‌توان توسط آن محاسبه کرد، بلکه به سادگی می‌توان فهمید درچه سالی تمرکز دی‌اکسیدکربن به مقدار مشخصی خواهد رسید.

خود را بیازماییم

در اطراف خود بگردیم و مثال‌هایی از پدیده‌هایی که رشد تقریباً خطی دارند را شناسایی کنید. پاسخ خود را با همکلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

خود را بیازماییم

در اطراف خود مثال‌هایی از پدیده‌هایی که رشد غیرخطی دارند را شناسایی نمایید و برای غیرخطی بودن این پدیده‌ها دلیل بیاورید.

فعالیت

مصرف نفت خام در جهان

مصرف نفت خام در جهان، سالانه رو به افزایش است. در جدول زیر مصرف جهانی نفت خام در پنج سال متوالی به نمایش گذاشته شده است.

میلیون بشکه	سال
۶۶/۶	۱۳۷۰
۶۶/۹	۱۳۷۱
۶۶/۹	۱۳۷۲
۶۷/۶	۱۳۷۳
۶۸/۴	۱۳۷۴

از این الگو برای پیش‌بینی مصرف جهانی نفت خام در سال ۱۳۹۰ استفاده کنید.

کیومرث : من همان روش عددی که در بخش قبل در پیش گرفتیم مناسب می‌دانم. چون داده‌های عددی گسسته هستند، یعنی بین مقادیر فاصله افتاده است، ترجیح می‌دهم داده‌ها را به‌عنوان یک دنباله درنظر بگیرم. برای مثال مصرف نفت خام در سال ۱۳۷۰ را با $C_{۱۳۷۰}$ نمایش می‌دهم که برابر ۶۶/۶ میلیون بشکه است و مصرف نفت خام در سال ۱۳۷۱ رابا $C_{۱۳۷۱}$ نمایش می‌دهم و داریم $C_{۱۳۷۱}=۶۶/۹$. اگر بخواهم افزایش مصرف نفت خام را در این سال محاسبه کنم می‌نویسم :

$$C_{۱۳۷۱}-C_{۱۳۷۰}=۶۶/۹-۶۶/۶=۰/۳$$

پس داریم

$$C_{۱۳۷۱}=C_{۱۳۷۰}+۰/۳$$
$$C_{۱۳۷۲}=C_{۱۳۷۱}+۰$$
$$C_{۱۳۷۳}=C_{۱۳۷۲}+۰/۷$$
$$C_{۱۳۷۴}=C_{۱۳۷۳}+۰/۸$$

اگر بخواهم رشد مصرف نفت خام را ثابت بگیرم باید اعداد ۰/۳ و ۰ و ۰/۷ و ۰/۸ را با عدد ثابتی جایگزین کنم و فرض کنم هر سال به همان مقدار به مصرف نفت خام درجهان اضافه می‌شود. بهترین راه این است که افزایش مصرف را از ۱۳۷۰ تا ۱۳۷۴ حساب کنم و به نسبت بین سال‌ها تقسیم کنم تا در نهایت با جایگزینی ۰ و ۰/۳ و ۰/۷ و ۰/۸ با یک عدد تغییری در افزایش مصرف در این ۵سال نداده باشم.

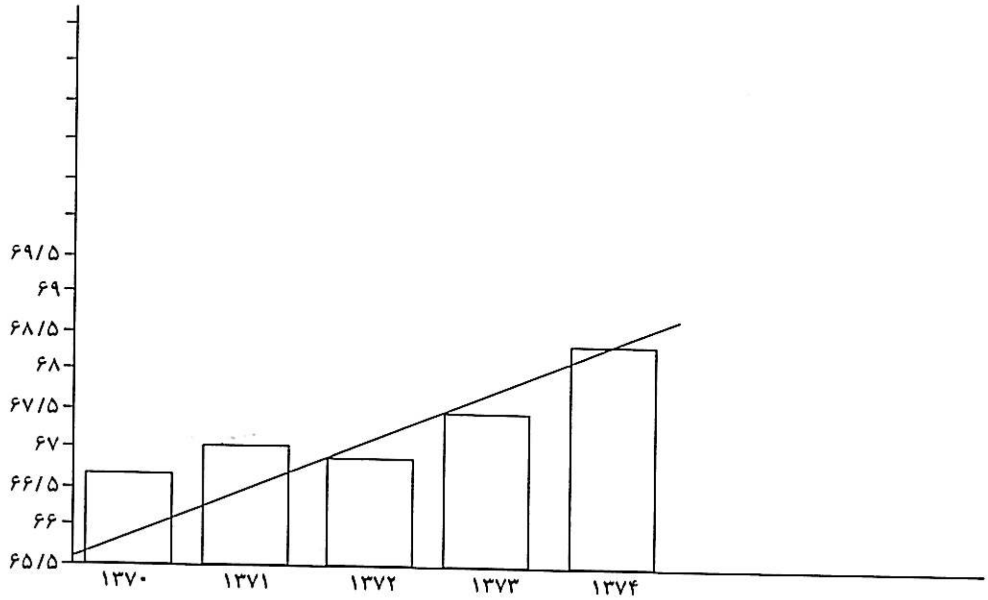
$C_{۱۳۷۴}-C_{۱۳۷۰}=۱/۸$ افزایش ۱/۸ باید در چهار مرحله انجام شود. پس اعداد ۰/۳ و ۰ و ۰/۷ و ۰/۸ را با یک عدد $۰/۴۵=\frac{۱/۸}{۴}$ جایگزین می کنم. دراین صورت خواهم داشت :

$$C_{۱۳۷۰}=۶۶/۶$$
$$C_{۱۳۷۱}=۶۷/۰۵$$
$$C_{۱۳۷۲}=۶۷/۵$$
$$C_{۱۳۷۳}=۶۷/۹۵$$
$$C_{۱۳۷۴}=۶۸/۴$$

این اعداد همان مقادیر $C_{۱۳۷۰}$ و $C_{۱۳۷۴}$ واقعی را می‌دهند، ولی بقیه اعضای دنباله کمی با مقدار واقعی متفاوت هستند. با این حساب برای محاسبهٔ $C_{۱۳۹۰}$ کافیست ۲۰ بار مقدار ۰/۴۵ میلیون بشکه را به $C_{۱۳۷۰}$ اضافه کنیم.

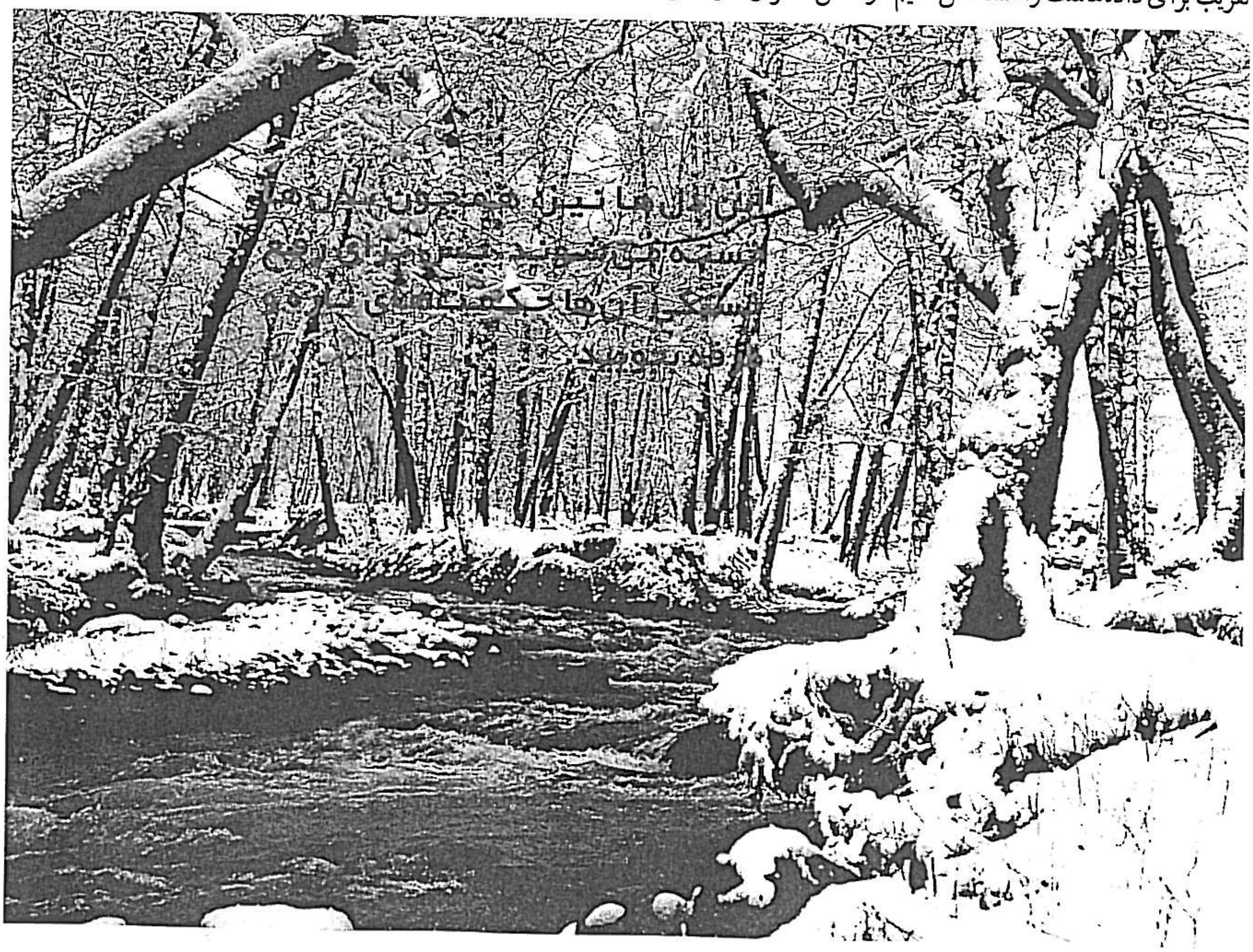
$$C_{۱۳۹۰}-C_{۱۳۷۰}=۲۰\times۰/۴۵=۹$$
$$C_{۱۳۷۰}+۹=۶۶/۶+۹=۷۵/۶$$

کامران : روش کیومرث قابل دفاع نیست. چون اصلاً با مقدارهای $C_{۱۳۷۱}$ و $C_{۱۳۷۲}$ و $C_{۱۳۷۳}$ کاری ندارد. مهم نیست این ۱/۸ میلیون بشکه در این چهار سال چگونه توزیع شده باشد. در هر حال رشدی که کیومرث در نظر می‌گیرد ۰/۴۵ است. فکر می‌کنم روش هندسی از این دقیق‌تر است. اگر داده‌ها را با یک نمودار نمایش دهیم به سادگی می‌توانیم الگویی خطی برای رشد داده‌ها پیشنهاد کنیم که به همهٔ داده‌ها وابسته باشد نه فقط به $C_{۱۳۷۰}$ و $C_{۱۳۷۴}$.



اگر سال‌های ۱۳۷۰ تا ۱۳۹۰ را در نمودار خود بیاورم می‌توان تصمیم گرفت تقریباً چه خطی به همهٔ داده‌ها نزدیک‌تر است و از روی نمودار به‌طور تقریبی مصرف نفت خام در جهان را در سال ۱۳۹۰ محاسبه نمود.

کاوه : هر چند نقد کامران به روش کیومرث را قبول دارم ولی می‌بینم که او هم روشی به دست نداده که این خط که بهترین تقریب برای داده‌هاست را مشخص کنیم. راه‌حل کامران سلیقه‌ای است و از طرفی دقیق هم نیست چون از تصویر کمک می‌گیرد. چون بالاخره جواب معینی برای $C_{۱۳۹۰}$ به‌دست نمی‌دهد. من فکر می‌کنم اگر خطی با معادله‌ای جبری پیدا کنیم که تقریباً داده‌ها را بسازد، می‌توان با آن مصرف روزانه نصف خام در هر سالی را با یک جایگذاری ساده در معادلهٔ خط به‌دست آورد و این مشکل جواب نادقیق کامران را حل می‌کند.



فعالیت

استاد کار و شاگردش

در یک تعمیرگاه اتومبیل، دستمزد استادکار ساعتی ۴۰۰ تومان و شاگرد ساعتی ۲۵۰ تومان است. شاگرد هر روز از ساعت ۶ صبح کار را شروع می‌کند و استادکار ساعت ۸ صبح به سرکار می‌آید. با توجه به ساعات کار استادکار و شاگرد، می‌خواهیم درآمد آن‌ها را در حالت‌های مختلف بررسی کنیم.

۱ـ در هر روز، تا ساعت ۷ صبح، درآمد شاگرد چقدر است؟ درآمد استادکارچقدر؟

۲ـ تا ساعت ۸ صبح، درآمد شاگرد چقدراست؟ درآمد استادکار چقدر؟

۳ـ تا ساعت ۹ صبح، درآمد شاگرد چقدر است؟ درآمد استادکار چقدر؟

۴ـ استادکار و شاگردش تا ساعت ۴ بعدازظهر کار را ادامه می‌دهند و سپس تعطیل می‌کنند. جدول زیر نشان‌دهندهٔ ساعات کار و درآمد استادکار و شاگردش می‌باشد. آن را کامل کنید :

زمان	ساعت کار شاگرد	درآمد شاگرد به تومان	ساعت کار استاد کار	درآمد استادکار به تومان
۶ صبح	۰	۰		
۷ "	۱	۲۵۰		
۸ "				
۹ "				
۱۰ "				
۱۱ "				
۱۲ "				
۱ بعدازظهر				
۲ "				
۳ "				
۴ "				

۵ـ به مقداری که در یک وضعیت تغییر می‌کند **متغیر** می‌گویند. در این‌جا، زمان متغیر است. متغیرهای دیگر را نام ببرید.

۶ـ به مقداری که بدون تغییر باقی می‌ماند **ثابت** می‌گویند. ثابت‌ها را در این فعالیت نام ببرید.

۷ـ الف ـ بعد از این که شاگرد ۴ ساعت کار کرد، استادکار چند ساعت کار کرده است؟

ب ـ بعد از این که شاگرد ۶ ساعت کار کرد، استادکار چند ساعت کار کرده است؟

پ ـ اگر هر دو بعد از ساعت ۴ کار را ادامه دهند و شاگرد ۱۱ ساعت کار کرده باشد، استاد کار چند ساعت کار کرده است؟

۸ـ الف ـ چگونه می‌توان درآمد شاگرد را از روی ساعات کار انجام شده توسط او تعیین کرد؟

ب ـ اگر تعداد ساعات کار شاگرد را بدانیم چگونه می‌توانیم ساعات کار استادکار را تعیین کنیم؟

پ ــ قانون تعیین درآمد استادکار از روی ساعات کار انجام شده توسط او چیست؟

ت ــ قانون تعیین درآمد استادکار از روی ساعات کار انجام شده توسط شاگرد چیست؟

۹ــ الف ــ بعد از این که شاگرد ۴ ساعت کار کرد، درآمد کدام‌یک بیش‌تر است؟ چقدر؟

ب ــ بعد از این که شاگرد ۸ ساعت کار کرد، درآمد کدام‌یک بیش‌تر است؟ چقدر؟

۱۰ــ زمانی که درآمد شاگرد و استادکار برابر می‌شود را پیش‌بینی کنید.

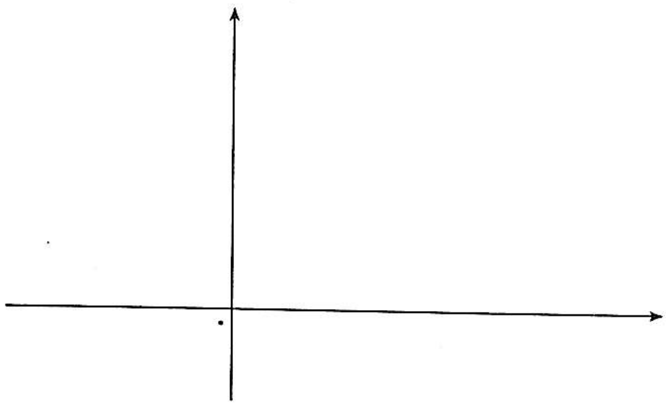
۱۱ــ الف ــ به کمک جدول، زوج اعداد (درآمد، ساعت) مربوط به شاگرد را روی دستگاه مختصات زیر نمایش دهید و با خطوط راست به هم وصل کنید. آیا همهٔ نقاط روی یک خط راست قرار می‌گیرند؟

ب ــ سؤال بند الف را برای استادکار تکرار کنید (روی همان دستگاه مختصات).

پ ــ وقتی زوج اعداد را روی دستگاه مختصات نشان می‌دهید اگر در یک مورد ترتیب (درآمد، ساعت) عوض شود چه اشکالی ایجاد می‌شود؟

ملاحظه می‌کنید که ترتیب این زوج اعداد مهم است. به همین دلیل آن‌ها را زوج مرتب می‌نامیم.

ت ــ سؤال ۱۰ را یک‌بار دیگر از روی نمودار پاسخ دهید.



۴ــ۲ــ مدلسازی خطی

فعالیت

مسابقه دو

احسان و خواهر بزرگ‌ترش مریم، در یک مسابقه دو ۱۰۰ متر که توسط پدر و مادرشان ترتیب یافته است رقابت می‌کنند. به‌طور متوسط، احسان درهر ثانیه ۳ متر و مریم ۵ متر می‌دود. هم چنین، به دلیل کوچک‌تر بودن و سرعت کم‌تر، احسان از ۴۰ متر جلوتر مسابقه را به‌طور هم‌زمان با مریم شروع خواهد کرد. اگر بخواهیم قبل از پایان مسابقه، برنده را تعیین کنیم چه کار بکنیم و از کجا شروع کنیم.

معمولاً نقطهٔ شروع بررسی یک مسئله آشکار نیست و دستورالعمل ثابتی ندارد ولی پیشنهاد می‌شود ابتدا در فهمیدن دقیق مسئله و درک شهودی آن تلاش کنیم. جمع‌آوری اطلاعات می‌تواند به ما کمک کند.

در فعالیت‌های قبل، جدولی تنظیم کردیم و اطلاعات را در آن ثبت کردیم. این جا هم همان روش را پیش می‌گیریم.

۱ــ جدول زیر را کامل کنید (می‌توانید از شکل یا آزمایش استفاده کنید).

زمان (ثانیه)	فاصله به متر از مبدأ مسابقه	
	مریم	احسان
شروع	۰	۴۰
۱	۵	۴۳
۲	۱۰	...
۳	...	...
...	...	...
۲۰	...	...

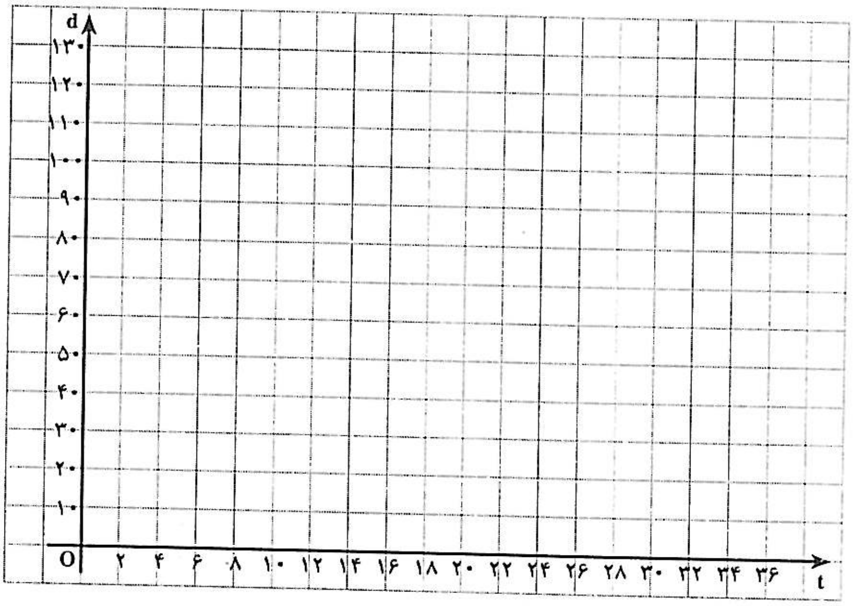
۲ــ ثابتها و متغیرها را نام ببرید.

۳ــ متغیرها را با نمادها نام‌گذاری کنید.

۴ــ آیا متغیرها به هم وابسته‌اند؟ تعیین کنید کدام‌یک از متغیرها با متغیرهای دیگر وابسته است.

۵ــ معادله‌ای بنویسید که فاصلهٔ احسان را از مبدأ مسابقه نسبت به زمان دویدن نشان دهد. به‌طور مشابه معادله‌ای بنویسید که فاصلهٔ مریم از نقطهٔ شروع را نشان دهد.

۶ــ اطلاعات جدول صفحهٔ قبل را روی دستگاه مختصات نمایش دهید و خط گذرا از نقاط متناظر با معادلات سؤال ۵ را رسم کنید. اکنون با توجه به نمودار و اطلاعات به‌دست آمده، به سؤالات کوتاه زیر پاسخ دهید.



۷ــ بعد از ۶ ثانیه چه کسی به نقطهٔ پایان نزدیک تر است؟ چند متر؟

ــ نقطهٔ (۴۰ و ۰) چه اطلاعی را نمایش می‌دهد؟ نقطهٔ (۴۰ و ۰) نمایش چیست؟

ــ نقطهٔ (۰ و ۰) برای مریم مشخص کنندهٔ چیست؟

ــ برای هر یک چقدر طول می‌کشد تا به فاصلهٔ ۱۲۰ متری از مبدأ مسابقه برسند؟

یکی از عاملهای مهم در بررسی مسئلهٔ مسابقهٔ دو، نرخ تغییر فاصله (سرعت دویدن) هریک است. به‌طورکلی در مدل‌سازی ریاضی پدیده‌ها و مسائل دنیای واقعی، «نرخ تغییر» نقش ویژه‌ای را بازی می‌کند که قبل از «نرخ تغییر» در معادلات خطی با عنوان «شیب» خط نام برده می‌شد.

دو نقطهٔ دل‌خواه روی خطی که معادلهٔ مربوط به تغییرات دویدن مریم را نمایش می‌دهد انتخاب کنید سپس فاصلهٔ عمودی و افقی بین دو نقطه را تعیین کنید. نسبت فاصلهٔ عمودی به فاصلهٔ افقی دو نقطه شیب را تعیین می‌کند. نمودار زیر که مربوط به مریم است را در نظر بگیرید. برای مثال نرخ تغییر بین نقاط زیر را محاسبه می‌کنیم :

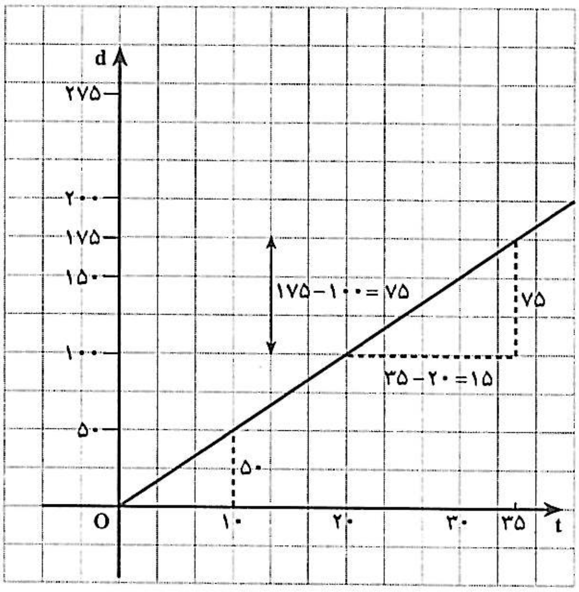
نقاط : (۰ و ۰) و (۵۰ و ۱۰)

$$\text{شیب} = \text{نرخ تغییر} = \frac{\text{فاصلهٔ افقی}}{\text{فاصلهٔ عمودی}} = \frac{۵۰-۰}{۱۰-۰} = \frac{۵}{۱}$$

نقاط : (۱۰۰ و ۲۰) و (۱۷۵ و ۳۵)

$$\text{شیب} = \text{نرخ تغییر} = \frac{\text{فاصلهٔ افقی}}{\text{فاصلهٔ عمودی}} = \frac{۱۷۵-۱۰۰}{۳۵-۲۰} = \frac{۷۵}{۱۵} = \frac{۵}{۱}$$

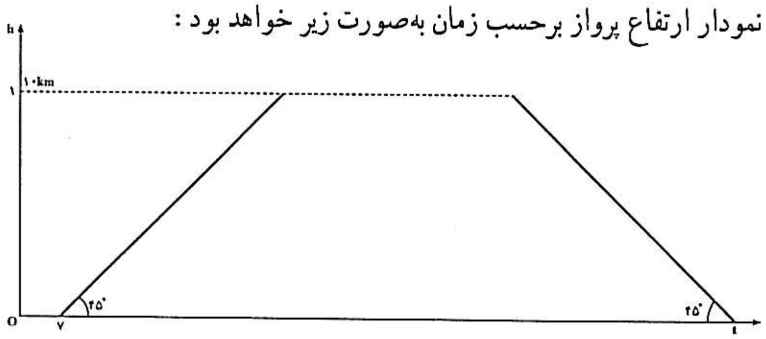
مشاهده می‌کنید نرخ تغییر ثابت است پس شیب خط مربوط به مریم $\frac{۵}{۱}$ است. شیب $\frac{۵}{۱}$ در مسابقه چه چیزی را تفسیر می‌کند؟ شیب خط مربوط به احسان چقدر است؟ از مقایسه شیبها در مسابقه چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



فعالیت

پرواز هواپیما

ساعت ۷ صبح هواپیمای مسافربری از باند فرودگاه مهرآباد تهران به مقصد بوشهر پرواز می‌کند. هواپیما تحت زاویهٔ ۴۵ درجه نسبت به افق تا ارتفاع ۳۰ هزار پا و با سرعت متوسط ۶۰۰ کیلومتر در ساعت در جهت مسیر اوج می‌گیرد و پس از آن در مسیر افقی با سرعت متوسط ۸۰۰ کیلومتر در ساعت به پرواز خود ادامه می‌دهد. سپس تحت زاویه ۴۵ درجه (مشابه اوج گرفتن) در فرودگاه بوشهر فرود می‌آید. با دانستن این که فاصلهٔ تهران تا بوشهر ۹۰۰ کیلومتر است نمودار ارتفاع پرواز برحسب زمان به‌صورت زیر خواهد بود :



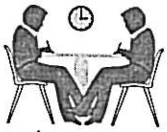
۱ــ نرخ تغییرات ارتفاع را در وضعیتهای مختلف محاسبه کنید.

۲ــ در وضعیت آخر ــ لحظهٔ فرود ــ نرخ تغییر چه معنایی دارد؟

۳ــ مدت پرواز را محاسبه کنید.

۴ــ معادله یا معادلاتی بنویسید که ارتفاع را برحسب زمان مشخص کند.

راهنمایی: برای پاسخ به سؤال ۳ اطلاعاتی از هندسه لازم است که قبلاً آموخته‌اید. در مورد سؤال ۴ در فعالیتهای قبلی معادله‌ها را از روی جدول داده‌ها به‌دست می‌آوردیم. اما همواره جدول اطلاعات در اختیار نمی‌باشند و گاهی مانند این مسئله نمودارها را داریم.



فعالیت

پیش‌بینی جمعیت ایران

جمعیت ایران از سال ۱۲۶۸ تا کنون همواره رو به افزایش بوده است. آمارگیریهای مختلف (جمع‌آوری اطلاعات) و سپس محاسبات ریاضی و به‌دنبال آن نمایش اطلاعات و نتایج به‌دست آمده توسط نمودار زیر انجام گرفته است.

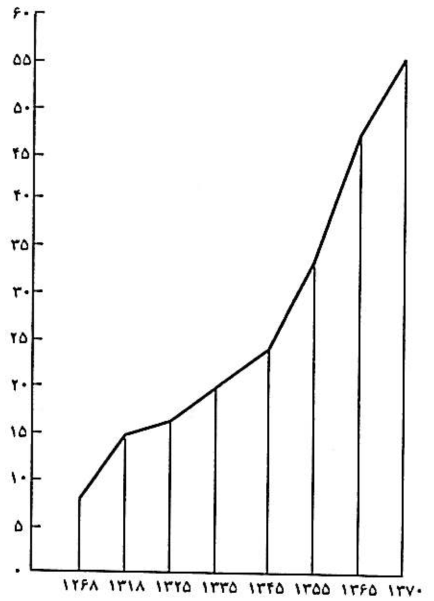
۱ــ متغیرها و ثابتها را مشخص کنید و متغیرها را به‌وسیله نمادها نام‌گذاری کنید.

۲ــ وابستگی متغیرها به یک‌دیگر چگونه است؟کدام متغیر از دیگری تبعیت می‌کند؟

۳ــ در پنجاه سال اول (با شروع از سال ۱۲۶۸) جمعیت ایران چه‌قدر افزایش یافته است؟

۴ــ بیش‌ترین رشد جمعیت چند درصد است؟ و به کدام مقطع زمانی مربوط است؟

۵ــ کم‌ترین مقدار رشد جمعیت مربوط به چه مقطع زمانی است و چند درصد است؟



۶ــ اگر نرخ رشد جمعیت در ده سال آینده مانند ۲۰ سال گذشته باشد، جمعیت کشور در سال ۱۳۸۴ چه‌قدر است؟

۷ــ جمعیت کشور را در سال ۲۰۱۰ میلادی چه‌قدر پیش‌بینی می‌کنید؟ براساس چه فرضهایی؟

ملاحظه می‌کنید که مسئله کاملاً واقعی و در سرنوشت کشور دخیل است و تحلیل و بررسی آن برای برنامه‌ریزان از اهمیت حیاتی برخوردار است.

فعالیت

مسابقه ۱۵۰۰ متر

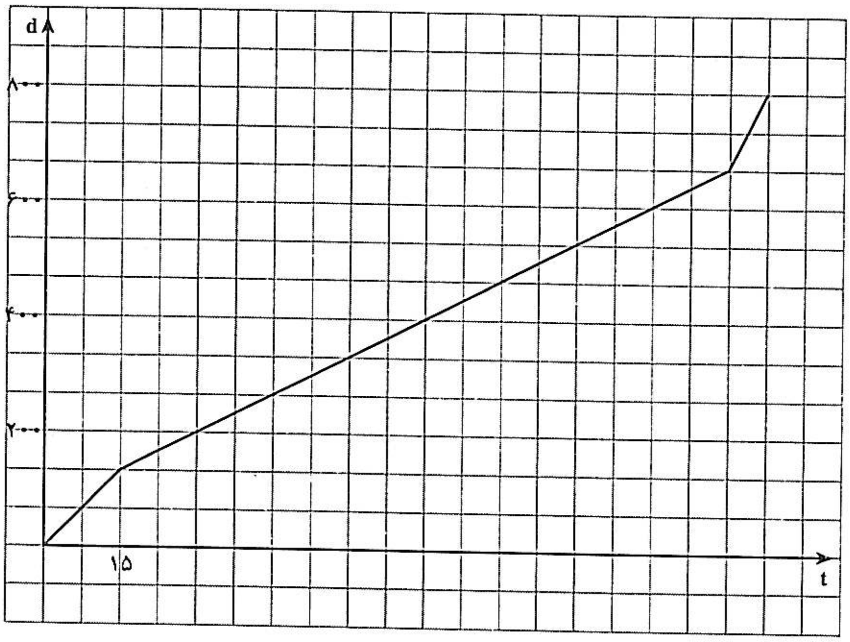
محمود در مسابقات دو میدانی در مسابقه دو ۱۵۰۰ متر به مقام اول می‌رسد. نمودار زیر چگونگی پیمودن مسافت مسابقه را برحسب زمان نشان می‌دهد.

۱ــ ثابتها و متغیرها را مشخص کنید.

۲ــ متغیرها را به‌وسیله نمادها نام‌گذاری کنید.

۳ــ چرا نمودار یک خط راست نیست؟ توضیح دهید.

۴ــ محمود در ۱۵ ثانیه اول چه‌قدر سریع‌تر از ۱۵ ثانیه دوم می‌دود؟



۵ ــ محمود انتهای مسابقه را با چه سرعتی می‌دود؟ چه‌قدر سریع‌تر از نیمه‌های مسابقه می‌دود؟

۶ ــ چه‌قدر طول می‌کشد تا محمود ۶۰۰ متر از مسابقه را طی کند.

برای این نمودار، قانونی (معادله‌ای) که تغییرات مسافت را برحسب زمان نشان دهد، به‌دست آورید. آیا قانون تمام قسمتهای مسابقه یکی است؟ ملاحظه می‌کنید که هر چه زمان بیش‌تر می‌شود دونده مسافت بیش‌تری را می‌پیماید. به سخن دیگر مسافت پیموده شده وابسته به زمان است و قانون مسافت از زمان تبعیت می‌کند.

ملاحظه کردید که نمودارهای مورد بررسی خطوط راست و یا چند پاره‌خط بودند، سؤالی که پیش می‌آید این است که آیا از نمودارهایی که منحنی می‌باشند می‌توانیم اطلاعات به‌دست آوریم؟ و یا اگر قسمتی از نمودار خط راست و قسمتی منحنی باشد، باز هم می‌توانیم از آنها اطلاعاتی به‌دست آوریم؟

خود را بیازماییم

با استفاده از نرخ تغییر :

تعیین کنید که هر نمودار مربوط به کدام معادله است.

a) $y = x - ۴$

b) $-۲x + ۳ = y$

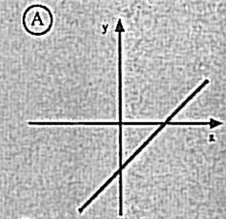
c) $۴ = y$

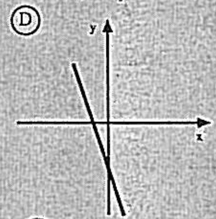
d) $y = -۳x - ۴$

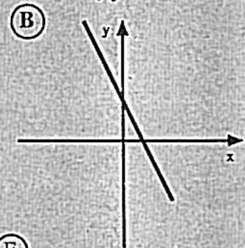
e) $y = x + ۵$

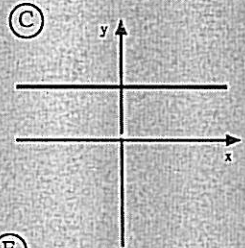
f) $y = \frac{۱}{۲}x$

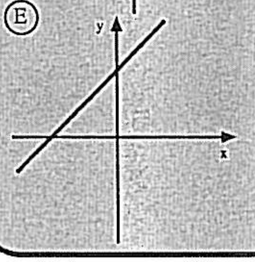
g) $x=k$

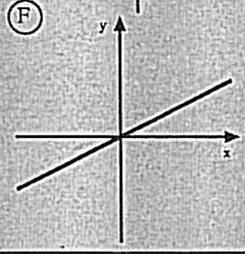






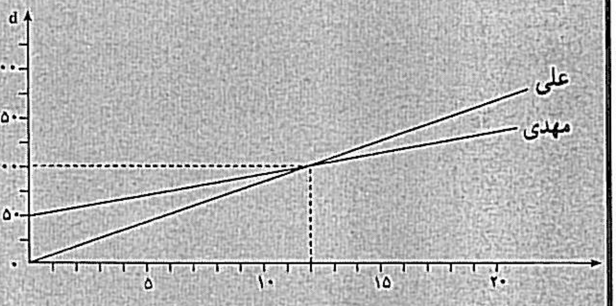






خود را بیازماییم

نمودار زیر مربوط به مسابقه دو ۱۵۰ متر بین علی و مهدی می‌باشد.



الف ــ چه کسی مسابقه را می‌برد؟

ب ــ هنگام شروع مسابقه مهدی چه‌قدر جلوتر از علی می‌باشد؟

پ ــ پس از چند ثانیه علی به مهدی می‌رسد؟

ت ــ بعد از ۱۸ ثانیه علی چه‌قدر از مهدی جلوتر است؟

ث ــ معادله مسافت ــ زمان مربوط به هر یک را به دست آورید؟

ج ــ سرعت هر کدام را به‌دست بیاورید.

فعالیت

معادلهٔ خطی با شیب m که از نقطه $(x_۱, y_۱)$ می‌گذرد، پیدا کنید.

سهراب : معادلهٔ خطی با شیب m به شکل $y = mx + n$ است.

از آن‌جا که خط از $(x_۱, y_۱)$ می‌گذرد داریم :

$$y = mx_۱ + n$$

از این‌جا می‌توان n را محاسبه کرد :

$$n = y_۱ - mx_۱$$

و در معادله خط جایگذاری کرد.

$$y = mx + y_۱ - mx_۱$$

با ساده کردن داریم. $y - y_۱ = m(x - x_۱)$

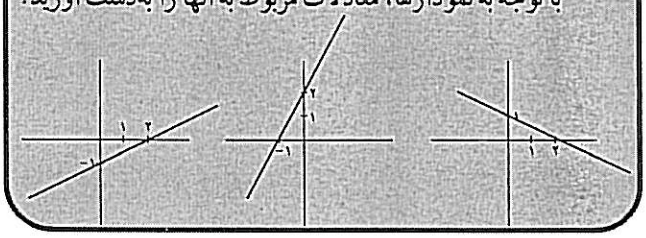
خود را بیازماییم

در هر یک از حالتهای زیر معادله خطی را پیدا کنید که از (۴ و۳) بگذرد و دارای خاصیت زیر باشد.

۱ــ شیب خط برابر ۲   ۲ــ موازی محور xها باشد.

خود را بیازماییم

با توجه به نمودارها، معادلات مربوط به آنها را به‌دست آورید.



فعالیت

معادله خطی را بیابید که از دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) بگذرد.

نسترن به همه چیز شک می‌کرد و هر ادعایی را با دقت و کنجکاوی بررسی می‌کرد. اصلاً دوست نداشت چیزی را که درست نیست باور داشته باشد. برای همین حل مسئله را این‌طور شروع کرد.

نسترن: اوّل باید بدانیم که آیا همیشه مسئله جواب دارد؟ از هر دو نقطه یک خط می‌گذرد. مگر آن که آن دو نقطه منطبق باشند که در این‌صورت بینهایت خط از آنها می‌گذرد. پس مسئله همیشه جواب یگانه‌ای دارد مگر این‌که دو نقطه منطبق باشند. خیالم راحت شد که ما را دنبال نخود سیاه نفرستاده‌اند. برای این‌که معادله خط را بدانم کافی است این اطلاعات داده شده در مسئله را به زبان جبری ترجمه کنم. این خط از نقطه (x_1, y_1) می‌گذرد. پس $y_1 = mx_1 + n$

همین‌طور از نقطه (x_2, y_2) می‌گذرد. پس

$$y_2 = mx_2 + n$$

می‌توان n را از یکی از این معادلات حساب کرد و در دیگری جایگذاری نمود.

$y_1 - mx_1 = n$ پس داریم

$$y_2 = mx_2 + y_1 - mx_1$$

و از این جا m حساب می‌شود

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

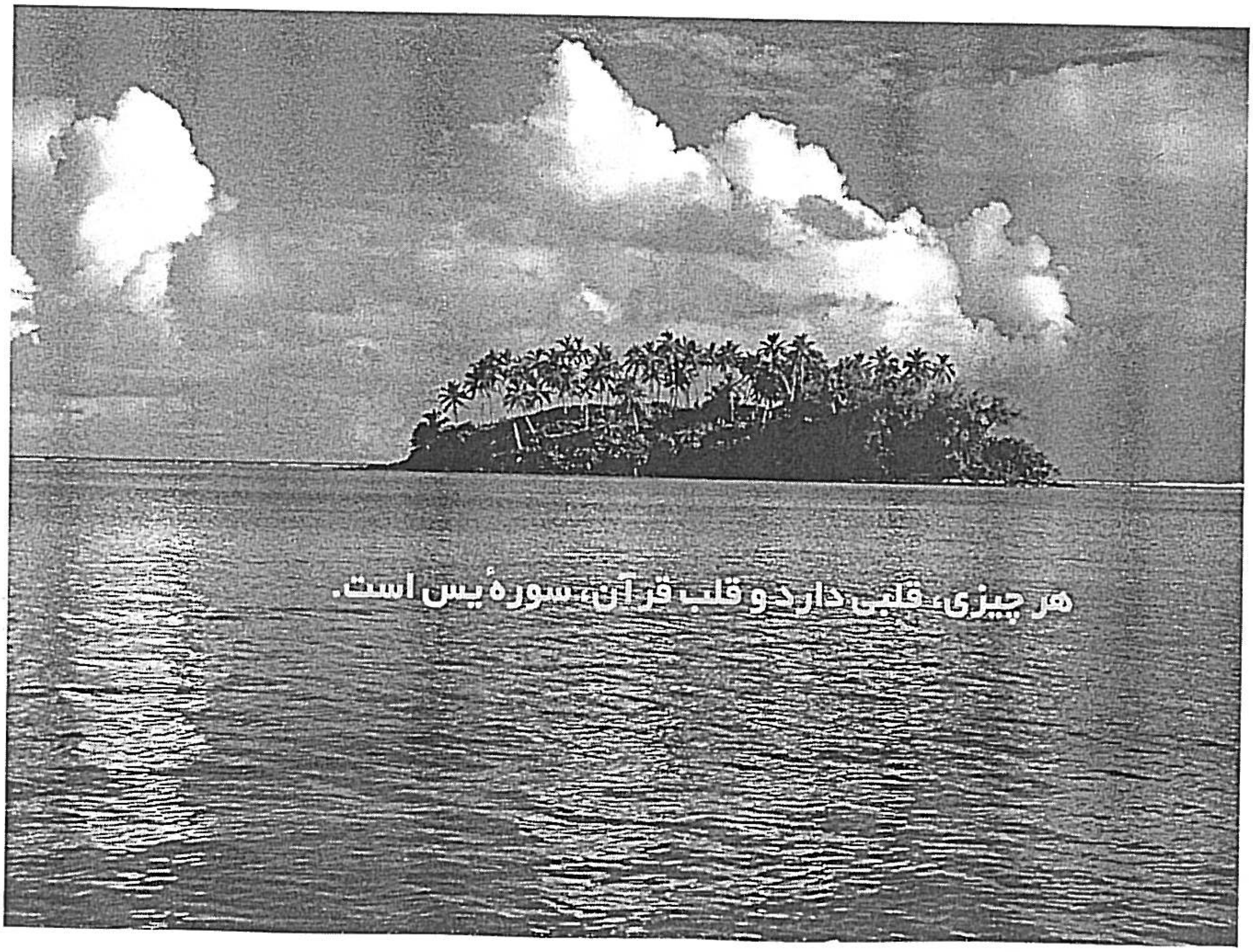
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

برای محاسبه n دوباره m را از یکی از معادلات حساب می‌کنیم و در دیگری جایگزین می‌نماییم. $y_1 - n = mx_1$ پس داریم $\frac{y_1 - n}{x_1} = m$

$$y_2 = \frac{y_1 - n}{x_1} x_2 + n$$

$$y_2 x_1 = (y_1 - n)x_2 + nx_1$$

$$y_2 x_1 = y_1 x_2 - nx_2 + nx_1$$



$$y_2x_1 - y_1x_2 = n(x_2 - x_1)$$

$$n = \frac{y_2x_1 - y_1x_2}{x_2 - x_1}$$

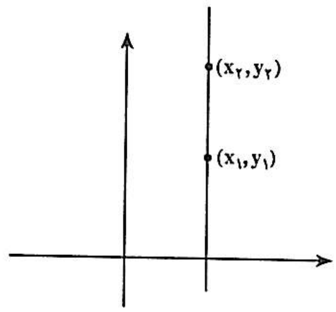
پس معادله این طور می‌شود:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{y_2x_1 - y_1x_2}{x_2 - x_1}$$

اما اگر $x_1 = x_2$ معادله بالا اشکال دارد. اشکال از وقتی پیدا می‌شود که شیب m را محاسبه می‌کنیم و مخرج $x_2 - x_1$ است. در این حالت معادله خط به شکل $x - x_1$ می‌شود. که همان $x - x_2$ است.

(x_2, y_2)

(x_1, y_1)



دوست داشتم این حالت هم در معادله بالا صدق می‌کرد. گفتم شاید اگر معادله بالا را به این شکل می‌نوشتم درست می‌شد

$$(x_2 - x_1)y = (y_2 - y_1)x + y_2x_1 - y_1x_2$$

اگر $x_1 = x_2$ معادله تبدیل می‌شود به ۰

$$y(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)x - (y_2 - y_1)x_1$$

$$0 = (y_2 - y_1)(x - x_1)$$

این در حالتی که دو نقطه متمایز باشند یعنی $y_1 \neq y_2$ همان معادله $x = x_1$ است. دلم گرم شد که همیشه $(x_2 - x_1)y = (y_2 - y_1)x + y_2x_1 - y_1x_2$ درست است. فقط در حالت انطباق دو نقطه که $x_1 = x_2$ و $y_1 = y_2$ این معادله چیزی به ما نمی‌گوید. کاش می‌شد معادله‌ای گفت که در این حالت هم نشان دهد که بینهایت خط از دو نقطه منطبق برهم می‌گذرد.

نیلوفر همیشه به‌دنبال کوتاه‌ترین راه می‌گشت. نمی‌خواست وقتی که می‌شود با زحمت کمی کاری را انجام داد خودش را دردسر بدهد. او مسئله را این‌طور حل کرد.

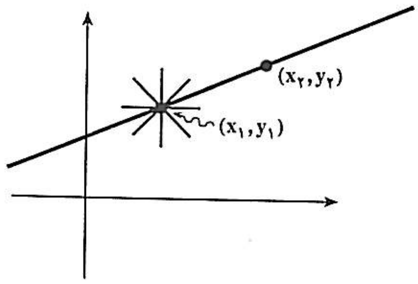
نیلوفر: من حالت خاص $x_1 = x_2$ را که نسترن به آن توجه کرد در نظر نگرفتم اما راه کوتاه‌تری پیدا کردم. می‌دانستم خطی با شیب m که از (x_1, y_1) بگذرد با معادله $y - y_1 = m(x - x_1)$ مشخص می‌شود. پس کافی بود m را پیدا کنم و در این جایگذاری کنم. چون این خط از (x_2, y_2) می‌گذرد داریم

$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$ پس $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

پس معادله خط می‌شود $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

این همان معادله‌ای است که نسترن پیدا کرده ولی صورت آن ساده‌تر است. چند راه دیگر هم به نظرم رسید که فکر نمی‌کنم به سادگی این یکی باشند.

مثلاً می‌توان معادله خط کلی گذرنده از (x_1, y_1) را در نظر گرفت و بررسی کرد که کدام‌یک از اینها از نقطه (x_2, y_2) می‌گذرد یا بر عکس معادله خط کلی گذرنده از (x_2, y_2) را در نظر گرفت و بررسی کرد که کدام‌یک از اینها از (x_1, y_1) می‌گذرد. یا این که معادله‌ای را پیدا کرد که هم حالت خاص معادله کلی خطوط گذرنده از (x_1, y_1) باشد و هم حالت خاص معادله کلی خطوط گذرنده از (x_2, y_2). این همان راه نسترن است که به نظرم سخت‌تر از همه راههاست. راه دیگری به نظرم نرسید.



خود را بیازماییم

معادله خطوطی را پیدا کنید که از زوج نقاط زیر بگذرد:

۱) (۲,۳),(۱۰,۵)   ۲) (۵,−۱),(−۱,۸)

۳) (−۲,۰),(−۲,۵)   ۴) (۲,۵),(−۷,۵)

خود را بیازماییم

نشان دهید معادله خط راست گذرنده از نقاط $(a, 0)$ و $(0, b)$ به شکل $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ است. در این جا فرض کنید $ab \neq 0$

خود را بیازماییم

نقطه اشتراک دو خط به معادلات $x+y-۴=۰$ و $۲x-y+۱=۰$ را به‌دست آورید. معادله خطی که از این نقطه و نقطهٔ $(-۲/۱)$ می‌گذرد پیدا کنید.

خود را بیازماییم

کدام‌یک از خطوط زیر موازیند؟

۱) $۶x+۳y=۱$　　۲) $y=۳x-۲$

۳) $۲x-y=۵$　　۴) $y=-۲x+۵$

۵) $۲x=y-۲$

فعالیت

چگونه می‌توان دو خط عمود برهم را از روی معادلهٔ آنها شناخت؟

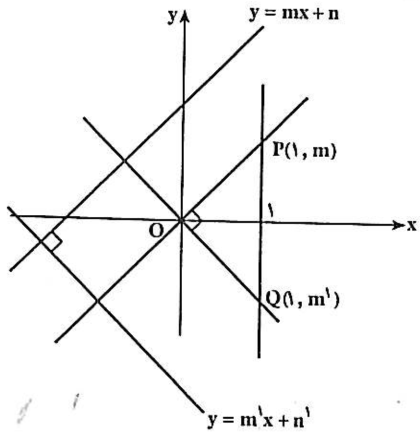
پروین : دو خط $y=mx+n$ و $y=m'x+n'$ را که بر هم عمودند درنظر بگیرند.

خطوط $y=mx$ و $y=m'x$ به‌ترتیب موازی خطوط بالا هستند. پس این دو هم برهم عمودند. نقطه $P(۱,m)$ روی خط $y=mx$ و نقطه $Q(۱,m')$ روی خط $y=m'x$ را در نظر بگیرند. بنابر قضیه فیثاغورث $PQ^۲=OP^۲+OQ^۲$ با توجه به مختصات P و Q داریم $(m-m')^۲=(۱+m^۲)+(۱+m'^۲)$ و با ساده کردن به‌دست می‌آوریم :

$$m^۲-۲mm'+m'^۲=۲+m^۲+m'^۲$$

بنابراین

$$mm'=-۱$$



فعالیت

ثابت کنید $mm'=-۱$ نتیجه می‌دهد خطوط $y=mx+n$ و $y=m'x+n'$ بر هم عمودند.

خود را بیازماییم

معادلهٔ خطوط راست گذرنده از $(-۱,۴)$ که موازی و عمود بر $y=\frac{۲}{۳}x-۲$ هستند را به‌دست آورید.

خود را بیازماییم

معادله خطی گذرنده از $(-۱,۲)$ و موازی $۳x+۲y=۵$ را به‌دست آورید.

خود را بیازماییم

معادله خطی که از نقطه $(۱,۱)$ می‌گذرد و عمود بر خط گذرنده از $(۳,۴)$ و $(-۲,۷)$ است را به‌دست آورید.

خود را بیازماییم

اگر خطوط $ax+by+c=۰$ و $a'x+b'y+c'=۰$ داده شده باشد ثابت کنید :

۱ــ این خطوط موازیند اگر $ab'-a'b=۰$

۲ــ این خطوط عمودند اگر $aa'+bb'=۰$

خود را بیازماییم

نقطه P متقارن مبدأ O نسبت به خط $x-۳y+۶=۰$ است. نقطه P را با کمک هر یک از اطلاعات زیر پیدا کنید.

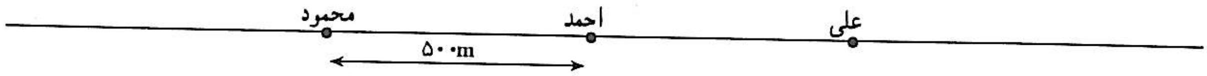
۱ــ خط OP عمود بر $x-۳y+۶=۰$ است.

۲ــ وسط پاره‌خط OP بر خط $x-۳y+۶$ واقع است.

۴ـ۳ـ مدلسازی مسائل با معادلات

فعالیت

احمد و محمود و علی دارای تعدادی دستگاه گیرنده و فرستنده هستند به‌طوری که برد دستگاه‌های فرستنده متفاوت است. آن‌ها برای امتحان کردن دستگاه‌های خود به فاصله‌های مناسب مطابق شکل زیر در یک جاده می‌ایستند



فرض کنید حداکثر برد دستگاه فرستنده احمد ۱۰۰۰ متر و حداکثر برد دستگاه فرستنده محمود ۸۰۰ متر و یک دستگاه گیرنده در اختیار علی باشد :

الف ــ علی در چه فاصله‌ای از احمد باشد تا بتواند پیام او را دریافت کند؟

ب ــ علی در چه فاصله‌ای از احمد باشد تا بتواند پیام محمود را دریافت کند؟

پ ــ علی در چه فاصله‌ای از احمد باشد تا بتواند پیام هر دو را دریافت کند؟

ت ــ علی در چه مکانهایی پیام هیچ‌کدام را دریافت نمی‌کند؟

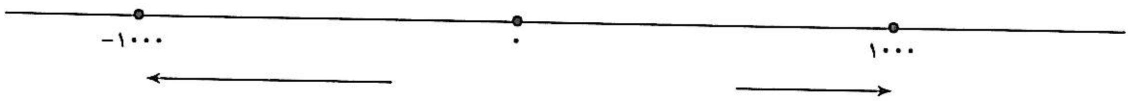
ث ــ علی در چه مکانهایی می‌تواند پیام احمد را دریافت کند بدون این که بتواند پیام محمود را دریافت کند؟

ج ــ علی در چه مکانهایی می‌تواند پیام محمود را دریافت کند بدون این که بتواند پیام احمد را دریابد؟

عادل : با توجه به این که مکانها با مکان احمد مقایسه شده‌اند مکان احمد را به عنوان مبدأ اختیار کرده و عدد صفر را به آن نسبت می‌دهیم بنابراین محمود در مکان ۵۰۰ - قرار گرفته است. از طرف دیگر گرفتن پیام از یک فرستنده به این که گیرنده در طرف چپ یا راست فرستنده باشد بستگی ندارد بلکه فقط به «ارزش خالص» یا مقدار مطلق تفاوت مکان گیرنده و فرستنده وابسته است.

پارسا : بنابراین برای حل مسئله الف با توجه به مطلبی که عنوان کردید اگر علی در مکان x از خط حقیقی باشد برای این‌که بتواند پیام احمد را دریافت کند باید دانسته باشیم :

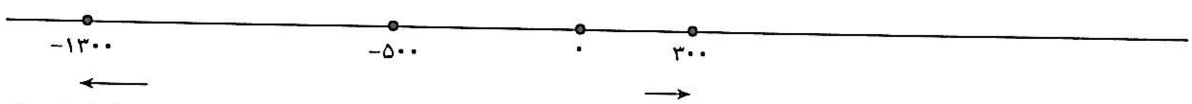
فاصله $(۰,x) \le ۱۰۰۰$



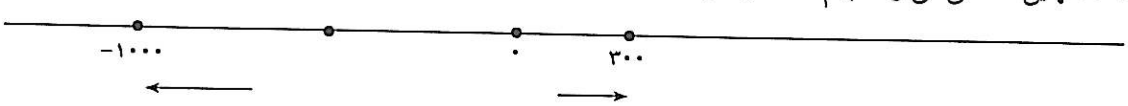
و مشابهاً برای قسمت ب علی در مکانهایی که فاصله آنها از محمود حداکثر ۸۰۰ متر باشد می‌تواند پیام وی را دریافت کند. اگر فاصله علی و احمد x باشد فاصله علی و محمود $x+۵۰۰$ خواهد بود بنابراین باید داشته باشیم

فاصله $(-۵۰۰,x) \le ۸۰۰$

یا $-۸۰۰ \le x+۵۰۰ \le ۸۰۰$ یا $-۱۳۰۰ \le x \le ۳۰۰$



معلم : به گردایه‌ای از اشیاء که در خاصیتی معین صدق می‌کنند مجموعه می‌گویند. مجموعه را با علامت $\{x|$ x در خاصیت معین صدق می‌کند$\}$ نمایش می‌دهند. مثلاً مجموعهٔ مکانهایی که علی می‌تواند پیام احمد را دریافت کند با $A=\{x|-۱۰۰۰\le x\le ۱۰۰۰\}$ و مجموعه مکانهایی که علی می‌تواند پیام محمود را دریافت کند با $B=\{x|-۱۳۰۰\le x\le ۳۰۰\}$ نمایش می‌دهیم.

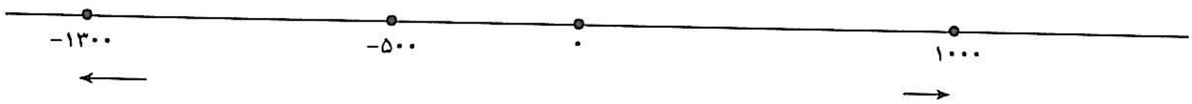


عادل : در مورد قسمت پ اگر علی بخواهد پیام احمد محمود را دریافت کند باید x هم در $1000 \geq$ فاصله $(0,x)$ و هم در $800 \geq$ فاصله $(x,-500)$ صدق کند بنابراین

در قسمت ت اگر پیام احمد دریافت نشود یعنی $1000 <$ فاصله $(0,x)$ و اگر پیام محمود دریافت نشود یعنی $800 <$ فاصله $(x,-500)$

هم $\begin{cases} x > 1000 \\ \text{یا} \\ x < -1000 \end{cases}$ وهم $\begin{cases} x > 300 \\ \text{یا} \\ x < -1300 \end{cases}$ بنابراین

باید در یکی از در مکان $x > 1000$ $x < -1300$ قرار داشته باشد



ای کاش برای نمایش این مجموعه‌ها و ارتباط آنها هم نماد مناسبی داشتیم. چون هر چه جلوتر می‌رویم توضیح کلامی جواب مشکل‌تر می‌شود.

معلم : در نظریه مجموعه‌ها نمادهای مناسبی برای نمایش این ارتباطات وجود دارد. البته شما این‌جا فقط با مجموعه‌های اعداد حقیقی سروکار دارید ولی می‌توانید از نمادهای کلی‌تر برای سادگی استفاده کنید. این نمادها را برایتان توضیح می‌دهم.

اگر A یک مجموعه باشد و a یک عضو آن باشد یعنی در خاصیتی که آن مجموعه را تعیین می‌کند صدق کند، می‌نویسیم $a \in A$. مثلاً اگر A مجموعه مکان‌هایی باشد که علی می‌تواند پیام احمد را دریافت کند $400 \in A$.

اگر A و B دو مجموعه باشند اشتراک A و B را بزرگ‌ترین مجموعه‌ای تعریف می‌کنیم که اعضای آن هم در A و هم در B باشند و می‌نویسیم $A \cap B = \{x | x \in A, x \in B\}$. مثلا اگر B مجموعه مکان‌هایی باشد که علی می‌تواند پیام محمود را دریافت کند، آن‌گاه $A \cap B$ مجموعه مکانهایی است که علی هم پیام محمود و هم پیام احمد را دریافت می‌کند.

$$A \cap B = \{x | -1000 \leq x \leq 1000 , -1300 \leq x \leq 300\}$$
$$= \{x | -1000 \leq x \leq 300\}$$

اگر هر عضو یک مجموعه A عضوی از یک مجموعه بزرگ‌تر B باشد می‌گوییم A زیرمجموعه B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$ مثلاً در فعالیت بالا $A \subseteq \mathbb{R}$ که در آن $\mathbb{R}$ نمادی برای مجموعه اعداد حقیقی است.

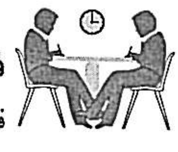
اگر یک مجموعهٔ مرجع داشته باشیم که همهٔ مجموعه‌های مربوط به مسئله، زیرمجموعه آن باشند، مثلاً در فعالیت ما همهٔ مجموعه‌های اعداد حقیقی زیر مجموعه $\mathbb{R}$ هستند، آن‌گاه می‌توانیم متمم یک مجموعهٔ A را تعریف کنیم و آن مجموعهٔ همه اعضایی است که هیچ‌کدام در A نیستند. متمم را با A^C نشان می‌دهیم. مثلاً مجموعه نقاطی که علی پیام احمد را دریافت نمی‌کند A^C است

$$A^C = \{x | x \notin A\} = \{x | \text{فاصله } (0,x) > 1000\}$$

یا مجموعه نقاطی که علی پیام هیچ‌کدام را دریافت نمی‌کند می‌شود .

$A^C \cap B^C = \{x | (0,x)$ فاصله > 1000 و $(x,-500)$ فاصله $> 800\}$

اگر A و B دو مجموعه باشند بزرگ‌ترین مجموعه‌ای که هر عضو آن یا در A است یا در B است اجتماع نامیده می‌شود و با $A \cup B$ نمایش داده می‌شود.



فعالیت

فرض کنید دستگاه‌های محمود و احمد مجهز به گیرنده هم باشد. بنابراین به راحتی می‌توانند با هم صحبت کنند. علی در چه مکان‌هایی باشد تا جریانات امور به طور کامل به او گزارش شود؟

خود را بیازماییم

هرگاه $a,b\in\mathbb{R}$ دو عدد حقیقی یافتند و $a<b$ آنگاه مجموعه :

$\{x|a\le x\le b\}$ را با $[a,b]$ نمایش می‌دهند

$\{x|a<x<b\}$ را با (a,b) نمایش می‌دهند

$\{x|a<x\le b\}$ را با $(a,b]$ نمایش می‌دهند

$\{x|a\le x<b\}$ را با $[a,b)$ نمایش می‌دهند

کدام یک از $[a,b]$ و (a,b) و $[a,b)$ و $(a,b]$ را می‌توان با نماد $a>$ فاصله (y,x) یا $a\le$ فاصله (y,x) نمایش داد؟

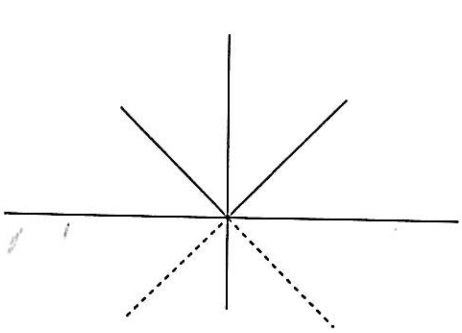
خود را بیازماییم

بازه (a,b) را به کمک نماد فاصله $(۰,x)$ نمایش دهید.

نماد فاصله $(x,۰)$ را با نماد $|x|$ هم نمایش خواهیم داد.

فعالیت

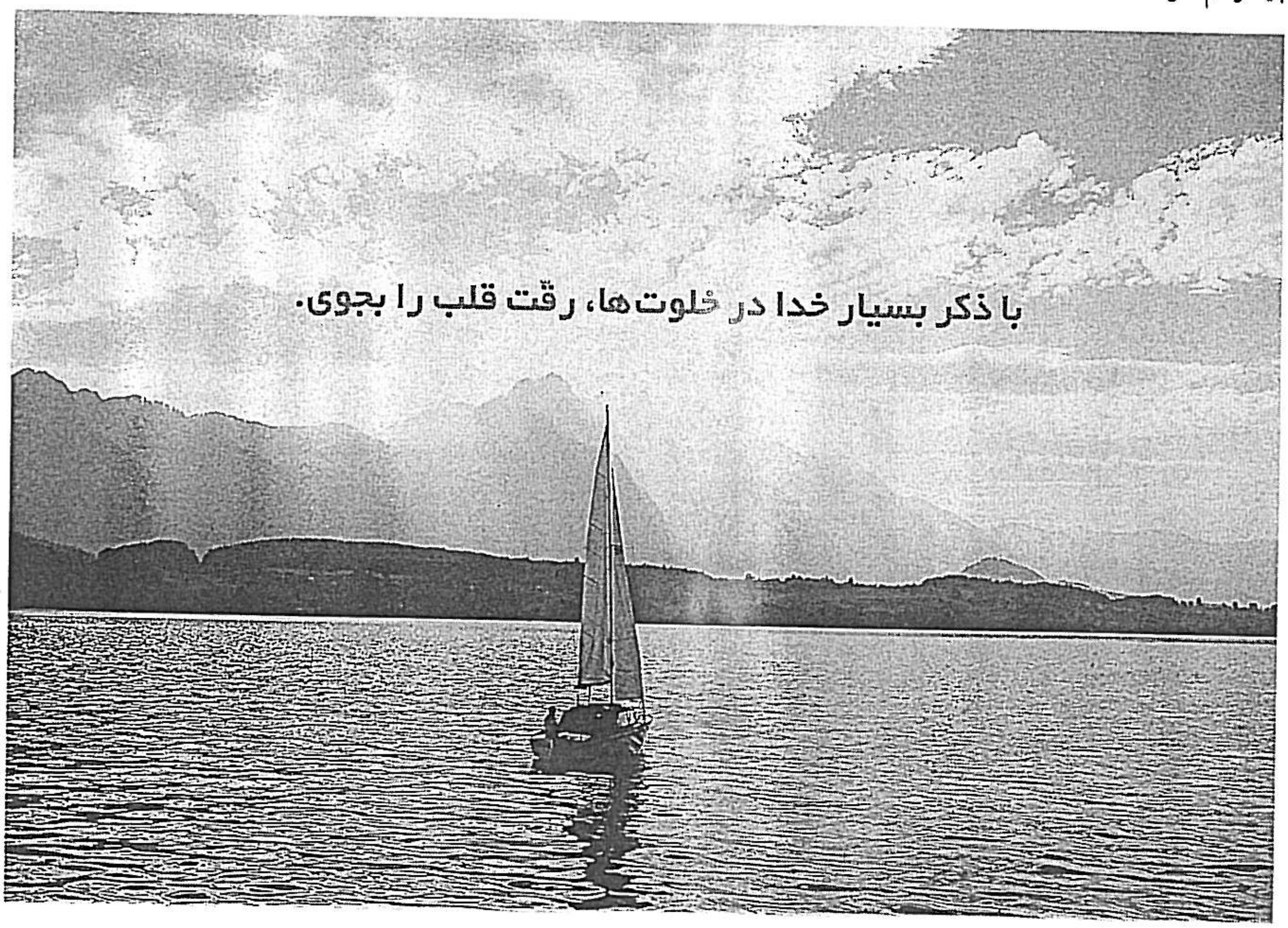
نمودار معادلهٔ $y=|x|$ را رسم کنید.



پارسا : برای $x\ge ۰$ فاصله x و مبدأ همان x است و برای $x<۰$ فاصلهٔ x و مبدأ برابر $-x$ است.

بنابراین به طور صریح نمودار به صورت زیر است

$y=\begin{cases} x & x\ge ۰\\ -x & x<۰\end{cases}$ بنابراین اگر $x\ge ۰$ آنگاه $y=x$ نیمساز ربع اول باید رسم شود و اگر $x<۰$ آنگاه $y=-x$ نیمساز ربع دوم باید رسم شود.



فعالیت

نمودار معادله $y=|۲x+۱|-۱$ را رسم کنید.

پارسا: هرگاه $۲x+۱\geq ۰$ (یا $x\geq -\frac{۱}{۲}$) آنگاه

$|۲x+۱|=۲x+۱$

و هرگاه $۲x+۱<۰$ (یا $x<-\frac{۱}{۲}$) آنگاه

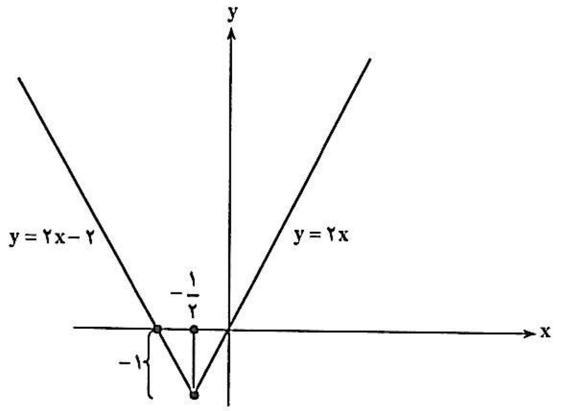
$|۲x+۱|=-۲x-۱$

بنابراین معادله به صورت صریح عبارت است از

$$y=\begin{cases} ۲x & x\geq -\frac{۱}{۲} \\ -۲x-۲ & x<-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

. یعنی هرگاه $x\geq -\frac{۱}{۲}$ معادله $y=۲x$ است و هرگاه $x<-\frac{۱}{۲}$، نمودار به شکل معادله $y=-۲x-۲$ است،

بنابراین کل نمودار به شکل زیر است.



فعالیت

نمودار معادلهٔ $|x|+|y|=۱$ را رسم کنید.

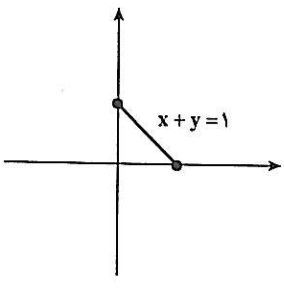
عادل: چون $|x|$ داریم باید حالتهای $x\geq ۰$ و $x<۰$ را در نظر بگیریم و چون $|y|$ داریم باید حالتهای $|y|\geq ۰$ و $|y|<۰$ را در نظر بگیریم. پس روی هم رفته چهار حالت داریم.

الف ــ هرگاه $x\geq ۰$ و $y\geq ۰$ آنگاه معادله به صورت $|x|+|y|=x+y=۱$ در می‌آید که قسمتی از یک خط راست در ناحیه اول است.

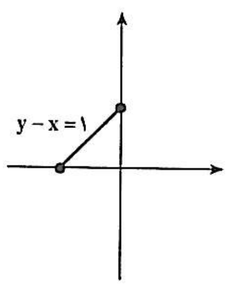
ب ــ هرگاه $x<۰$ و $y\geq ۰$ آنگاه معادله به شکل $|x|+|y|=-x+y=۱$ درمی‌آید که قسمتی از یک خط راست در ناحیه دوّم است.

پ ــ هرگاه $x<۰$ و $y<۰$ آنگاه معادله به صورت $|x|+|y|=-x-y=۱$ در می‌آید یا به عبارت دیگر $x+y=-۱$.

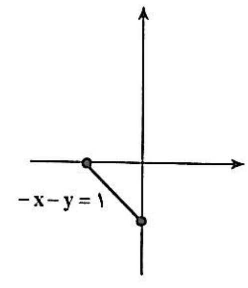
ت ــ هرگاه $x\geq ۰$ و $y<۰$ آنگاه معادله به صورت $|x|+|y|=x-y=۱$ خواهد بود.



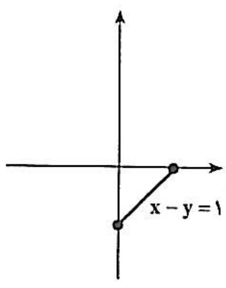
شکل ۱



شکل ۲

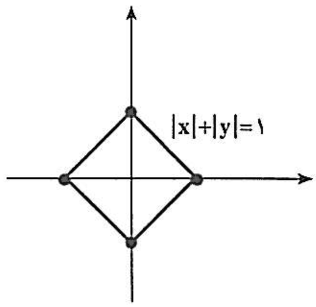


شکل ۳



شکل ۴

بنابراین در حالت کلی نمودار جوابهای معادله به صورت زیر خواهد بود.



خود را بیازماییم

معادلات زیر را حل کنید و همهٔ جوابهای آن‌ها را به دست آورید.

1) $|2x+1|=1$

2) $x+3=|2x+4|$

3) $|x+1|+|2x+3|=5$

4) $|x|^2=4$

در هر مورد از هر دو روش جبری و رسم نمودار کمک بگیرید.

فعالیت

آیا معادله $|-a|=|a|$ برای هر عدد حقیقی a برقرار است؟

عادل برای اثبات تساوی بالا چنین استدلال کرد: a و $-a$ هر دو در یک فاصله از مبدأ O هستند؛ این پس فاصله همان مقدار مطلق a و $-a$ است که با هم مساوی هستند.

پارسا که دقیق‌تر بود گفت: استدلال عادل به نظر من صحیح است امّا برای این‌که اطمینان بیش‌تری داشته باشیم بهتر است از زبان ریاضی استفاده کنیم. معادله را در دو حالت در نظر می‌گیریم $a\geq 0$ یا $a<0$.

i) برای $a\geq 0$ از آن‌جا که $-a\leq 0$ داریم $|a|=a$ و $|-a|=-(-a)=a$

ii) برای $a<0$ از آن‌جا که $-a>0$ داریم $|a|=-a$ و $|-a|=-a$ پس در هر دو حالت داریم $|-a|=|a|$.

خود را بیازماییم

آیا معادلهٔ زیر برای هر عدد حقیقی a برقرار است:

$a^2=|a|^2$

فعالیت

معادله $x^2=a^2$ را حل کنید.

عادل: ثابت می‌کنیم که جوابهای معادله فوق همان جوابهای معادله $|x|=|a|$ می‌باشد. فرض کنید b جواب معادله $|x|=|a|$ باشد بنابراین $|b|^2=|a|^2$ اما قبلاً دیدیم که $|b|^2=b^2$ و $a^2=|a|^2$ بنابراین $b^2=a^2$. اینک فرض کنید b جواب معادلهٔ $x^2=a^2$ باشد. بنابراین $|b|^2=b^2=a^2=|a|^2$ یا $|b|^2=|a|^2$. اما $|b|>0$ و $|a|>0$ پس می‌توان از دو طرف جذر گرفت. پس $|b|=|a|$.

پارسا: استدلال دیگری هم می‌شود مطرح کرد. هنوز نمی‌دانیم که از معادله $|x|^2=|a|^2$ هم می‌توان جذر گرفت. بنابراین برای طرف دوم این‌گونه عمل می‌کنیم

$$x^2=a^2 \Rightarrow |x|^2=|a|^2$$

اتحاد مزدوج

$$\Rightarrow |x|^2-|a|^2=0 \Rightarrow (|x|-|a|)(|x|+|a|)=0$$

اما می‌دانیم که هرگاه حاصل‌ضرب دو عدد صفر شود حتماً یکی از اعداد صفر است بنابراین $|x|=|a|$ یا این که $|x|=-|a|$. اما در معادله دوم $|a|\geq 0$ و $-|a|\leq 0$ و $0\leq|x|=-|a|\leq 0$ بنابراین $|x|=0$ و بنابراین $|x|=|a|=0$ پس در هر حال $|x|=|a|$. بنابراین

$$x=\pm|a|=\pm a$$

خود را بیازماییم

آیا رابطه $a+|a|\geq 0$ برای هر a برقرار است؟

فعالیت

مدلسازی مسائل با معادلات

حسین و رضا از طرف مدیر مدرسه مأمور شدند تا طرح اولیه‌ای برای ساختن یک زمین فوتبال گل کوچک همراه با جایگاه‌هایی برای حدود ۷۰۰ نفر تماشاگر ارائه دهند. البته طرح آن‌ها باید با در نظر گرفتن امکانات مدرسه و زمین ورزشی باشد. به حسین و رضا کمک کنید.

رضا : زمینی که در اختیار ما است مستطیل شکل است و ما باید با توجه به محدودیتهایی که هست طرح خودمان را ارائه دهیم.

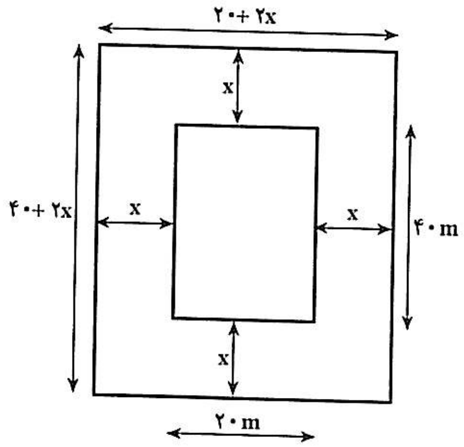
حسین : اولین کاری که باید انجام شود تعیین طول و عرض زمین فوتبال و محاسبه مساحت اطراف آن برای تماشاگر است. به نظر شما طول و عرض زمین فوتبال چقدر باشد؟

رضا : طول زمین فوتبال معمولاً از دو برابر عرض آن مقداری کمتر است. ولیکن ما می‌توانیم طول آن را ۴۰ و عرض آن را ۲۰ انتخاب کنیم یعنی طول دقیقاً دو برابر عرض. حال باید به محاسبه مساحت لازم برای ۷۰۰ نفر تماشاگر بپردازیم. اولاً فرض کنید که برای هر جایگاه یک نفری یک متر مربع زمین لازم باشد. ثانیاً اگر نواری به پهنای مجهول x حول زمین در نظر بگیریم می‌خواهیم x را به گونه‌ای تعیین کنیم که مساحت نوار حاشیه‌ای دقیقاً برابر با ۷۰۰ متر مربع باشد تا بتوان جایگاهی برای ۷۰۰ دانش‌آموز ساخت.

حسین :فرض کنیم زمین فوتبال و جایگاه‌های اطراف آن مطابق شکل زیر می‌باشد. برای تعیین x به این ترتیب عمل می‌کنیم. مساحت زمین فوتبال $۴۰\times۲۰=۸۰۰$ متر مربع است و مساحت مورد نیاز جایگاه‌ها ۷۰۰ متر مربع. بنابراین کل مساحت مورد نیاز $۸۰۰+۷۰۰=۱۵۰۰$ متر مربع است از طرفی مساحت کل برابر است با $(۲۰+۲x)\times(۴۰+۲x)=۱۵۰۰$

$$(۱۰+x)(۲۰+x)=۳۷۵ \Rightarrow x^۲+۳۰x+۲۰۰=۳۷۵$$

$$\Rightarrow x^۲+۳۰x-۱۷۵=۰$$



رضا : برای حل این مسئله می‌توانیم مربع کامل بسازیم

$$x^۲+۳۰x-۱۷۵=(x^۲+۳۰x+۲۲۵)-۴۰۰=۰$$

$$\Rightarrow (x+۱۵)^۲=۴۰۰=۲۰^۲$$

$$\Rightarrow x+۱۵=\pm۲۰ \Rightarrow x=-۱۵\pm۲۰ \begin{cases} x_۱=۵ \\ x_۲=-۳۵ \end{cases}$$

$x_۲$ قابل قبول نیست، چون طول نمی‌تواند منفی باشد.

پس $x=۵$.

حسین : به طریق دیگر هم می‌توان معادله را حل کرد ابتدا $x^۲+۳۰x-۱۷۵$ را تجزیه می‌کنیم :

$$x^۲+۳۰x-۱۷۵=(x+۳۵)(x-۵)=۰$$

بنابراین یا $x-۵=۰$ یا $x+۳۵=۰$

چند مسئله‌ای که در زیر آمده است از یک کتاب ریاضی قرن پنجم هجری قمری اقتباس شده است.

مسئله

گر بپرسند ما را از بریدی که گفتند او را برو هر روزی شش فرسنگ و پنجمین روز را از او بریدی دیگر را گفتند برو از پیش هر روز نه فرسنگ کدام روز بیابد این برید آخرین مر آن پیشین را؟

شمارش: ضرب کردیم میانه روزهایشان را که چهار روز است در رفتن فرسنگ برید نخستین که شش فرسنگ است حاصل آن بیست و چهار، ببخشیدیم او را بر میانه فرسنگ هر دو یعنی سه فرسنگ که میانه شش و نه است برفت هفت. بیابد آخرین آن نخستین را به هشت روز از روز شدن خویش یا به دور از دهم [روز] شدن برید پیشین.

مسئله

گر بپرسند ما را از بریدی که او را به راه داشته باشند از شهر شرقی به شهر غربی و گفته باشند که چنان باید که به پنج روز به شهر غربی رسی و بریدی دیگر را همان روز از شهر غربی به راه کرده باشند بدان شهر شرقی و گفته که باید که به هفت روز به شهر شرقی رسی. این هر دو برید چندم روز به هم رسند و کدام ساعت روز؟

شمارش :چنان است که ضرب کردیم هفت را در پنج که مدت رفتن روزگارشان است ؛برآمد سی و پنج این عدد مقسوم است نگاه داشتیم،پس هفت را بر پنج فزودیم دوازده حاصل آمد، این عدد مقسوم‌علیه است،ببخشیدیم عدد مقسوم را بر عدد مقسوم‌علیه برفت دو و یازده بماند از دوازده،بدانستیم که آن هر دو برید به هم رسند دو روز و بیست و دو ساعت گذشته از شبان روزی.

مسئله

گر پرسند ما را که مردی پنج به درمی بخرید و هفت به درمی بفروخت و سی درم زیان کرد، اصل مالش چند بوده باشد؟

شمارش: چنان است که ضرب کردیم عدد مال زیان کرده او را که سی‌درم است در عدد مال فروختنش که هفت است حاصل آمد دویست و ده. این مال مقسوم است نگاه داشتیم. پس فراز گرفتیم فصل میان خرید و فروخت یعنی که پنج هفت دو بود، او را مقسوم‌علیه خواندیم ببخشیدیم مال مقسوم را بر مقسوم‌علیه برفت صد و پنج درم و این اصل مال او بوده است.

مسئله

گر پرسند ما را که مردی گفت که وامن (با من) بود مالی که سود کردم درمی را درمی و ده درم از او به درویشان دادم. پس دیگر باره سود کردم درمی را درمی و ده درم به درویشان دادم پس دیگر باره سود کردم درمی را درمی و ده درم به درویشان دادم که نماند وامن (با من) مال سود کرد یک ذره از مال. مال و سود کرد چند بوده باشد؟

شمارش: فراز گرفتیم یکی را از بهر آن‌که درمی در درمی سود کرده است و دو چندان کنیم تا دو درم شود نگاه داریم و فراز گیریم ده درم را که بداد به دو چندان کنیم بیست بود، پس دو را دو چندان کنیم چهار باشد و دهی بر بیست فراز کنیم تا سی شود، دو چندان کنیمش شصت باشد و دهی بر او افزاییم هفتاد باشد و چهار را دو چندان کنیم هشت شود، هفتاد را بر او ببخشیم هشت و چهار دانگ و نیم حاصل آید. این مال است که سرمایه داشت.

مسئله

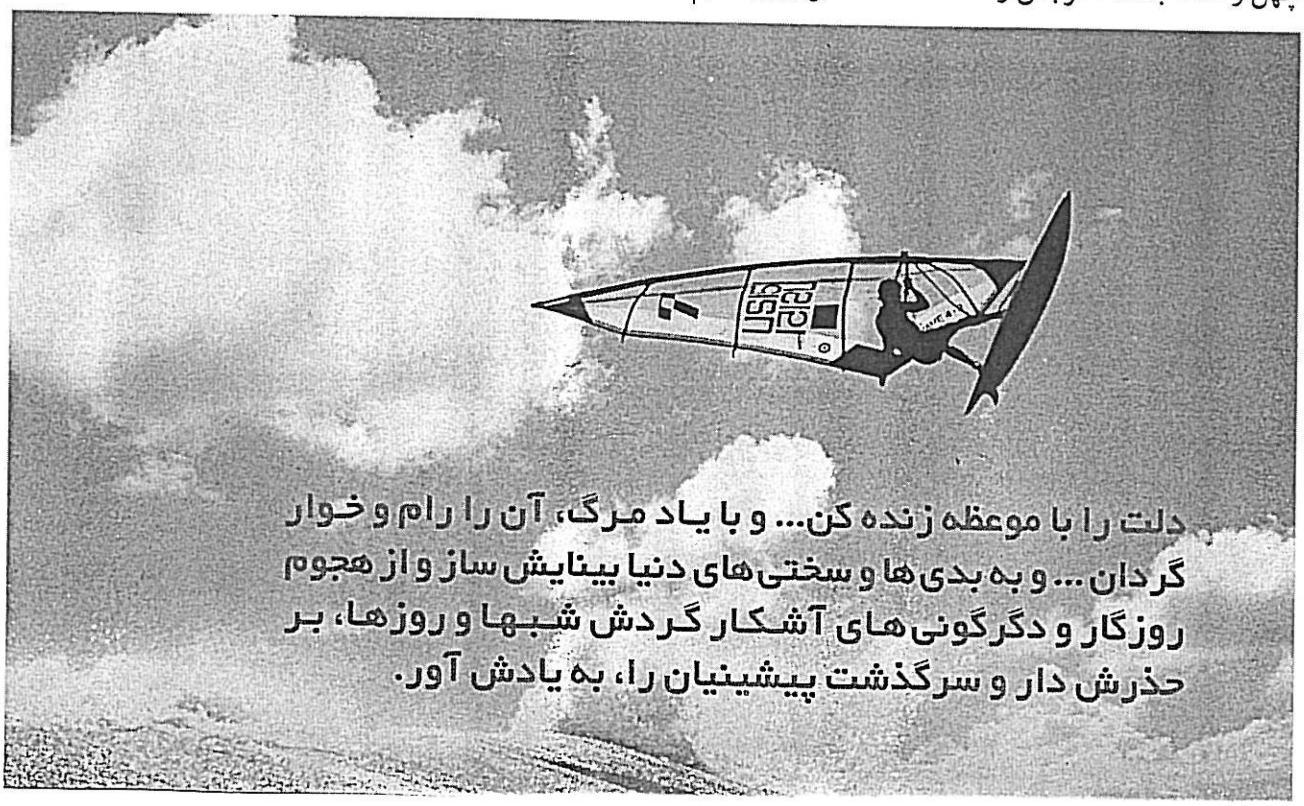
گر بپرسند ما را از بریدی که او را گفته باشند که هر روز هژده فرسنگ برو، و دوازده فرسنگ باز آی. برفت و باز آمد و رفتن و آمدن جمله‌اش چهل روز بود. چند روز رفته باشد و چند روز با آمده؟

شمارش: گرد آوردیم فرسنگ رفتن و آمدن را، هژده و دوازده جمله سی نگاه داشتیم که او مقسوم‌علیه است، پس دوازده را که فرسنگ آمدن است در مدت روزگار آمد و شدن ضرب کردیم، یعنی در چهل روز حاصل آمد چهار صد و هشتاد. پس او را ببخشیدیم برسی که مقسوم‌علیه است برفت شانزده، این مقدار آن روز است که برفته است. و تمامیش تا چهل بیست و چهار روز باشد که مقدار آن روزگار است که آمده است.

مسئله

گر بپرسند ما را که حوضی هست که اندر او سه رود گذر دارد که از یک رود آن حوض پر شود به سه روز، و دوم به چهار روز، و از سیم به پنج روز پس هر سه رود را به یک بار سراندر حوض گشودند. به چند روز پر گردد؟

شمارش: آن است که از قولش فراز گیریم سه و چهار و پنج مقدار روزها و او را به مخرج‌ها فرود آریم به ثلث و ربع و خمس، پس فراز گیریم ثلث و ربع و خمس شصت و گرد آوریم، چهل و هفت باشد، مخرجش را که شصت است بر وی ببخشیم برود یکی و بماند سیزده از چهل و هفت، بدانستیم که این حوض به یک روز و شش ساعت و در مثلث ساعتی به تقریب پر شود. و بر این کردار بود هر شمار که بر این کردار باشد.



۴ــ۴ــ حل معادلات

فعالیت

تابحال می‌توانیم معادلهٔ $x^2 = a^2$ را حل کنیم. پس می‌توانیم معادله $(cx+d)^2 = a^2$ را حل کنیم. اما می‌دانیم هر معادله درجه دوّم را می‌توانیم به شکل $(cx+d)^2 = b$ درآوریم. پس برای $b \geq 0$ حل این معادله را می‌دانیم و برای $b < 0$ این معادله جواب ندارد. چون $(cx+d)^2$ همیشه مثبت است. پس با این روش می‌توانیم هر معادله درجه دوّم را حل کنیم.

این ایده را برای حل معادلهٔ درجه دوّم کلی $ax^2 + bx + c = 0$ به کار ببرید و برحسب a و b و c بگویید چه موقع جواب دارد و چه موقع جواب ندارد.

پارسا : خوب است از چند مثال شروع کنیم و سعی کنیم یک مربع کامل بسازیم.

مثلاً این معادله درجه دوم را در نظر بگیریم

$$2x^2 + 4x - 7 = 0$$

$$2x^2 + 4x + \square = 2(x^2 + 2x + \frac{\square}{2}) = 2(x+1)^2$$

بنابراین $0 = 2x^2 + 4x - 7 = 2x^2 + 4x + 2 - 9$

$$= 2(x^2 + 2x + 1) - 9 = 2(x+1)^2 - 9$$

پس کافی است معادله $(x+1)^2 = 9$ را حل کنیم که جوابهای آن $x+1 = 3$ و $x+1 = -3$ هستند. یعنی $x = 2$ و $x = -4$.

عادل : با بیرون آوردن ضریب a می‌توان همین کار را در حالت کلی کرد.

اگر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را بخواهیم حل کنیم می‌نویسیم :

$$ax^2 + bx + \square = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{\square}{a}) = a(x + \frac{b}{2a})^2$$

پس باید $\frac{\square}{a} = \frac{b^2}{4a^2}$ و از آن‌جا $\square = \frac{b^2}{4a}$

حال که مربع کامل ساختیم داریم

$$0 = ax^2 + bx + c =$$

$$= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + (\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}))$$

$$= a\left((x + \frac{b}{2a})^2 + (\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2})\right)$$

چون ضریب a را غیر صفر گرفتیم کافی است جواب معادله زیر را پیدا کنیم :

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

یا این که می‌توان برای سادگی همهٔ جملات را در $4a^2$ ضرب کرد و معادلهٔ زیر را حل کرد

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

پس فقط وقتی جواب داریم که $b^2 - 4ac \geq 0$.

در این صورت $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

پارسا : برتری این روش بر روش‌های هندسی قبلی این است که این روش هم جواب‌های مثبت را به دست می‌دهد و هم جوابهای منفی را. ولی در روش هندسی برای به دست آوردن جوابهای منفی باید تلاش بیش‌تری انجام دهیم.

خود را بیازماییم

با استفاده از فرمول ریشه‌ها معادله‌های درجه دوّم زیر را تجزیه کنید.

۱) $2x^2 - 5x - 3$

۲) $x^2 - 35 - 36$

۳) $4x^2 - 7x + 3$

۴) $6x^2 - 5x - 4 = 0$

۵) $8x(3 - 2x) = 9$

۶) $\frac{x^2}{3} - x + \frac{3}{2} = 0$

خود را بیازماییم

برای پیدا کردن جوابهای منفی یک معادلهٔ درجهٔ دوم به روش هندسی راه حلی پیشنهاد کنید. مزیتهای روش‌هندسی و جبری را نسبت به یک‌دیگر برشمارید.

خود را بیازماییم

بگویید چرا ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+2b'x+c=0$ از فرمول $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ به دست می‌آید.

خود را بیازماییم

عبارت b^2-4ac را مبیّن معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ می‌نامند و آن را با Δ نمایش می‌دهند.

۱ــ نشان دهید اگر $\Delta>0$ معادلهٔ بالا دو ریشه نامساوی دارد.

۲ــ نشان دهید $\Delta=0$ معادله بالا یک ریشه بیش‌تر ندارد. اما این ریشه دوبار تکرار شده است.

۳ــ نشان دهید اگر $\Delta<0$ معادلاً بالا ریشه ندارد.

خود را بیازماییم

از روی مبین تعداد ریشه‌های معادلات زیر را مشخص کنید.

۱) $2x^2+5x-4=0$

۲) $16x^2-40x+25=0$

۳) $5x^2-3x+4=0$

۴) $9x^2-24x+16=0$

فعالیت

ثابت کنید اگر $ac<0$ معادله $ax^2+bx+c=0$ دارای دو ریشه حقیقی است.

پارسا: از آن‌جا که مبین کاملاً وضع ریشه‌ها را مشخص می‌کند باید سعی کنیم مسئله را به مبین برگردانیم. یعنی باید نشان دهیم اگر $ac < 0$ آنگاه $\Delta > 0$ یا به عبارتی $b^2 - 4ac > 0$. و این به نظر کار بسیار ساده‌ای است $ac < 0 \Rightarrow -ac > 0 \Rightarrow -4ac > 0$

هم‌چنین داریم $b^2 \geq 0$

بنابراین $b^2 - 4ac > 0$. نکته مهّم این است که ممکن است $b^2 = 0$ (در حالت $b = 0$ اتفاق می‌افتد که در این صورت معادله به شکل $ax^2 + c = 0$ است) اما از آن‌جا که $-4ac > 0$ همیشه ناصفر است $b^2 - 4ac$ همیشه مثبت و غیر صفر است بنابراین دو ریشه متمایز داریم.

عادل: در حالت خاص $b = 0$ بسیار روشن است که $ac < 0$ نتیجه می‌دهد $x^2 = \frac{-c}{a} > 0$ و دو ریشه متمایز $\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$ داریم. می‌توان طور دیگری هم استدلال کرد. عبارت $ax^2 + bx + c$ برای مقادیر مثبت x بسیار بزرگ علامتش همان علامت a است. چون با بزرگ شدن x عبارت ax^2 بسیار سریعتر از bx بزرگ می‌شود. همین‌طور برای x منفی بسیار بزرگ علامت $ax^2 + bx + c$ همان علامت a است اما برای $x = 0$ عبارت $ax^2 + bx + c = c$ دارای علامتی مخالف a است چون $ac < 0$. پس $ax^2 + bx + c$ دو جا ناچار است از صفر بگذرد و این همان ریشه‌ها هستند.

خود را بیازماییم

مقدار a را چنان پیدا کنید که معادلهٔ $x^2 + (a+4)x + a^2 + 5 = 0$ یک ریشه مکرّر داشته باشد.

فعالیت

مردی دو مزرعه داشت برای برداشت محصول دو کارگر گرفت یکی قوی و دیگری ضعیف سه روز اول کارگر قوی روی مزرعه شماره یک و کارگر ضعیف روی مزرعه شماره دو کار می‌کنند و دو روز دیگر جای خود را عوض می‌کنند و برداشت محصول در ظرف این پنج روز تمام می‌شود. اگر صاحب مزرعه برای مزرعه اول ۲۱ هزار تومان و برای مزرعه دوم ۱۶ هزار تومان پرداخت کند، سهم هر کدام چقدر می‌شود.

سهیل و سامان با هم به بررسی مسئله پرداختند.

سهیل: اول باید مجهولها را مشخص کنیم. فکر می‌کنم در این‌جا دو مجهول اصلی داریم. یکی این که کارگر قوی باید روزی چقدر مزد بگیرد که آن را با x نمایش می‌دهیم و دیگری این که کارگر ضعیف باید روزی چه‌قدر مزد بگیرد که آن را با y نمایش می‌دهیم.

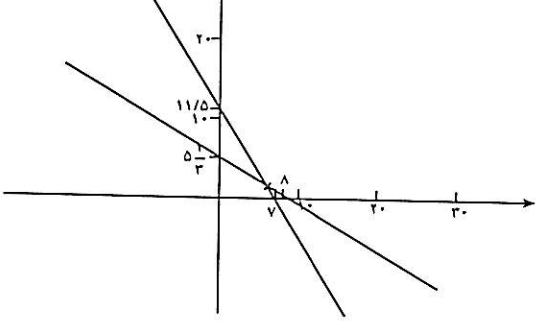
سامان: معلوم برای ما مزدی است که برای هر یک از مزرعه‌ها پرداخت می‌شود. حال باید روابط بین معلوم‌ها و مجهولها را مشخص کنیم.

سهیل: در مزرعه اوّل سه روز کارگر قوی و دو روز کارگر ضعیف کار کرده‌اند. پس به نسبت مزد کارگر قوی باید بیش‌تر باشد. اگر از نمادهای x و y برای فرد کارگر قوی و کارگر ضعیف استفاده کنیم می‌توانیم بنویسیم $3x + 2y = 21$

همین‌طور در مزرعه دوم کارگر ضعیف سه روز و کارگر قوی دو روز کارکرده است. پس می‌توانیم بنویسیم:

$$2x + 3y = 16$$

سامان: حال باید x و y را چنان بیابیم که در هر دو معادله صدق کند. این هم روشن است. چون هر یک از این معادلات معادلهٔ یک خط است. می‌توانیم هر دو را رسم کنیم و نقطهٔ اشتراک این خطوط را بیابیم. مختصات نقطه اشتراک جواب هر دو معادله است. چون روی هر دوی خطوط قرار دارد.



مختصات نقطهٔ اشتراک تقریبا (۱ و ۶) است. یعنی $x=۶$ و $y=۱$.

این جوابها تقریباً در معادله هم صدق می‌کنند.

$$۳x+۲y=۳\times۶+۲\times۱=۲۰\approx۲۱$$

$$۲x+۳y=۲\times۶+۳\times۱=۱۲+۳=۱۵\approx۱۶$$

سهیل : ایده جالبی دادی. ولی همان‌طور که می‌بینی این‌جا به یک جواب دقیق نیازمندیم. اگر نتوانستیم آنوقت ایده‌ی تو بسیار خوب است. ولی اوّل باید سعی کنیم از روش جبری استفاده کنیم و یک جواب دقیق به دست بیاوریم.

سامان : این کار به این سادگی نیست. از معادلات $۳x+۲y=۲۱$ که دو متغیر دارد به این راحتی نمی‌توان اطلاعاتی استخراج کرد. ما در حل معادلات درجه اول و درجه دوّم تنها یک متغیر داشتیم. ولی این‌جا بین دو متغیر رابطه برقرار شده است. حداکثر کاری که برای ساده‌تر شدن معادله بتوان انجام داد این است که بنویسیم $y=\frac{۲۱}{۲}-\frac{۳x}{۲}$

سهیل : همین جواب را به‌دست می‌دهد. ببین اگر همین کار را برای معادله دیگر انجام دهیم و بنویسیم $y=\frac{۱۶}{۳}-\frac{۲x}{۳}$ آنگاه داریم $\frac{۲۱}{۲}-\frac{۳x}{۲}=y=\frac{۱۶}{۳}-\frac{۲x}{۳}$ و می‌توانیم y را فراموش کنیم. این معادلات در یک معادلهٔ خطی برحسب x خلاصه می‌شوند که می‌توان آن را ساده کرد.

$$\frac{۲۱}{۲}-\frac{۳x}{۲}=\frac{۱۶}{۳}-\frac{۲x}{۳}$$

$$\frac{۲۱}{۲}-\frac{۱۶}{۳}=\frac{۳x}{۲}-\frac{۲x}{۳}$$

$$\frac{۶۳-۳۲}{۶}=\frac{۹x-۴x}{۶}$$

$$۳۱=۵x \qquad x=\frac{۳۱}{۵}=\frac{۳۰}{۵}+\frac{۱}{۵}=۶/۲$$

$$y=\frac{۲۱}{۲}-\frac{۳x}{۲}=\frac{۲۱}{۲}-\frac{۳\times۶/۲}{۲}=۱۰/۵-۹/۳=۱/۲$$

سامان : برای این که از صحت جوابها مطمئن شویم باید آنها را امتحان کنیم

$$۳x+۲y=۳\times۶/۲+۲\times۱/۲=۲۱$$

$$۲x+۳y=۲\times۶/۲+۳\times۱/۲=۱۶$$

البته می‌توانستیم به‌جای y، متغیر x را حذف کنیم و یک معادلهٔ درجه ۱ برحسب y به‌دست آوریم. در هر حال حق با تو بود. راه‌حل جبری جواب دقیق‌تری می‌دهد. ولی این در صورتی است که معادلهٔ خط را دقیق بدانیم. خیلی وقتها خود معادلهٔ خطوط هم تقریبی هستند. در آن صورت استفاده از روش هندسی بهتر است.

خود را بیازماییم

دستگاههای معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}۲x+y+z=۳\\ ۲x-y-z=-۱\\ x+y=\frac{۳}{۲}\end{cases}\qquad \begin{cases}x+y+z=۶\\ ۲x+y=۴\\ ۴+y=۳\end{cases}$$

$$\begin{cases}۳x+y-۲z=۱۴\\ ۲x+y-z=۵\\ x-۴y+۲z=۳\end{cases}$$

خود را بیازماییم

دستگاه معادلات زیر را حل نمایید

$$\begin{cases}y=\sqrt{۳}x\\ x^۲+y^۲=۴۸\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=x+۲\\ x^۲+y^۲=۱۰\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+y=۱۰\\ xy=۲۴\end{cases}$$

فعالیت

مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول وتر ۵ بیابید که اضلاع زاویه قائمه آن اعداد صحیح متوالی باشند :

سمیرا و سارا به نظریه اعداد علاقه دارند و برای حل هر مسئله‌ای بیش‌تر به ساختارهای عددی آن توجه دارند.

سمیرا : اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه در رابطه فیثاغورث $x^2+y^2=z^2$ صدق می‌کنند.

از طرفی می‌دانیم $z=5$ بنابراین می‌توانستیم بنویسیم

$$x^2+y^2=25$$

سارا : یک معادلهٔ دیگر هم داریم $x=y+1$. البته با فرض این‌که x ضلع بزرگ‌تر زاویه قائمه است. حال با این دو معادله یک دستگاه داریم که باید جوابهای آن را به دست آوریم.

سمیرا : اشتباه نکن. ما فقط به جوابهایی علاقه‌مندیم که اعداد طبیعی باشند. چون در نهایت می‌خواهیم مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع صحیح داشته باشیم.

سارا : بسیار خوب. از روش جایگذاری استفاده می‌کنیم

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x=y+1 \end{cases} \Rightarrow (y+1)^2+y^2=25$$

$$y^2+2y+1+y^2=25$$

$$2y^2+2y-24=0$$

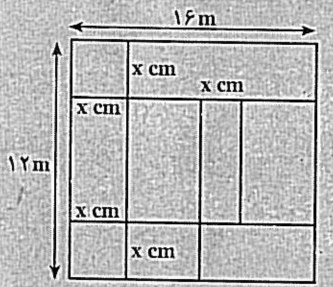
$$y=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\times2(-24)}}{2\times2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+192}}{4}$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{196}}{4}=\frac{-2\pm14}{4}\begin{cases} y=3\Rightarrow x=4 \\ y=-4\Rightarrow x=-3 \end{cases}$$

سمیرا : جوابهای منفی قابل قبول نیستند، چون جوابهای منفی نمی‌توانند طول ضلع باشند. جوابهای مسئله هم خوشبختانه طبیعی هستند. پس تنها یک مثلث قائم‌الزاویه در شرایط مسئله صدق می‌کند و آن هم مثلث قائم‌الزاویه معروف به اضلاع ۳ و ۴ و ۵ است.

خود را بیازماییم

از یک تکه مقوای مستطیل شکل با اضلاع ۱۶ cm و ۱۲cm به شکل زیر جعبه در داری را با جدا کردن قسمتهای هاشور خورده بسازید.



مسئله

اگر بپرسند ما را از دو برید که ایشان را به یک روز به راه کرده باشند از شهر و گفته‌اند که یکی را هر روز پیوسته ۳۰ فرسنگ رود آن دیگر را گفته‌اند که تو روز نخستین یک فرسنگ رو و دوم روز دو فرسنگ و سه‌ام روز سه فرسنگ هر روز به زیادت یک فرسنگ همی رو. پس کدام روز بیابد این برید کندرو مر آن تیز رو را که پیشتر رفته بود (که هر روز ۳۰ فرسنگ رود)

حل معادلات از درجه بالاتر مشکل است. خیلی وقتها نمی‌توان به سادگی ریشه‌ای از آنها یافت. اما گاهی می‌توان با حدس و آزمایش ریشه‌ای از یک چند جمله‌ای پیدا کرد. مثلاً خیلی وقتها با آزمایش می‌توان دید که ۱ یا ۱- ریشه هستند. یا جمله ثابت چند جمله‌ای برابر صفر است و بنابراین ۰ یک ریشه است. خواهیم دید که این کار به تجزیه چند جمله‌ای کمک می‌کند.

خود را بیازماییم

نشان دهید هرگاه مجموع ضرایب $a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ برابر صفر باشد، عدد ۱ یک ریشه چند جمله‌ای بالا است

خود را بیازماییم

نشان دهید هرگاه در چند جمله‌ای $a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ مجموع $(-1)^na_n+(-1)^{n-1}a_{n-1}+\cdots+(-1)^1a_1+a_0$ برابر صفر باشد، عدد ۱- یک ریشه است.

همان‌طور که گفتیم چند جمله‌ایها تعمیمی از اعداد هستند. همان‌طور که برای اعداد طبیعی b و a اگر یک عدد طبیعی داشته باشیم که $a=bc$ می‌گوییم a بر b بخش‌پذیر است. یعنی a را می‌توان به b دسته مساوی تقسیم کرد که هر کدام c عضو دارند، در مورد چند جمله‌ایهای B و A هم اگر برای یک چند جمله‌ای C داشته باشیم $A=BC$ می‌گوییم چند جمله‌ای A بر چندجمله‌ای B **بخش‌پذیر** است. همین‌طور می‌گوییم چندجمله‌ای A **مضربی** از چند جمله‌ای B است و چند جمله‌ای C را خارج قسمت تقسیم A بر B می‌نامیم.

مثلاً $6x^2+5x-4=(2x-1)(3x+4)$

بنابراین $(6x^2+5x-4)\div(2x-1)=3x+4$

پس $6x^2+5x-4$ بر $2x-1$ بخش‌پذیر است و یا مضربی از $2x-1$ است.

البته می‌توانستیم بنویسیم

$$6x^2+5x-4=(6x-3)(x+\frac{4}{3})$$

پس $6x^2+5x-4$ بر $6x-3$ هم بخش‌پذیر است. در حالت کلی اگر چند جمله‌ای A بر B بخش‌پذیر باشد بر هر aB که a عددی حقیقی است هم بخش‌پذیر است.

فعالیت

آیا x^3-2x^2+x-1 بر $x-2$ بخش‌پذیر است؟

مینا همیشه به آخر کار فکر می‌کند. حتی موقع حل مسئله دوست دارد از همان اوّل بداند آخر حل مسئله به کجا ختم می‌شود. برای همین برای پاسخ به سؤال بالا چنین گفت:

فرض کنیم x^3-2x^2+x-1 بر $x-2$ بخش‌پذیر باشد.

پس داریم

$$x^3-2x^2+x-1=(x-2)A$$

A ناچار است که یک چند جمله‌ای درجه 2 باشد تا $(x-2)A$ درجه 3 شود. پس باید ضرایب A را چنان پیدا کنیم که $A=a_2x^2+a_1x+a_0$ و

$$x^3-2x^2+x-1=(x-2)(a_2x^2+a_1x+a_0)$$

طرف راست را بسط می‌دهیم

$$\begin{aligned}&(x-2)(a_2x^2+a_1x+a_0)=\\&=(x-2)(a_2x^2)+(x-2)(a_1x)+(x-2)(a_0)=\\&=a_2x^3-2a_2x^2+a_1x^2-2a_1x+a_0x-2a_0=\\&=a_2x^3+(a_1-2a_2)x^2+(a_0-2a_1)x-2a_0\end{aligned}$$

پس داریم x^3-2x^2+x-1

$$=a_2x^3+(a_1-2a_2)x^2+(a_0-2a_1)x-2a_0$$

چون دو چند جمله‌ای دو طرف تساوی برابرند و هر دو به فرم استاندارد هستند ضرایب هم درجهٔ آنها با هم برابر است.

$$\begin{cases}1=a_2\\-2=a_1-2a_2\Rightarrow a_1=0\\1=a_0-2a_1\Rightarrow \boxed{1=\frac{1}{2}-2\times 0}\\-1=-2a_0\Rightarrow a_0=\frac{1}{2}\end{cases}$$

می‌بینیم که a_2 و a_1 و a_0 را نمی‌توان چنان پیدا کرد که تساوی زیر برقرار باشد.

$$x^3-2x^2+x-1=(x-2)(a_2x^2+a_1x+a_0)$$

مریم راه ساده‌تری به نظرش رسید: اگر داشته باشیم $x^3-2x^2+x-1=(x-2)A$ با جمع کردن مضربی از $(x-2)$ به دو طرف باز هم یک چند جمله‌ای به دست می‌آید که بر $(x-2)$ بخش‌پذیر است.

$$\begin{aligned}&x^3-2x^2+x-1+(x-2)B\\&=(x-2)A+(x-2)B=(x-2)(A+B)\end{aligned}$$

پس برای این‌که بدانیم x^3-2x^2+x-1 بر $x-2$ بخش‌پذیر است یا نه کافی است برای ساده‌تر شدن مضارب $x-2$ را از آن کم کنیم تا از درجه آن کم شود.

$$\begin{aligned}&x^3-2x^2+x-1-x^2(x-2)=\\&x^3-2x^2+x-1-x^3+2x^2=x-1\end{aligned}$$

پس x^3-2x^2+x-1 بر $(x-2)$ بخش‌پذیر است فقط

و فقط وقتی $x-1$ بر $x-2$ بخش‌پذیر باشد. امّا می‌دانیم که این درست نیست. پس جواب پرسش مسئله منفی است.

لیلا همت کرد و دستی به روی راه‌حلهای مینا و مریم کشید و آنها را مرتب کرد. راه حل مینا از این جهت جالب است که با آن می‌توان خارج قسمت تقسیم را حساب کرد: من کمی راه‌حل را جلوتر می‌برم. می‌گویم تقسیم $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ بر $x-\alpha$ ممکن است باقیماندهٔ عددی R داشته باشد. پس می‌نویسم:

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$$
$$=(x-\alpha)(b_0x^2+b_1x+b_2)+R$$

با مساوی قرار دادن ضرایب دو طرف داریم

$$\begin{cases} a_0=b_0 \\ a_1=b_1-\alpha b_0 \\ a_2=b_2-\alpha b_1 \\ a_3=R-\alpha b_2 \end{cases}$$

a_0، a_1، a_2 و a_3 داده شده‌اند. b_0، b_1، b_2 و R به‌راحتی محاسبه می‌شوند و همیشه هم جواب به دست می‌آید.

$$b_0=a_0 \qquad b_1=a_1+\alpha b_0$$
$$b_2=a_2+\alpha b_1 \qquad R=a_3+\alpha b_2$$

با قرار دادن $\alpha=2 \quad , \quad a_3=-1 \quad ,$

$a_2=1 \quad , \quad a_1=-2 \quad , \quad a_0=1$

داریم $b_0=1, b_1=-2+2\times 1, b_2=1+2\times 0$

$$R=-1+2\times 1=1$$

پس $x^3-2x^2+x-1=(x-2)(x^2+1)+1$

راه حل مریم هم از این جهت جالب است که شبیه تحقیق بخش‌پذیری اعداد است یعنی برای این‌که ببینیم عدد a بر b بخش‌پذیر است کافی است مضارب b را از a کم کنیم و ببینیم چقدر باقیمانده می‌ماند. من به این نکته توجه کردم که این کار همان الگوریتم تقسیم است. می‌توانم آن را برای چند جمله‌ایها هم پیاده کنم

$$\begin{array}{rl|l} & x^3-2x^2+x-1 & x-2 \\ \hline -) & x^3-2x^2 & x^2+1 \\ \hline & 0 \quad 0 \quad x & \\ -) & x-2 & \\ \hline & 1 & \end{array}$$

پس داریم: $x^3-2x^2+x-1=(x-2)(x^2+1)+1$

امتحان کردم که آیا با این روش می‌توان هر دو چند جمله‌ای را بر هم تقسیم کرد؟ جواب مثبت بود. مثلاً

$$\begin{array}{rl|l} & x^3-2x^2+x-1 & x^2+1 \\ \hline -) & x^3+x & x-2 \\ \hline & -2x^2-x+x & \\ -) & -2x^2-2 & \\ \hline & 1 & \end{array}$$

با این روش باقیمانده‌ای با درجه کمتر از مقسوم‌علیه به‌دست خواهیم آورد.

خود را بیازماییم

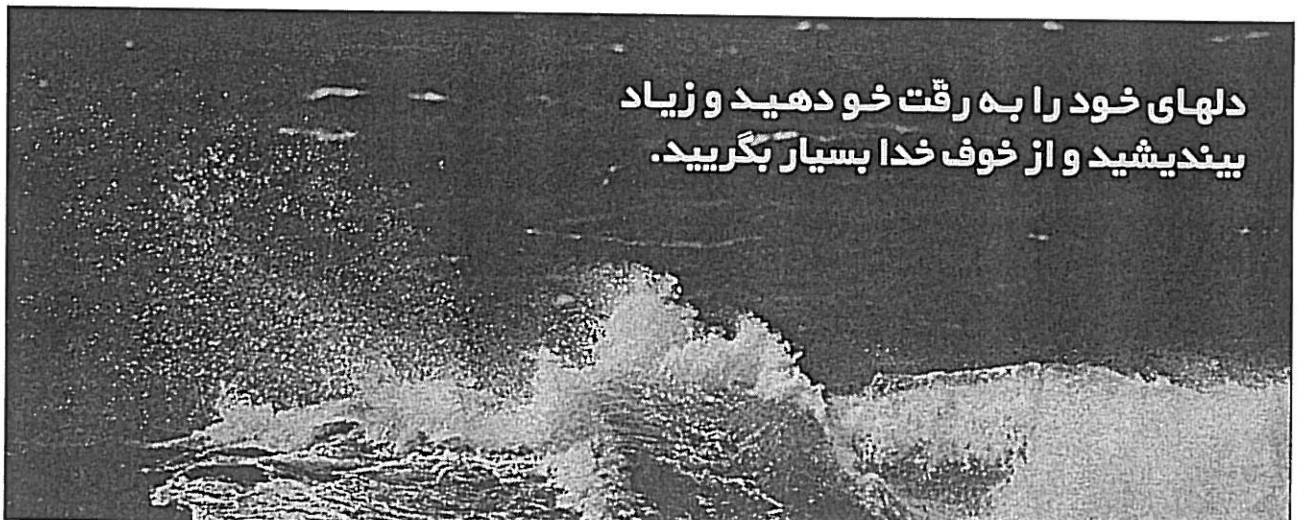
تقسیمهای زیر را انجام دهید و خارج قسمت و باقیمانده آن را محاسبه کنید:

1) $(x^3-x^2+x-1)\div(x+2)$

2) $(3x^2+2x+1)\div(3x-4)$

3) $(4x-5)\div(x+2)$

4) $(y^4-2y^2-y+8)\div(y^2-y-2)$



۴ــ ۵ ــ مدلسازی مسائل با نامعادلات

فعالیت

حمیده می‌خواهد تعدادی خودکار و تعدادی مداد بخرد. او جمعاً ۳۷۰ تومان پول دارد. هر مداد ۳۰ تومان و هر خودکار ۲۰ تومان قیمت دارد. او می‌خواهد تعداد مدادها از تعداد خودکارها کمتر باشد. او به چه ترتیبی می‌تواند عمل کند.

هلیا و حورا با هم روی این مسئله فکر کردند. آنها سعی کردند برای مسئله یک مدل ریاضی بسازند که تا حد ممکن واقعی باشد.

هلیا : مجهولها تعداد مدادها و خودکارها هستند. برای این که تشکیل معادله بدهیم باید برای آنها اسم بگذاریم. فرض کنیم x تعداد مدادها و y تعداد خودکارهای خریده شده باشد. و باید داشته باشیم $۳۰x+۲۰y=۳۷۰$.

حورا : مجبور نیستیم که همه پول را خرج کنیم! فقط می‌دانیم که حداکثر می‌توان ۳۷۰ تومان خرج کرد. پس باید نوشت $۳۰x+۲۰y \le ۳۷۰$.

هلیا : اگر این‌طور است دو شرط محدود کنندهٔ دیگر هم داریم. چون تعداد مدادها و خودکارها نمی‌تواند منفی باشد، داریم $x \ge ۰$ و $y \ge ۰$.

حورا : پیشنهاد می‌کنم برای مقدارهای مختلف y حداکثر مقدار x را حساب کنیم.

مثلاً اگر $y=۰$ داریم $۳۷۰ \ge ۳۰x+۲۰y=۳۰x$ پس $x \le \frac{۳۷}{۳}$ امّا x یک عدد صحیح است پس $x \le ۱۲$. بنابراین حداکثر مقدار x همان ۱۲ می‌شود.

هلیا : یک شرط مسئله را فراموش کردیم. تعداد خودکارها باید بیشتر از مدادها باشد. یعنی $y > x$ پس جواب بالا قابل قبول نیست.

حورا : بسیار خوب یک جدول تشکیل می‌دهیم و حالتهای نامطلوب را حذف می‌کنیم.

جوابهای قابل قبول برای مقادیر ۱۷ ،... ،۱۰ ،۹ ،۸ از y به‌دست می‌آیند.

x	y
۱۲	۰
۱۱	۱
۱۱	۲
۱۰	۳
۹	۴
۹	۵

x	y
۸	۶
۷	۷
۷	۸
۶	۹
۵	۱۰
۵	۱۱
۴	۱۲
۳	۱۳

x	y
۴	۱۲
۳	۱۳
۳	۱۴
۲	۱۵
۱	۱۶
۱	۱۷

هلیا : البته بعضی حالتها را باید حذف کرد چون با پول باقی درست است که دیگر نمی‌شود مداد خرید اما می‌توان یک خودکار اضافه خرید. پس جوابهای درست این‌طور به‌دست می‌آید :

x	y
۷	۸
۶	۹
۵	۱۱
۴	۱۲
۳	۱۴
۲	۱۵
۱	۱۷

و اگر بخواهیم روی هم رفته بیش‌ترین تعداد مداد و خودکار خریده باشیم داریم $y=۱۷$ و $x=۱$ و در این‌صورت تمام پولمان را هم خرج کرده‌ایم.

$$۳۰x+۲۰y=۳۷۰$$

حورا : ولی بررسی این همه حالت خیلی مشکل است. اگر صورت مسئله کمی پیچیده‌تر بود حتماً شرایطی را فراموش می‌کردیم. ای کاش می‌توانستیم جوابها را با روش هندسی به‌دست آوریم.

فعالیت

مسئله قبل رابا روش هندسی حل کنید.

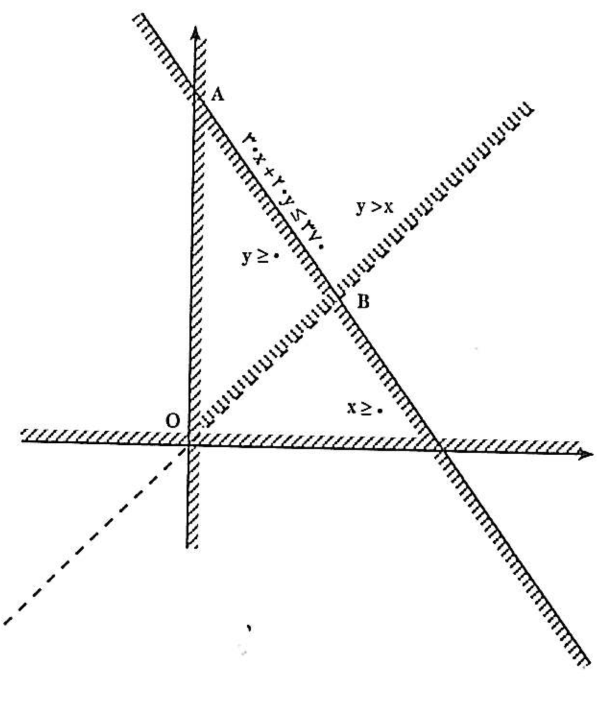
هلیا : کل معادلات مسئله اینها هستند

$$\begin{cases} ۳۰x + ۲۰y \leq ۳۷۰ \\ x \geq ۰ \\ y \geq ۰ \\ y > x \end{cases}$$

همگی شبیه معادلهٔ خط هستند. تنها تفاوتشان این است که به‌جای معادله نامعادله هستند.

حورا : بیا ببینیم چه نقاطی از صفحه توسط هریک مشخص می‌شوند. مثلاً $x \geq ۰$ برای هر نقطه بالای محورxها یا روی آن درست است. $y \geq ۰$ برای هر نقطه سمت راست محور yها یا روی آن درست است. احتمالاً هر نقطه بالای خط به معادله $ax + by = c$ در $ax + by > c$ صدق می‌کند و هر نقطه پایین این خط در $ax + by < c$ صدق می‌کند.

هلیا : با این حساب نامعادلات بالا ناحیه‌ای در صفحه را مشخص می‌کنند.

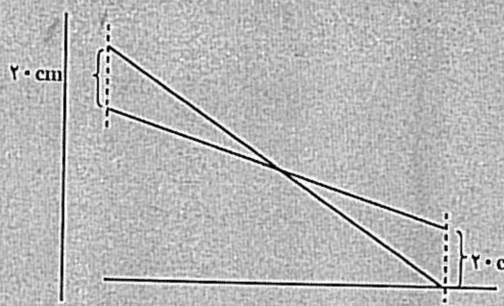


مثلث OAB که در تمام نواحی هاشور خورده قرار دارد جواب است.

هلیا : البته نقاط روی ضلع OB قابل قبول نیستند. بعلاوه ما فقط به جوابهای با مختصات صحیح علاقه‌مندیم. اگر شبکه نقاط صحیح را هم رسم کنیم همهٔ جوابها به‌راحتی مشاهده می‌شوند.

خود را بیازماییم

عسل و شیرین در پارک سرسره‌بازی می‌کنند. شیب یکی از سرسره‌ها $-۱+\frac{۱}{۱۰}$ و شیب دیگری $-۱-\frac{۱}{۱۰}$ است. سرسره‌ها از جنسی طراحی شده‌اند که اگر عسل و شیرین هم‌زمان بر آنها سوار شوند در هر لحظه هم ردیف خواهند بود. هم در آغاز و هم در پایان سرسره‌ها ۲۰^{cm} مطابق شکل اختلاف ارتفاع دارد.



الف ــ در چه مکانهایی شیرین بالای سر عسل است؟

ب ــ در چه مکانهایی عسل بالای سر شیرین است؟

پ ــ در چه مکانهایی عسل و شیرین هم ارتفاع هستند؟

خود را بیازماییم

ساحل دریا دارای شیب ملایم $-\frac{۱}{۳۰}$ است. قد علی ۱/۲ متر است. علی نمی‌تواند شنا کند. او حداکثر می‌تواند تا یک متر در آب فرورود. او تا چه فاصله‌ای می‌تواند از ساحل فاصله بگیرد.

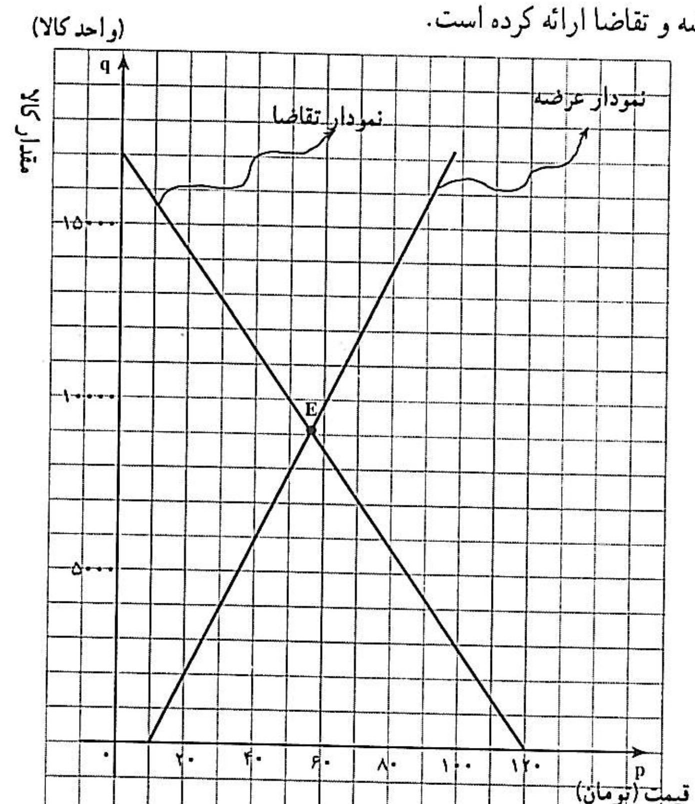
فعالیت

مسئله عرضه و تقاضا

خرید یک کالا توسط مردم در فواصل زمانی مختلف به عوامل متعددی ازجمله به قیمت آن بستگی دارد. به‌طور کلی در شرایط عادی هرگاه قیمت زیاد شود تقاضا (مصرف) کم می‌شود و هنگامی که قیمت پایین می‌آید تقاضا برای آن کالا زیاد می‌شود. به‌طور مشابه عرضه یک کالا نیز در فواصل زمانی مختلف وابسته به قیمت آن است. طبیعی است که عرضه کننده کالا، علاقه‌مند باشد هنگامی که قیمت بالا است، بیش‌ترین مقدار کالا را به‌فروش برساند و زمانی که قیمت پایین است کم‌ترین فروش را داشته باشد. لذا ملاحظه می‌کنید که عرضهٔ کالا به‌قیمت آن وابسته است و تقاضا (مصرف) درمورد یک کالا نیز به قیمت آن بستگی دارد.

با توجه به مدل‌سازی ریاضی، ساده‌ترین مدلهای عرضه و تقاضا، مدلهای خطی هستند یعنی در آن مدل نمودارهای عرضه و تقاضا خط‌راست است.

بخش تحقیقات یک کارخانه پس از تحقیق و بررسی وضعیت کالای تولید شده نمودار زیر را به‌عنوان نتیجه تحقیقات درمورد عرضه و تقاضا ارائه کرده است.



مدیریت کارخانه می‌خواهد اطلاعات مورد نیاز را از روی نمودار به‌دست آورد تا در تصمیم‌گیری و برنامه‌ریزی کارخانه از آنها استفاده کند. فرآیند زیر در همین راستا است.

۱ــ ثابتها و متغیرها را مشخص کنید. متغیرها را نام‌گذاری کنید.

۲ــ در نمودار تقاضا، کدام متغیر به دیگری وابسته است؟ در نمودار عرضه چه‌طور؟

همان‌گونه که در مدل‌سازی، تشخیص ثابتها و متغیرها در مسئله و چگونگی رفتار کمیتهایی که تغییر می‌کنند و وابستگی و تبعیت متغیرها از یک‌دیگر از عوامل اصلی بودند، هنگام کشف اطلاعات از نمودارها نیز از عوامل اصلی به‌حساب می‌آیند بدین جهت اگر در پاسخ به سؤال ۲ با مشکل روبه‌رو هستید، هریک از نمودارهای عرضه و

تقاضا را روی یک دستگاه مختصات رسم کنید و دوباره تلاش کنید. سؤال ۲ را بررسی کنید!

۳ــ سعی کنید هرکدام از نمودارها را جداگانه تفسیر کنید و به این سؤال پاسخ دهید که آیا نمودارها با مسئله واقعی هماهنگی دارند و آیا معقول به‌نظر می‌رسند؟ درصورت لزوم برای هرکدام به کمک نمودار جدولی از مقادیر برحسب مقدار کالا و قیمت تنظیم کنید.

۴ــ «نرخ تغییر» یا شیب را در نمودار تقاضا به‌دست آورید و سپس تفسیر نمایید.

۵ــ «نرخ تغییر» یا شیب را در نمودار عرضه به‌دست آورید و سپس تفسیر نمایید.

۶ــ مختصات محل تلاقی دو خط را از روی نمودار به‌دست آورید. آیا این نقطه دارای ویژگی خاصی است؟ آیا می‌توانید تفسیر اقتصادی مناسبی از این نقطه و مختصات آن ارایه کنید؟

۷ــ براساس این نمودار، چه پیشنهادی برای مدیریت کارخانه درمورد سطح تولید دارید؟

در پاسخ به سؤال ۳ ملاحظه می‌کنیم که مختصات نقطه تلاقی نمودارهای عرضه و تقاضا را نمی‌توان به‌طور دقیق از روی نمودار به‌دست آورد و درمورد مسائل اقتصادی کلان، محاسبات دقیق ریاضی از اهمیت خاصی برخوردار است. زیرا، این‌گونه خطاهای کوچک در عمل، باعث زیانهای بزرگ خواهد شد. بنابراین ناچاریم که به محیط ریاضی مسئله بازگردیم و معادله‌های متناظر با نمودارها را به‌دست آوریم.

چون نمودارها خط راست هستند و معادله کلی یک خط راست به‌صورت $y = mx + b$ است، برای به‌دست آوردن معادله خطوط باید ثابت‌های m و b را تعیین کنیم. اما توجه داریم که m همان شیب یا «نرخ تغییر» است که در سؤال ۴ عدد $-\frac{۳}{۲}$ را به‌دست آوردیم، پس کافی است برای به‌دست آوردن معادله تقاضا b را تعیین کنیم.

برای این کار کافی است مختصات یک نقطه دلخواه از نمودار را در معادله زیر قرار دهیم :

(از سؤال ۱) $\qquad m = -\frac{۳}{۲} \qquad y = -\frac{۳}{۲}x + b$

نقطه دلخواه را برای سادگی محاسبات (۰ و ۱۲۰) انتخاب می‌کنیم و به‌جای x و y در معادله‌ی بالا قرار می‌دهیم و سپس معادله مقابل به‌دست می‌آید $\qquad ۰ = -\frac{۳}{۲}(۱۲۰) + b$

$b = ۱۸۰$ پس $\qquad$ معادله تقاضا : $y = -\frac{۳}{۲}x + ۱۸۰$

یک نقطه دیگر انتخاب کنید و به‌وسیله آن معادله تقاضا را به‌دست آورید. آیا محاسبات شما کم‌تر است؟

نکته: به نمودار شکل که توجه کنیم روی محور افقی نماد p و روی محور قائم نماد q قرار داده‌ایم که نمادهای مرسوم در علم اقتصاد می‌باشد، لذا با این نمادها معادله تقاضا به‌صورت $q = -\frac{۳}{۲}p + ۱۸۰$ خواهد بود.

۸ــ معادله نظیر نمودار عرضه را به‌دست آورید :

۹ــ با استفاده از معادله تقاضا و معادله عرضه، مختصات نقطه تلاقی را به‌دست آورید.

در علم اقتصاد، نقطه‌ی تلاقی نمودار تقاضا و نمودار عرضه را، نقطه تعادل می‌گویند و مختصات نقطهٔ تعادل را مقدار تعادلی (qE) و قیمت تعادلی (pE) می‌نامند. تفسیر آن چنین است که بین خواست مصرف کنندگان و تولیدکنندگان هماهنگی وجود دارد. در پایان بررسی باید اشاره کنیم که در این مدل‌سازی، فرض کردیم که زمان تأثیری بر عرضه و تقاضا نمی‌گذارد، به‌عبارت دیگر گذشت زمان (امروز، فردا و...) تأثیری بر عرضه‌ی کالا و تقاضای مردم ندارد.

فصل ۵

تحلیل مدلهای ریاضی

اردوان که روزها در مورد جاذبه زمین اندیشیده بود و ذهن او سخت مشغول این سؤال بود که چرا نیوتون با فرمول گرانش خود راه را بر درک چرایی گرانش بسته است، هنگام مطالعه کتابی درمورد آثار علمی نیوتن و تأثیرات آن بر علوم نوین به‌خواب رفت. او در خواب مردی میان‌سال را دید که در لباس یونانیان قدیم در کنار رودخانه‌ای نشسته است و ساعت‌ها بدون آن که تکان بخورد به جریان رودخانه خیره شده است. اردوان به او سلام کرد و پرسید :

ای پیرمرد به چه‌چیز فکر می‌کنی؟

ـ به اینکه چرا آب در رودخانه جریان دارد؟

اردوان : معلوم است این به‌خاطر جاذبه زمین است؟

ـ ای جوان، عجب حرفی می‌زنی. اگر زمین می‌خواست آب را جذب کند آن را در حالت سکون جذب می‌کرد و به حرکت درنمی‌آورد. به‌نظر من این طبع آب است که به اصل خود باز گردد. رودخانه به سمت دریا می‌رود.

اردوان : اما رودخانه از کجا می‌داند که دریا کجاست که به سمت دریا برود. خیلی وقت‌ها هم به باتلاق یا دریاچه کوچکی ختم می‌شود.

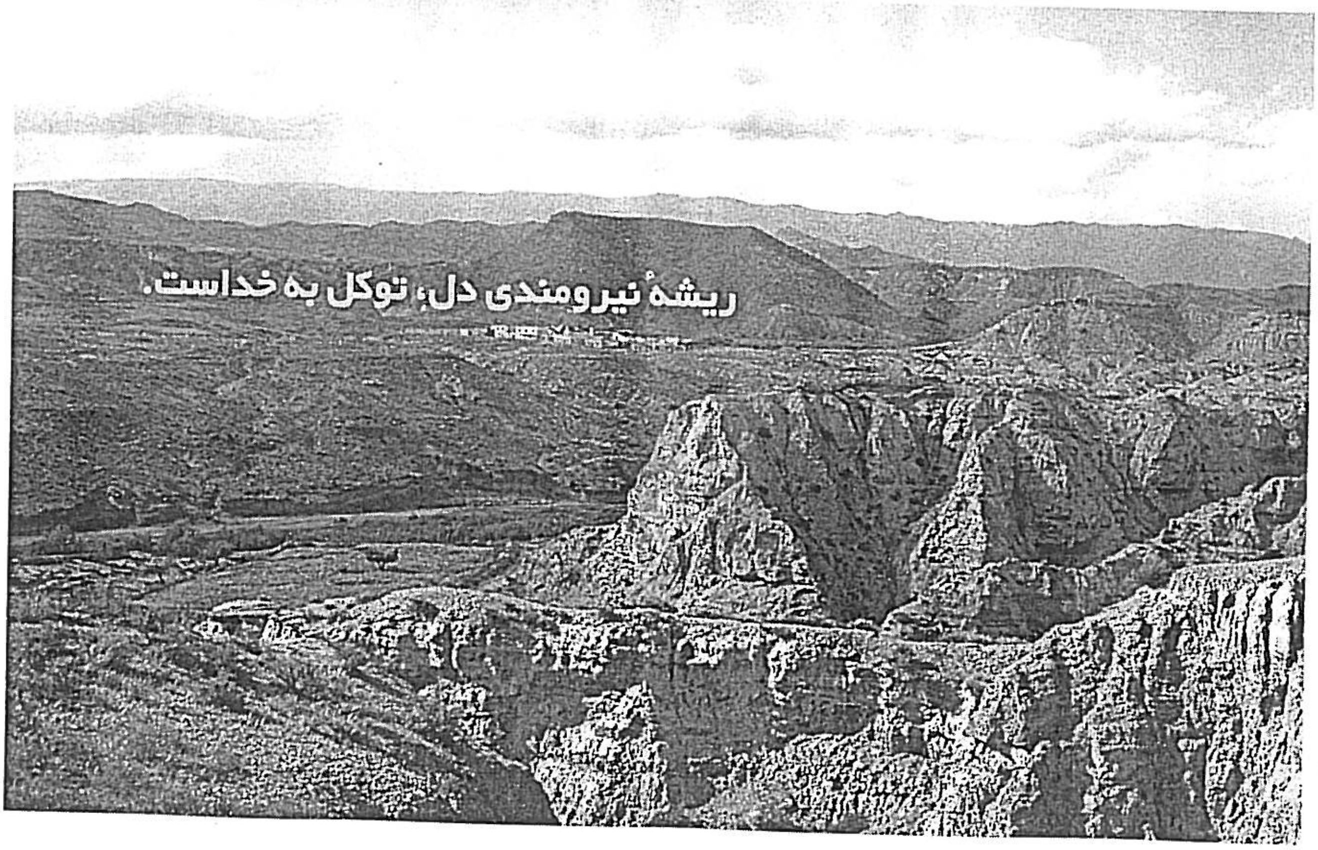
ـ اگر راهی بیابد از دریاچه هم به‌سمت دریا روان می‌شود. اما راهی نمی‌یابد.

اردوان : ای مرد، با این سن و سالت خیلی خرافاتی هستی. اهل کجایی؟ نامت چیست؟ این لباسهای عجیب چیست که پوشیده‌ای؟

ـ نام من ارسطو است و اهل یونان هستم. در شهر ما همه مانند من لباس می‌پوشند.

اردوان : شما ارسطوی بزرگ هستید؟ چه‌قدر جالب! من از آینده می‌آیم. در عهد ما به روش دیگری طبیعت را می‌شناسند. مهم‌ترین اصل در عصر ما برای شناختن طبیعت تجربه است.

ارسطو : پس فکر کردی من کنار این رودخانه چه می‌کردم؟ رفتار رودخانه را مشاهده و تجربه می‌کردم و در آن می‌اندیشیدم.



اردوان : اما اندازه‌گیری نمی‌کردی و فقط به مقتضیات طبایع می‌اندیشیدی. ذهن تو اسیر زنجیر مشاهداتت بود و تنها در حدود آن زنجیر مجال افت و خیز داشت.

ارسطو : اما بدون مشاهده چگونه به غایت و دلیل نهایی حرکت رودخانه پی ببرم. مگر راهی به جز شناختن ذات رودخانه وجود دارد؟ مگر می‌توان رفتار رودخانه را جدا از این جهان بزرگ که در اطراف ماست درک کرد؟

اردوان : به‌خاطر همین اندیشه‌هاست که شما را در عصر ما مردی سخت تصورگرا می‌شناسند. در عصر ما به علت غایی پدیده‌ها نمی‌اندیشند، بلکه سعی می‌کنند آنها را اندازه‌گیری کنند و به این وسیله پدیده‌ها را پیش‌بینی کنند یا حتی تحت کنترل خود درآورند.

ارسطو : چه می‌گویی؟ مگر می‌توان انکاری کرد که آب در رودخانه‌ای سربالا حرکت کند؟ مگر در عصر شما کسی چنین کاری می‌کند؟

اردوان : خیر! در عصر ما همین جریان آبی را که می‌بینی کنترل می‌کنند و از نیروی آن روشنایی به‌وجود می‌آورند. حبابهایی که چون خورشید در شب درخشانند و اطراف خود را روشن می‌کنند.

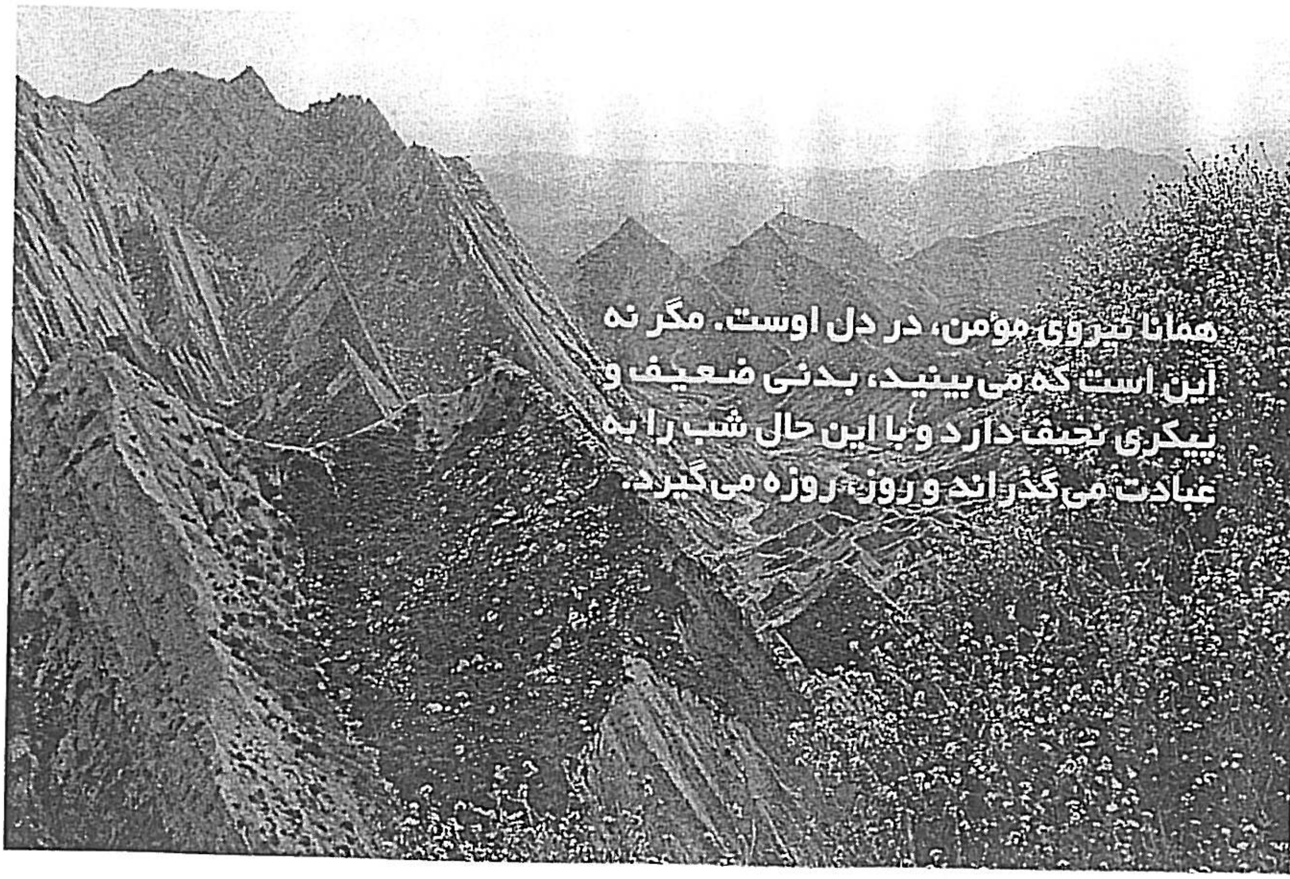
ارسطو : باور نکردنی است. از من می‌خواهی که گفته‌های تو را باور کنم؟ کار علم جادوگری نیست. بلکه کشف نسبتهای علت و معلولی و خصوصیات ذاتی اشیای اطراف ماست.

اردوان : در عصر ما به فکر هیچ دانشمندی رسوخ نمی‌کند که کروی بودن قطرات باران را به طبیعت باران نسبت دهد و یا سطح زمین را جایگاه طبیعی آب و اطراف زمین را جایگاه طبیعی هوا بداند. در عصر ما نه شکل دانه‌های برف و نه سوختن پنبه و نه چربی روغن و نه شوری نمک و نه سنگینی سرب و نه سبکی هوا، هیچ‌یک را نمی‌توان به قطع نتیجه طبع و ذات این اشیاء دانست. هیچ موجودی را به خود وانهاده و فارغ از شرایط و آسوده از اخلال اخلال‌گران بیرون نمی‌بینیم. موجودات همواره درحال داد و ستد هستند.

ارسطو : هرگز چنین نیست. موجودات فارغ از اخلال یک‌دیگر نشسته‌اند و به صدور آثار خویش مشغولند و ما آنان را به تور معرفت صید می‌کنیم و راز درونشان را کشف می‌کنیم. با این روش خود، طبیعت را به‌خوبی می‌شناسیم و در آرای خود تناقضی نمی‌بینیم.

اردوان : شما با طبیعی دانستن پدیده‌ها راه هرگونه نقد و بحث و بررسی را بر آرای خود می‌بندید. در عصر ما، مثل شما فکر نمی‌کنند. بهتر از شما و راحت‌تر از شما زندگی می‌کنند اما در آرای خود تناقضات فراوانی می‌بینند.

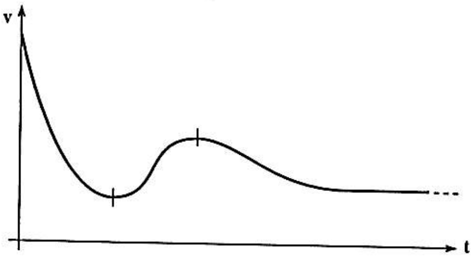
اردوان با عصبانیت از خواب پرید. اصلاً دوست نداشت کسی او را مسخره کند که چرا نمی‌داند زمین چگونه اشیاء را جذب می‌کند.

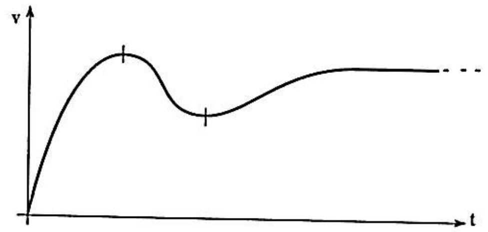


۵ـ۱ـ مدلسازی با استفاده از مدلهای داده شده

فعالیت

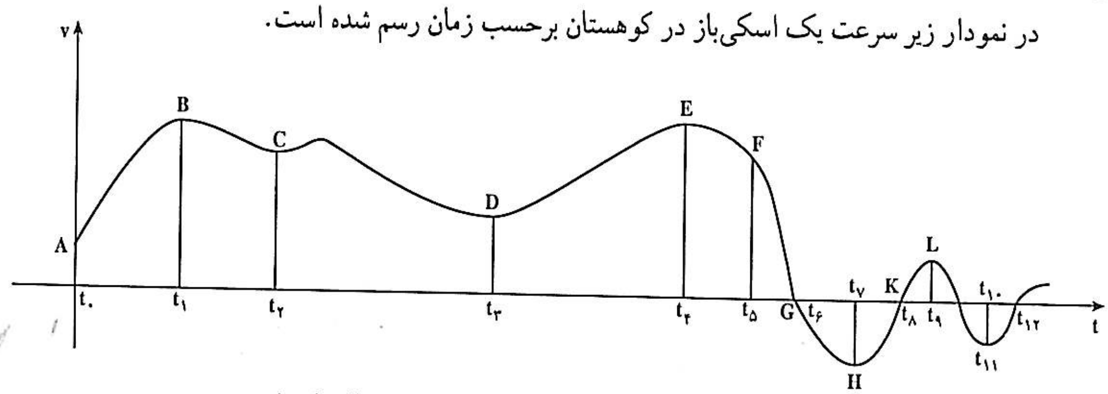
در اینجا نمودار ارتفاع ـ زمان و سرعت ـ زمان حرکت یک اسکی باز نمایش داده شده است.





در مقایسه این نمودارها چه می‌آموزید؟ آیا می‌توان نمودار سرعت ـ زمان را به‌طور تقریبی از روی نمودار مکان ـ زمان بدست آورد. آیا می‌توان نمودار مکان ـ زمان را به‌طور تقریبی از روی نمودار سرعت ـ زمان بدست آورد؟

در نمودار زیر سرعت یک اسکی‌باز در کوهستان برحسب زمان رسم شده است.



۱ـ زمان t_0 که شروع حرکت اسکی‌باز را نشان می‌دهد، دارای چه اطلاعاتی است؟

۲ـ سرعت اسکی‌باز در زمان t_1 بیش‌تر است یا در زمان t_2 ؟

۳ـ بیش‌ترین سرعت اسکی‌باز در چه نقطه‌ای روی می‌دهد؟

۴ـ تغییر سرعت از زمان t_0 به t_1 بیش‌تر است یا از زمان t_5 به t_6 ؟

۵ـ سرعت در زمان t_6 و t_8 چه‌قدر است؟ چه مفهومی دارد؟

۶ـ در زمان t_7 سرعت اسکی‌باز را تشریح کنید؟

۷ـ نمودار ارتفاع ـ زمان تقریبی را برای حرکت اسکی‌باز رسم کنید.

در شماره ۴ در فعالیت بالا از مفهوم تغییر سرعت سؤال شده است. هنگامی که به عقربه سرعت‌سنج اتومبیل یا موتورسیکلت نگاه می‌کنید احتمالاً دیده‌اید که گاهی عقربه افزایش سریع سرعت را نشان می‌دهد و یا کاهش آن را نشان می‌دهد. امّا در شرایط عادی وقتی وسیله نقلیه سرعت می‌گیرد، عقربه نشان می‌دهد که سرعت به آرامی افزایش می‌یابد یا به‌عنوان مثال سرعت یک هواپیما در پنج ثانیه اول روی باند فرودگاه از حالت سکون (صفر) به‌سرعت زیادی افزایش می‌یابد. درصورتی که یک اتومبیل سرعتش به این شدت تغییر نمی‌کند.

باید توجه داشته باشیم که تغییرات سرعت یک متحرک اطلاعات مهمی را دربر گرفته است.

نرخ تغییر سرعت در فاصله زمانی t_2 و t_1 $= \dfrac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$

فعالیت

با توجه به نمودار سرعت ـ زمان اسکی باز یک مسیر حرکت طبیعی طراحی کنید که تغییرات سرعت را برحسب زمان این مسیر به‌صورت نمودار داده شده در بحث اسکی باز نشان دهد.

در سری تمرینات بعدی که همراه با آزمایش می‌باشد می‌توانید با درنظر گرفتن آزمایش به‌طور فرضی مسائل را پاسخ دهید و هرگاه قانع نشدید دست به آزمایش واقعی بزنید.

خود را بیازماییم

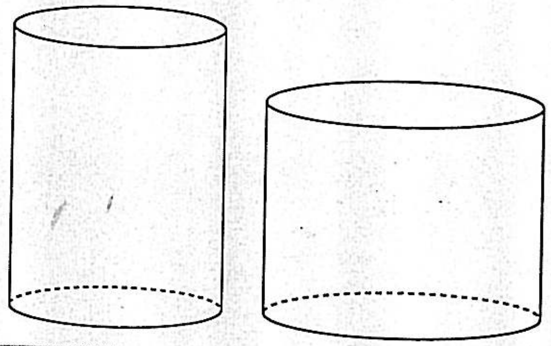
شکل زیر یک وسیله آزمایشگاهی است. نمودار ارتفاع آب برحسب تعداد پیمانه‌ها را درمورد خروج آب از بطری رسم کنید.

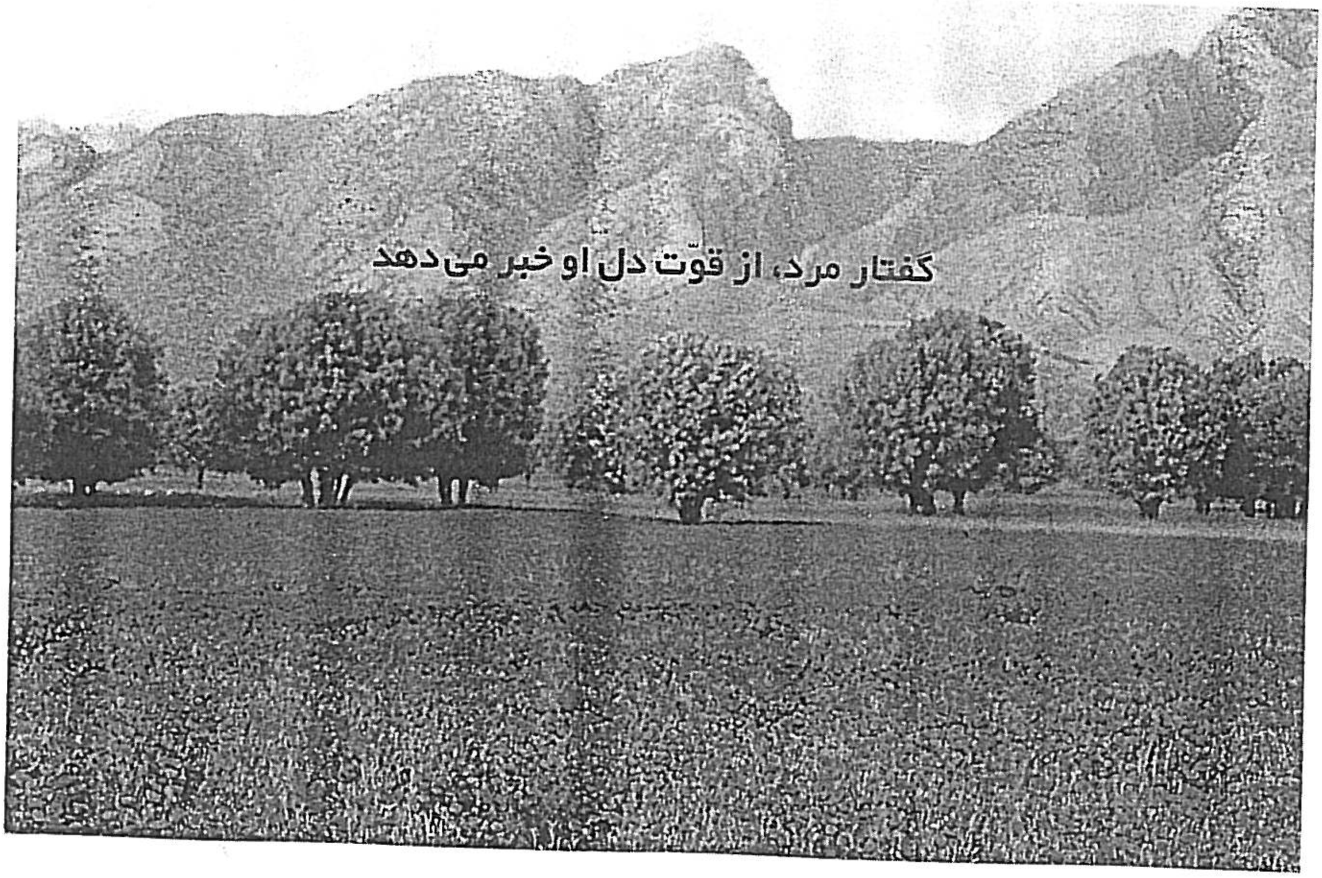
خود را بیازماییم

می‌خواهیم با یک پیمانه دو ظرف استوانه مطابق شکل زیر را از آب پر کنیم. یک نوار مدرج کنار هر استوانه چسبانده و هربار که یک پیمانه آب در هریک می‌ریزید، ارتفاع آب در داخل استوانه‌ها را یادداشت کنید و سپس یک جدول که حاوی تعداد پیمانه‌ها و ارتفاع آب می‌باشد برای هر استوانه تنظیم کنید. سپس نمودار هریک را رسم کنید.

الف ـ نرخ تغییر ارتفاع آب در کدام استوانه بیش‌تر است؟

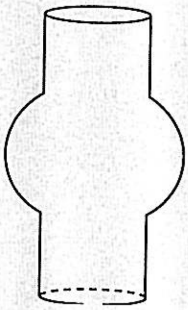
ب ـ فکر می‌کنید نرخ تغییر ارتفاع وابسته به چیست؟

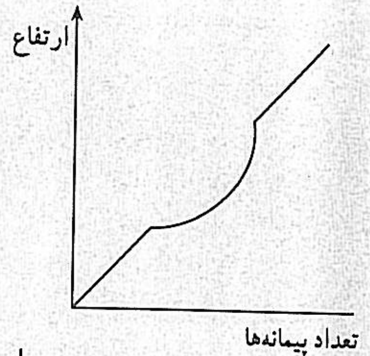


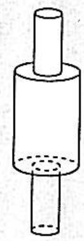


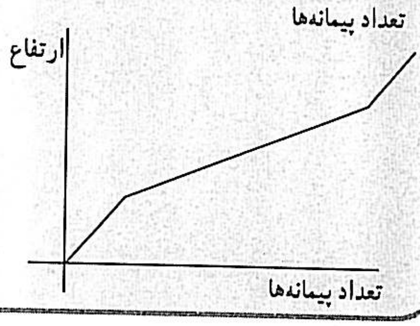
خود را بیازماییم

بطریهای زیر را درنظر بگیرید. نمودار تغییر ارتفاع آب برحسب تعداد پیمانه‌ها برای هریک رسم شده است. نمودارها را توجیه نمایید.



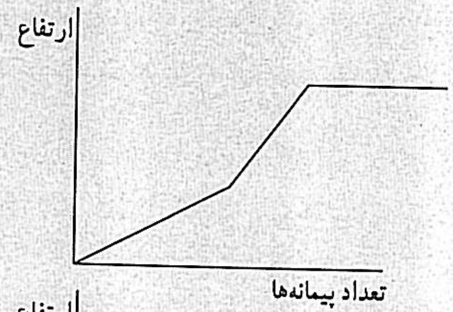


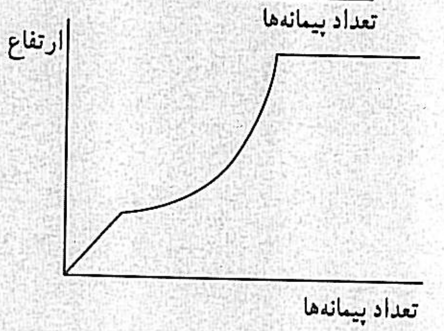




خود را بیازماییم

نمودارهای زیر مربوط به ارتفاع آب برحسب تعداد پیمانه‌ها، در بطری‌ها می‌باشد. با توجه به آن‌ها بطری‌ها را طراحی کنید.





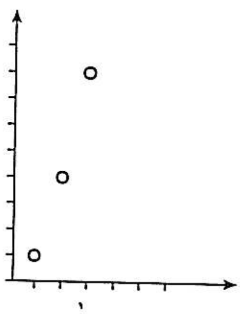
فعالیت

نموداری برای مساحت مربع

برای مساحت مربع به ضلع x که طول ضلع متغیر است مدلی ریاضی بسازید.

مهری و فریده چون فکرشان شبیه هم بود همیشه در حل مسئله به‌هم کمک می‌کردند.

مهری : می‌توان مربعهای به طول ضلع ۱، ۲، ۳ و... درنظر گرفت و دید که مساحت آنها از چه الگویی پیروی می‌کند.



به‌نظر می‌رسد که رشد سریع مساحتها نسبت به طول ضلع آن‌قدر زیاد است که به این سادگی نمی‌توان نمودار آن را رسم کرد.

فریده : بهتر است مقادیر دیگری از طول ضلع را هم در نمودار نشان دهیم تا بهتر شکل مدل ریاضی خودمان را پیدا کنیم. مثلاً از ۰/۱، ۰/۲، ۰/۳ شروع می‌کنیم الی‌آخر

$(۰/۱)^{۲}=۰/۰۱\sim ۰$

$(۰/۲)^{۲}=۰/۰۴\sim ۰$

$(۰/۳)^{۲}=۰/۰۹\sim ۰/۱$

$(۰/۴)^{۲}=۰/۱۶\sim ۰/۲$

$(۰/۵)^{۲}=۰/۲۵\sim ۰/۳$

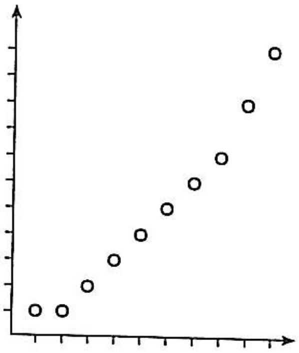
$(۰/۶)^{۲}=۰/۳۶\sim ۰/۴$

$(۰/۷)^{۲}=۰/۴۹\sim ۰/۵$

$(۰/۸)^{۲}=۰/۶۴\sim ۰/۶$

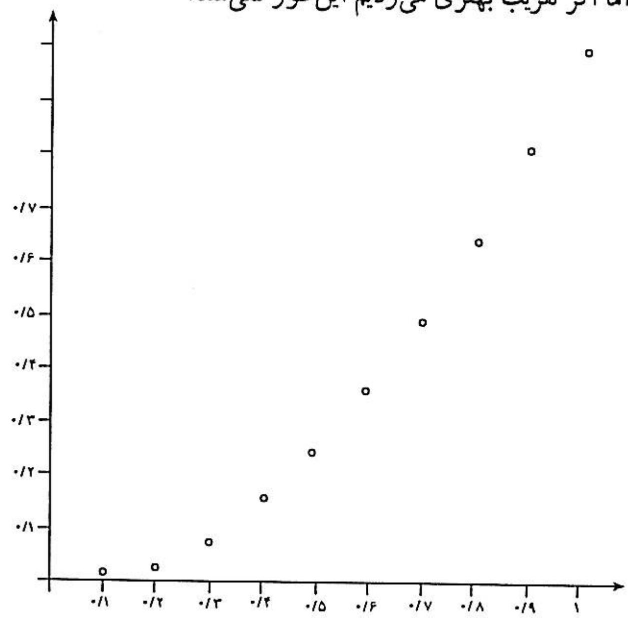
$(۰/۹)^{۲}=۰/۸۱\sim ۰/۸$

$۱^{۲}=۱$



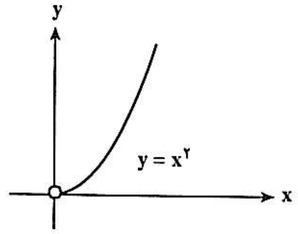
چیزی که در نگاه اوّل معلوم است این است که این الگو خطی نیست.

مهری: من فکر می‌کنم گرد کردن تو الگوی واقعی را خراب کرده. چون چندین نقطه از مدل تو روی یک خط هستند اما اگر تقریب بهتری می‌زدیم این‌طور نمی‌شد.



این‌طور بهتر به‌نظر می‌رسد که مساحتها روی یک خط قرار ندارند و یک منحنی را مشخص می‌کنند.

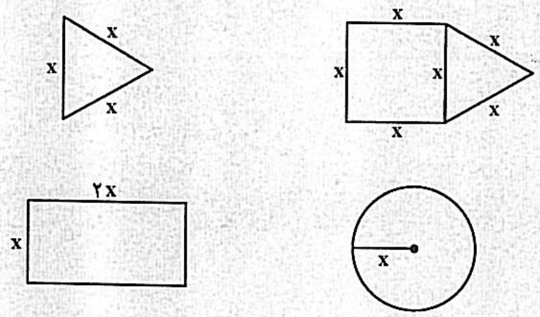
فریده کنجکاو شد که آیا این الگو برای مقادیر ۰/۰۵، ۰/۱۵، ۰/۲۵، ۰/۳۵ الی‌آخر هم صحیح است یا خیر. نموداری برای مساحت مربع با طول این اضلاع رسم کرد و الگوی آن را کاملاً مطابق با الگوی بالا دید. برای همین پیشنهاد کرد که نمودار را با یک منحنی پیوسته و ممتد نمایش دهیم: هرچه فاصله طول اضلاعی که مساحت مربعی به ضلع برابر با آن‌ها را درنظر می‌گیریم کم‌تر باشد بهتر می‌بینیم که این نقطه‌ها انگار روی یک خط منحنی قرار دارند. اگر می‌توانستیم مربعی داشته باشیم که طول ضلع آن رشد کند مساحت آن هم رشد می‌کرد. بنابراین به‌طور طبیعی یک نمودار پیوسته و بدون بریدگی بدست می‌آوردیم. من فکر می‌کنم این نمودار منحنی را می‌توان خیلی دقیق و ریاضی‌وار هم تعریف کرد. این خط منحنی دقیقاً (x,y) هایی در صفحه هستند که $y = x^2$ و $x > 0$ چون طول ضلع همیشه مثبت است پس نمودار این خط منحنی چیزی شبیه به این می‌شود که از بالا همین‌طور ادامه دارد و از نقاط (۱،۱) و (۲،۴) و (۳،۹) هم که شما درنظر گرفتی عبور می‌کند.



پس معادلهٔ $y = x^2$ و $x > 0$ کاملاً مدل ریاضی ما را مشخص می‌کند.

خود را بیازماییم

مدلی ریاضی برای مساحت اشکال زیر برحسب x بدست آورید.

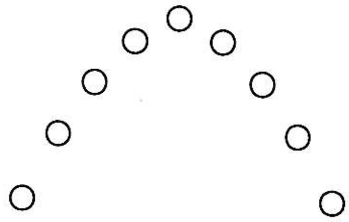


فعالیت

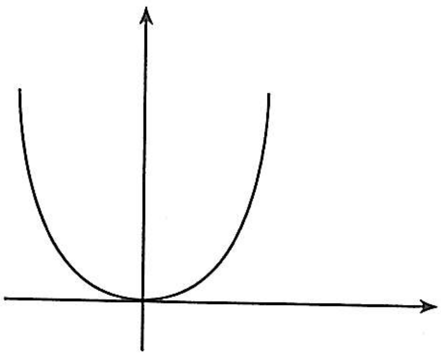
فعالیت: چند جمله‌ایهای درجه ۲ در بسیاری از مسائل مدل خوبی بدست می‌دهند. شکل مدل ریاضی بالا را درنظر بگیرید آیا در محیط زندگی اطراف خود پدیده‌هایی می‌بینید که شبیه این مدل باشند؟ با آزمایش و اندازه‌گیری بررسی کنید که آیا این شباهت که به‌نظر شما می‌رسد واقعی است یا خیر؟ مثلاً اگر توپی را از روی پشت‌بام به پایین پرتاب کنیم مسیر حرکت توپ به این مدل شبیه است.

آزمایشی ترتیب دهید که درستی این شباهت را تصدیق نماید سپس این شباهت را به زبان ریاضی بیان نمایید.

فریده : اگر براستی پرتاب توپ شبیه این مدل ریاضی باشد، پرتاب توپ به‌طرف بالا هم باید با این مدل سازگاری داشته باشد. چون اگر توپ به‌طرف بالا پرتاب شود، پس از مدتی دوباره به سمت زمین بازمی‌گردد و این بازگشت شبیه مدل ریاضی ماست. امّا مسیر رفت تقریباً شبیه مسیر برگشت به سمت زمین است. خوب بود مدلی داشتیم که شبیه تمام مسیر توپ باشد.



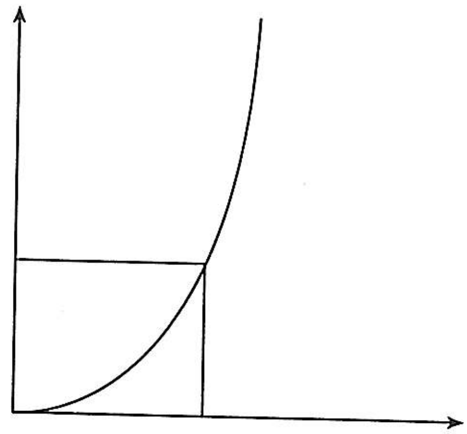
اگر در معادله $y = x^{2}$ و $x > 0$، شرط $x > 0$ را فراموش کنیم مدلی به شکل زیر خواهیم داشت :



مهری : این مدل بسیار شبیه مسیر توپ است. اما با مساحت مربع هرگز نمی‌توانستیم به این مدل برسیم چون آن‌جا طول ضلع مثبت بود. می‌بینیم که پیدا کردن مصداق‌های گوناگون برای یک مدل ریاضی در طبیعت و زندگی اطرافمان به ما کمک می‌کند که مدل‌های ریاضی خود را کامل‌تر نماییم.

فعالیت

یک بادکنک دایره شکل را با تلمبه باد کنید و بعد از کروی شکل شدن بادکنک مدلی برای رشد حجم یک بادکنک کروی ارائه کنید. پس از هربار پایین بردن دسته تلمبه قطر بادکنک را با دو صفحه کتاب که موازی هم هستند و بادکنک بین آنها محدود شده است، اندازه بگیرید و اندازه بدست آمده را برحسب تعداد تلمبه‌ها برروی نمودار نمایش دهید.



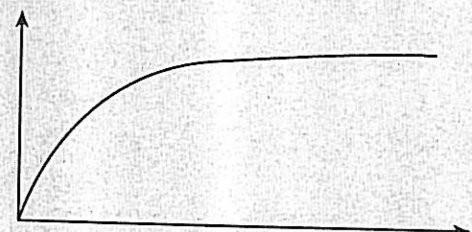
می‌بینید که هرچه قطر بادکنک بیش‌تر می‌شود یک بار پایین بردن تلمبه مقدار کمتری به قطر آن اضافه می‌کند می‌توانید بگویید چرا؟

خود را بیازماییم

حجم کره را برحسب قطر آن بدست آورید و با استفاده از فرمول آن مدلی ریاضی برای حجم کره برحسب قطر آن بیابید. سپس این مدل را با مدلی که در بالا بدست آوردید مقایسه کنید.

خود را بیازماییم

در این‌جا می‌توانستید نمودار را این‌طور هم نمایش دهید :



آیا این دو مدل ریاضی در کاربرد با هم فرقی دارند؟ آیا یکی از آنها از دیگری تواناتر است؟

در مدل‌سازی ارتباط بین دو متغیر هیچ‌کدام از دو متغیر لزوماً علت یا معلول دیگری نیستند. فرض این‌که ارتباط علت و معلولی بین دو متغیر برقرار باشد به ما کمک می‌کند بهتر بتوان مدل ارتباط آن‌ها را تفسیر نمود و با کمک آن رفتار یکی از آنها را برحسب دیگری پیش‌بینی نمود. امّا باید توجه داشت که این‌که کدام متغیر وابسته و کدام متغیر مستقل فرض می‌شود باید با شهود روزمره هماهنگی داشته باشد.

فعالیت

حرکت توپی را که به بالا پرتاب می‌شود و سپس به پایین باز می‌گردد درنظر بگیرید.

۱ــ نمودار ارتفاع برحسب زمان را رسم نمایید و تحلیل کنید.

۲ــ نمودار سرعت برحسب زمان را رسم نمایید و تحلیل کنید.

۳ــ نمودار شتاب برحسب زمان را رسم نمایید و تحلیل کنید.

۴ــ نمودارهای سرعت برحسب ارتفاع و شتاب برحسب ارتفاع را رسم نمایید و با نمودارهای قبلی مقایسه کنید.

۵ــ نمودارهای ارتفاع و شتاب را برحسب سرعت رسم نمایید و با نمودارهای قبل مقایسه کنید.

درمورد این‌که کدام‌یک از نمودارها برای تحلیل مناسب‌ترند تصمیم بگیرید.

فعالیت

کارخانه نساجی (خط تولید جدید و قدیم): در یک کارخانه پارچه‌بافی مدیریت تصمیم گرفته‌است برای افزایش تولید، خط تولید جدیدی با دستگاه‌های پیشرفته در مجاورت خط تولید قدیم، احداث کند. خط تولید قدیم هر ساعت ۲۵۰ متر پارچه تولید می‌کند و خط تولید جدید قادر است ساعتی ۴۰۰ متر پارچه تولید کند. به‌علت برخی مشکلات مربوط به رفت و آمد کارگران، مدیریت تصمیم دارد که خط تولید قدیم از ساعت ۶ و خط تولید جدید از ساعت ۸ صبح شروع به‌کار کند. می‌خواهیم چگونگی تولید و افزایش تولید را بررسی کنیم :

۱ــ جدولی تنظیم کنید که در آن تولید پارچه در هر دو خط تولید در پایان هر ساعت کار مشخص شود.

۲ــ ثابت‌ها و متغیرها را نام ببرید.

۳ــ الف ــ چگونه می‌توان مقدار تولید پارچه برای خط تولید قدیم را از روی ساعات کار آن تعیین کرد؟

ب ــ چگونه می‌توان مقدار تولید پارچه برای خط تولید جدید از روی ساعات کار آن تعیین کرد؟

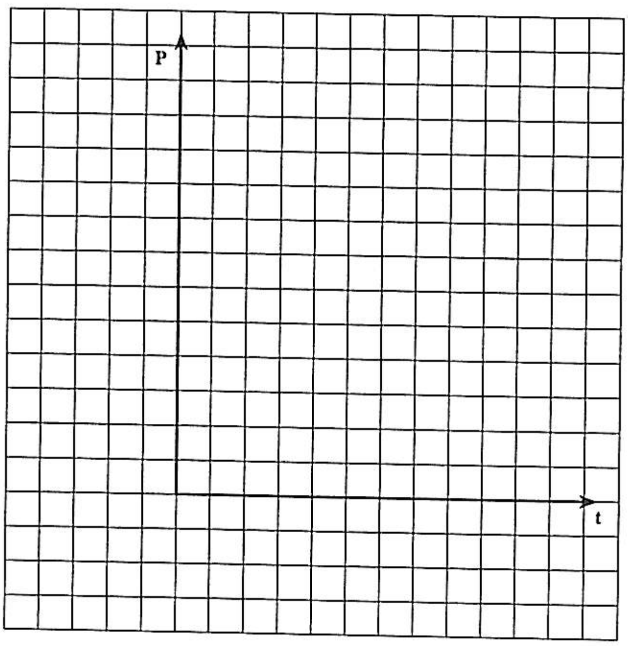
پ ــ زمان را با نماد t و تولید پارچه را با نماد p نمایش دهید و معادله‌ای بنویسید که تولید پارچه برای خط تولید قدیم را نسبت به زمان مشخص کند.

ت ــ معادله‌ای بنویسید که مقدار تولید پارچه را برای خط تولید جدید نسبت به زمان مشخص کند.

۴ــ پیش‌بینی کنید در چه ساعتی از روز دو خط تولید دقیقاً به‌اندازه هم پارچه تولید کرده‌اند؟

۵ــ به کمک جدول، زوج‌های (تولید، سرعت) مربوط به خط تولید جدید و قدیم را جداگانه روی دستگاه مختصات زیر رسم کنید، سپس خطوط گذر از آنها را رسم کنید.

۶ــ به‌وسیله این نمودار سؤال ۴ را دوباره پاسخ دهید.



۷ــ نمودار بالا را با نمودار مربوط به فعّالیّت ــ استادکار و شاگرد مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ توجه کنید که در قسمت اوّل، موضوع مورد بررسی درآمد برحسب تومان بود ولی در این‌جا هدف بررسی تولید پارچهٔ دو خط تولید قدیم و جدید، برحسب‌متر است.

۵ـ۲ـ ماشین ورودی خروجی و ارائه فرمول جبری

اکنون در شرایطی هستیم تا به یکی از مهم‌ترین مفاهیم و کاراترین ابزارهای ریاضی که درصورت‌بندی ریاضی نظم عالم نقش منحصر به فردی ایفا می‌کند، بپردازیم و با مجهز شدن به آن ادامه راه ـ بررسی و حل مسائل واقعی ـ را آسان‌تر کرده، هنرنمایی ریاضیات را به تماشا بنشینیم. پیش از انجام این کار شایسته است دوباره مروری بر فعالیت‌های قبلی داشته باشیم.

در فعالیت (استادکار و شاگرد) به سؤالات مهمی پاسخ دادیم. ازجمله، تشخیص کمیتهای متغیر و وابستگی این کمیتها به یک‌دیگر و نهایتاً یافتن قانونی که وابستگی کمیتهای متغیر را بیان می‌کرد. دیدیم که درآمد استادکار و شاگرد به مدت زمان انجام کار آن‌ها وابسته بود و با دانستن زمان کار آنها توانستیم درآمد هریک را پیش‌بینی و محاسبه کنیم.

در فعالیت (مسابقه دو) نیز مشاهده کردیم که دو کمیت زمان و فاصله از مبدأ مسابقه، متغیر بودند و مسافت طی شده وابسته به زمان دویدن بود. به علاوه با دانستن زمان می‌توانستیم فاصله از مبدأ را محاسبه کرده و نهایتاً برنده را مشخص نماییم.

در فعالیت (مسئله عرضه و تقاضا) نیز با توجه به نمودار مشاهده شد که عرضه کالا وابسته به قیمت آن است و تغییرات قیمت، مقدار عرضه کالا را تغییر می‌دهد. مشابهاً تقاضا نیز از قیمت کالا تبعیت می‌کرد و در آخرین مراحل که معادلات مربوط به مسائل را به‌دست می‌آوردیم، وابستگی بین متغیرها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار بود.

فعالیت

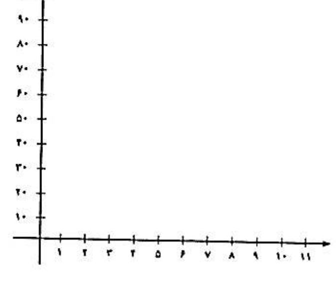
۱ـ ماشین‌حساب خود را روشن کنید و اعداد ۱ تا ۲۰ را به‌ترتیب وارد کنید و پس از هر عدد دکمه «توان ۲» (x^2 یا Square) را فشار دهند و خروجی را در مجموعه دیگری ثبت کنید.

۲ـ مساحت مربع و طول ضلع آن در جدول زیر درج شده است جدول را کامل کنید.

ورودی x	...	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	طول ضلع مربع
خروجی x^2	...	۱۶۹	۱۴۴	۱۲۱	۱۰۰	۸۱	۶۴	۴۹	۳۶	۲۵	۱۶	۹	۴	۱	مساحت مربع

ملاحظه می‌کنید وقتی ضلع مربع تغییر می‌کند، مساحت نیز تغییر می‌کند. اگر هوشیارانه به این دو مثال نگاه کنیم درمی‌یابیم که این دو مسئله یکی هستند. گویی ماشین‌حساب طول ضلع مربعها را می‌گیرد و روی آن عملی (اعمالی) انجام می‌دهد و سپس مساحت مربع را به‌عنوان خروجی نمایش می‌دهد و برای هر ورودی دقیقاً یک خروجی می‌دهد. به‌عبارت دیگر براساس اطلاعاتی (طول ضلع مربع) که به او داده می‌شود اطلاعات جدیدی (مساحت مربعها) را نمایش می‌دهد. به‌علاوه وابستگی مساحت به طول ضلع را نیز نشان می‌دهد.

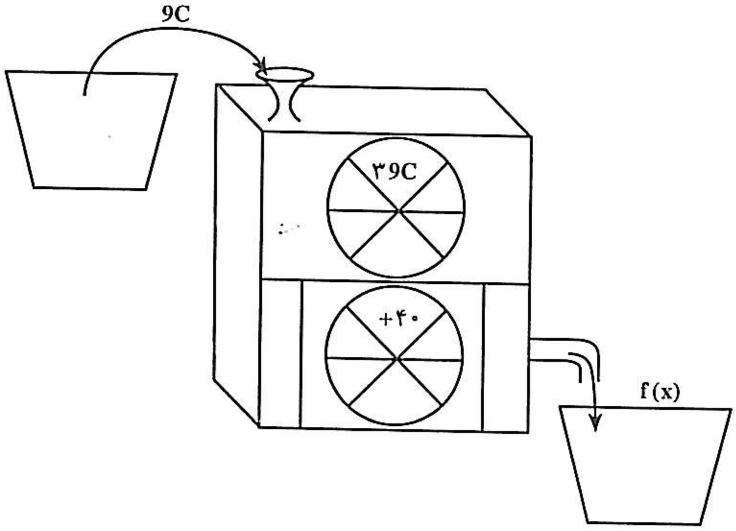
نمودار این نقاط را رسم کنید.



۳ـ ماشین‌حساب خود را روشن کنید و برای مضارب ۱۰ از ۱۰۰ تا ۴۰۰ دکمه sqr را فشار دهید و ریشه دوّم این اعداد را محاسبه کنید. سپس ورودی و خروجیها را در یک نمودار نمایش دهید.

فعالیت

ماشین f چنین کار می‌کند که هر مقدار ورودی x را گرفته سه‌برابر می‌کند و سپس با ۴۰ جمع می‌کند.



۱ــ اعداد ۱ تا ۲۵ را به ماشین f بدهید و خروجیها را گرفته جدول زیر را کامل کنید.

x	۲۵،۲۴،۲۳،۲۲،۲۱،۲۰،۱۹،۱۸،۱۷،۱۶،۱۵،۱۴،۱۳،۱۲،۱۱،۱۰،۹،۸، ۷،۶،۵،۴،۳،۲	ورودی
f(x)		خروجی

۲ــ این اعداد را قبلاً در جدولی به‌دست آورده بودید! کجا؟

۳ــ آیا یک ورودی وجود دارد که ماشین f دو خروجی برای آن داشته باشد؟

۴ــ خروجیهایی که ماشین f دارد دقیقاً وابسته به ورودیهاست. قانون ماشین f را بنویسید.

۵ــ آیا درست است که بگوییم ماشین f یک تناظر بین ورودیها و خروجیها ایجاد کرده است؟

۶ــ نمودار ماشین f را که همان نمودار مربوط به اعداد جدول است رسم کنید.

پس از درک شهودی که از مثالهای پیش در مورد مفهوم تابع به‌دست آورده‌ایم آن را به‌طور رسمی و دقیق تعریف می‌کنیم.

تابع، قانونی (ماشینی) است که به هر عضو از مجموعه ورودی‌ها دقیقاً یک عضو به‌عنوان خروجی نسبت می‌دهد، مجموعه ورودیها را «دامنه تابع» و مجموعه خروجیها را «بُرد تابع» می‌نامند.

در این‌جا لازم است یادآوری کنیم که مفهوم تابع حاوی سه دیدگاه مهم می‌باشد :

۱ــ تابع براساس اطلاعات داده شده (مجموعه ورودیها) اطلاعات جدیدی تولید می‌کند و توانایی پیش‌بینی و محاسبه را ایجاد می‌کند.

۲ــ تابع چگونگی وابستگی متغیرها در یک پدیده را مشخص می‌کند.

۳ــ تابع بین مجموعه‌هایی که حتی هیچ‌گونه سنختیی با هم ندارند، می‌تواند تناظر ایجاد کند.

ارائه فرمول جبری برای توابع

جدول زیر بیش‌ترین دما را در روزهای اردیبهشت ماه مشخص کرده است.

روزهای اردیبهشت	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
بیش‌ترین درجه حرارت	۲۵	۳۰	۲۷	۲۶	۱۹	۱۷	۱۵	۱۸	۲۵	۲۷	۲۴	۲۳	۲۰

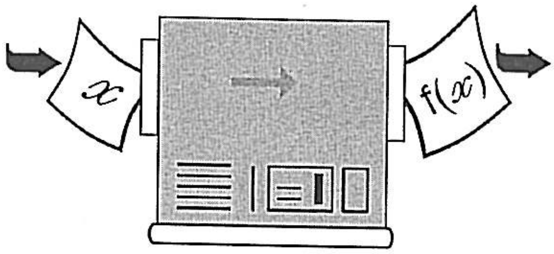
در این‌جا تابع به هر روز یک عدد را که نشان دهندهٔ بیش‌ترین درجهٔ حرارت در آن روز بوده است نسبت می‌دهد. آیا می‌توانید فرمولی ارائه کنید که بتوان درجه حرارت را در روزهای مختلف محاسبه کرد؟

درجه حرارت چند روز مختلف را به‌وسیله دماسنج اندازه‌گیری کنید. مشاهده خواهید کرد که نمی‌توان فرمولی ساده برای آن ارائه کرد. بنابراین تابعی در دست داریم که فرمولی برای آن موجود نیست. ولی قبول دارید که می‌توان دستگاهی ساخت (البته وجود دارد) که بیش‌ترین درجهٔ حرارت در روز را ثبت کند. نتیجه‌ای که از این مثال به‌دست می‌آید این که : یک تابع با ضابطهٔ تابع متفاوت است! و همه توابع دارای فرمول مشخصی نمی‌باشند.

اگرچه مفهوم تابع را تا این‌جا بررسی و معرفی کردیم ولی برای به‌کارگیری آن در مدل‌سازی مسائل واقعی و پدیده‌های فیزیکی و داشتن قدرت مانور کافی به‌وسیله تابع در محیط ریاضی نیازمند استفاده از نمادهای صوری می‌باشیم. لذا در این‌جا نمادگذاری‌ها و قراردادهایمان را کاملاً مشخص می‌کنیم و تعریف تابع را به‌وسیله آن‌ها بیان می‌کنیم.

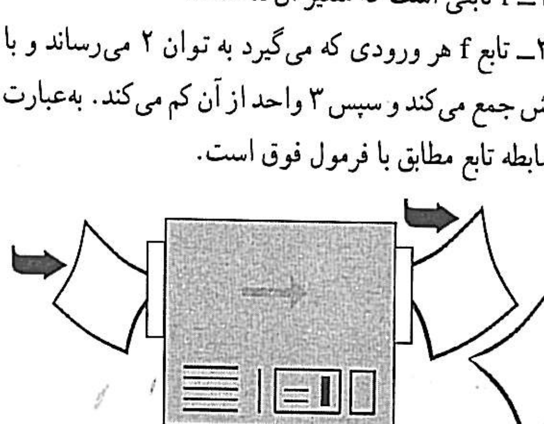
مشاهده کردیم که یک تابع شامل دو مجموعه ورودیها و خروجیها و یک قانون می‌باشد.

هرگاه می‌نویسیم $f(x) = x^۲ + ۲x - ۳$ منظورمان این است که :



۱ــ f تابعی است که متغیر آن x است.

۲ــ تابع f هر ورودی که می‌گیرد به توان ۲ می‌رساند و با دو برابرش جمع می‌کند و سپس ۳ واحد از آن کم می‌کند. به‌عبارت دیگر ضابطه تابع مطابق با فرمول فوق است.



بنابراین با توجّه به تعریف تابع هرگاه به ازای یک ورودی دو یا بیشتر خروجی به‌دست آید. تابع بودن نقض می‌شود.

یادآوری می‌کنیم که تابعها با سه روش نمودارها، فرمولها و جدولها نمایش داده می‌شوند در قسمتهای مختلف این هر سه روش به‌کار برده شده است.

برای آن‌که بتوانیم فرمولی برای یک ماشین ورودی‌ــخروجی که می‌دانیم درون آن چه اتفاقی می‌افتد، ارائه کنیم باید بتوانیم زبان روزمره را به زبان ریاضی ترجمه کنیم.

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید.

زبان روزمره	زبان ریاضی
یک عدد	x
سه برابر یک عدد	۳x
هفت واحد کم‌تر از یک عدد	x − ۷
دو واحد بیش‌تر از سه برابر یک عدد	...

زبان روزمره	زبان ریاضی
شش واحد کم‌تر از دو برابر یک عدد	...
سه برابر یک عدد به علاوهٔ دو برابر همان عدد	...
چهار برابر عدد منهای همان عدد	...

خود را بیازماییم

عددی را در ذهن خود درنظر بگیرید ۵ واحد به آن اضافه کنید ؛ حاصل را دو برابر کنید ؛ سپس از واحد آن عدد کم کنید ؛ بعد حاصل را تقسیم‌بر ۲ نمایید. همان عدد اولیه بدست خواهد آمد. می‌توانید بگویید چرا؟

خود را بیازماییم

یک ماشین ورودی ـ خروجی طراحی نمایید و برای چند ورودی، خروجی مربوط به آنها را بدست آورید. آیا می‌توان یک ماشین ورودی ـ خروجی برای ماشین شما طراحی کرد که این خروجی‌ها را به‌عنوان ورودی بگیرد و خروجی آن همان ورودیهای اولیه باشد؟

فعالیت

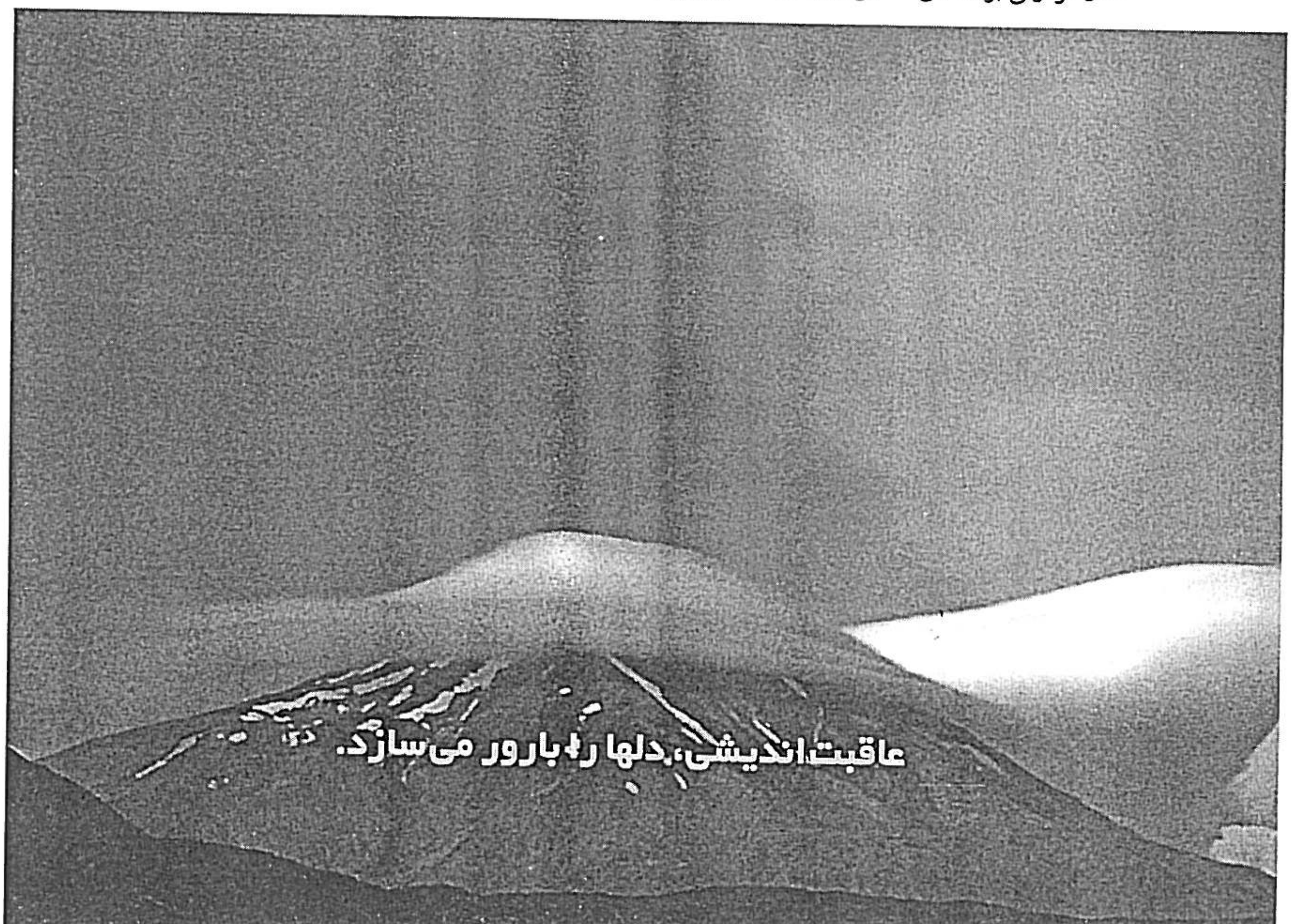
اگر یک ماشین‌ورودی ـ خروجی داده شده باشد، بعضی اوقات با داشتن یک خروجی می‌توان تمام عملیاتی که روی یک ورودی انجام شده را به‌طور معکوس انجام داد تا به ورودی مربوط به آن خروجی رسید.

آن را بر سه تقسیم نمایید	۵	۵	عددی را درنظر بگیرید x
شش واحد از آن کم کنید	۱۵	۱۵	آن را سه برابر کنید $3x$
حاصل را در ۳ ضرب کنید	۲۱	۲۱	شش واحد به‌حاصل اضافه کنید $3x+6$
سه واحد به آن اضافه کنید	۷	۷	حاصل را بر ۳ تقسیم کنید $x+2$
	۴	۴	سه واحد از آن کم‌کنید $x-1$

در ماشین ورودی ـ خروجی بالا اگر خروجیهای زیر داده شده باشد ورودیهایی پیدا کنید که این خروجیها را تولید نمایند.

۱) ۵ ۲) ۰/۵ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) π

حال فرمولی برای این ماشین ورودی ـ خروجی پیدا کنید.



ارائه فرمول برای پدیده‌ها

برای پیشگویی پدیده‌ها می‌توان سعی کرد فرمولی تقریبی برای آنها پیدا کرد. مثلاً وقتی تقریب خطی تغییرات یک پدیده را درنظر می‌گیریم، آن پدیده را با فرمولی به شکل $ax + b$ تقریب می‌زنیم. اگر رفتار پدیده‌ای پیچیده‌تر از این باشد، تقریب خطی پیشگویی مناسبی را بدست نمی‌دهد. پس باید سعی کنیم فرمول تقریبی بهتری برای این پدیده پیدا کنیم.

خود را بیازماییم

اگر هر زوج خرگوشی تنها ۲ سال عمر داشته باشد و پس از یک‌سالگی هر سال یک زوج خرگوش از این زوج متولد شوند پس از ده سال چند زوج خرگوش خواهیم داشت؟

خود را بیازماییم

اگر هر سلول پس از یک ثانیه به دو سلول تقسیم شود و غذای کافی برای سلولها وجود داشته باشد، از یک سلول پس از یک دقیقه چند سلول تولید خواهد شد؟

فعالیت

در یک کتاب فروشی تازه تأسیس، صاحب کتابخانه روز اوّل هر ماه تعداد مشتریان را می‌شمارد تا پیش‌بینی کند که محل کار او برای کتاب فروشی مناسب است یا خیر

روز اول ماه	فروردین	اردیبهشت	خرداد	تیر	مرداد
تعداد مراجعین	۱۹	۲۴	۲۹	۳۵	۴۳

سعی کنید مدلی برای رشد تعداد مراجعین به کتابفروشی ارائه کنید.

ثریّا، سهیلا و فریبا همیشه با هم روی مسائل فکر می‌کردند و سعی می‌کردند برای هر مسئله چندین راه حل ارائه کنند تا آن را بهتر بفهمند.

ثریّا : من خیلی به کتاب علاقه دارم. همین که می‌بینم تعداد مشتریها همین‌طور زیاد می‌شود از ته دل لذت می‌برم. هرچند معلوم نیست این عددها واقعی باشند. برای این که رشد تعداد مشتریان را محاسبه کنیم باید دنباله‌ای از اعداد را درست کنم که هر عضو آن برابر تفاضل مشتریان این ماه و ماه قبل است. این‌طور که

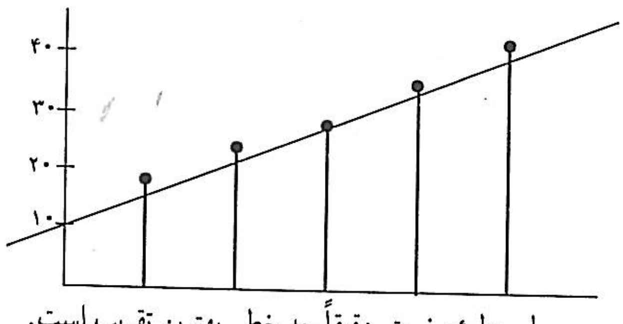
$$c_۱ = ۲۴ - ۱۹ = ۵$$

$$c_۲ = ۲۹ - ۲۴ = ۵$$

$$c_۳ = ۳۵ - ۲۹ = ۶$$

$$c_۴ = ۴۳ - ۳۵ = ۸$$

اگر بخواهم بهترین تقریب خطی برای رشد تعداد مشتریان پیدا کنم هم می‌توانم به‌طور تقریبی رشد ماهانه را میانگین ۵ و ۵ و ۶ و ۸ بگیریم که می‌شود ۶ که البته این بهترین تقریب خطی نیست چون فرض می‌کنیم از ۱۹ تا ۴۳ رشد کاملاً خطی داشته‌ایم که فرض درستی نیست. هم می‌توانیم نموداری رسم کنیم و نمودار حاصل را با یک خط تقریب بزنیم که تقریب خطی بهتری است.



ولی مطمئن نیستم دقیقاً چه خطی بهترین تقریب است.

سهیلا : این روش را نمی‌پسندم چون حتی همین تفاضل‌ها هم رشد دارند.

یعنی $c_۱ = ۵$ تا $c_۲ = ۵$ و از $c_۲ = ۵$ تا $c_۳ = ۶$ و از $c_۳ = ۶$ تا $c_۴ = ۸$

همین‌طور فاصله‌ها زیاد می‌شود. خود همین دنباله تفاضلها را می‌توان با یک خط تقریب زد برای این کار رشد دنباله جدید را باید تقریب بزنیم. پس دنباله تفاضلهای جدید را حساب می‌کنیم.

$$d_۱ = c_۲ - c_۱ = ۵ - ۵ = ۰$$

$$d_۲ = c_۳ - c_۲ = ۶ - ۵ = ۱$$

$$d_۳ = c_۴ - c_۳ = ۸ - ۶ = ۲$$

می‌توان گفت به‌طور میانگین رشد برابر $۱ = \frac{۰+۱+۲}{۳}$ است. پس

$$c_۲ - c_۱ \sim ۱$$
$$c_۳ - c_۲ \sim ۱$$
$$c_۴ - c_۳ \sim ۱$$

می‌توانیم بنویسیم

$$c_۲ \sim c_۱ + ۱$$
$$c_۳ \sim c_۲ + ۱ \sim c_۱ + ۲$$
$$c_۴ \sim c_۳ + ۱ \sim c_۱ + ۳$$

پس پیشگویی می‌کنیم $c_n \sim c_۱ + n - ۱$ یعنی در ماه n−ام رشد تعداد مشتریان تقریباً برابر $c_۱ + n - ۱ = ۵ + n - ۱$ باشد. این‌طور می‌توان تعداد مشتریان در اوّل ماه nام بعد از افتتاح را تقریب زد.

فریبا : هنوز فرمولی برای تعداد مشتریان پیدا نکردی.

ثریا : من می‌توانم این کار را بکنم. فرض کنید می‌خواهیم تعداد مشتریان در اسفند ماه را حساب کنیم. داریم

$c_{۱۱} =$ تعداد مشتریان در بهمن ماه ـ تعداد مشتریان در اسفند ماه

$c_{۱۰} =$ تعداد مشتریان در دی ماه ـ تعداد مشتریان در بهمن‌ماه

$c_۱ =$ تعداد مشتریان در فروردین ماه ـ تعداد مشتریان در اردیبهشت

با جمع کردن دو طرف داریم

$c_{۱۱} + c_{۱۰} + \dots + c_۱ =$ تعداد مشتریان در فروردین ماه ـ تعداد مشتریان در اسفند ماه

اما می‌دانیم $c_n \sim c_۱ + n - ۱$

تعداد مشتریان در اسفند ماه ـ ۱۹ $\sim (c_۱ + ۱۱ - ۱) + (c_۱ + ۱۰ - ۱) + \dots + (c_۱ + ۲ - ۱) + (c_۱ + ۱ - ۱)$

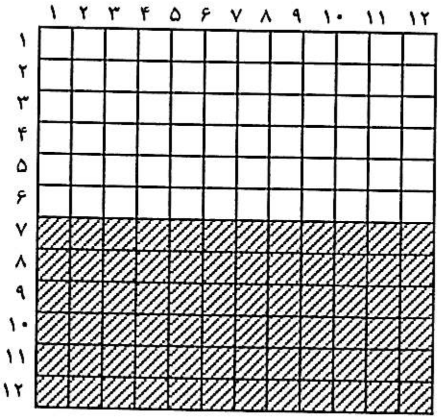
تعداد مشتریان در اسفند ماه ـ ۱۹ $\sim ۱۲c_۱ - ۱۲ + (۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۱۱)$

همین کار را اگر برای ماه n−ام انجام دهیم داریم

تعداد مشتریان در روز اوّل ماه n−ام ـ ۱۹ $\sim nc_۱ - n + (۱ + ۲ + \dots + (n-۱))$

کافی است برای $۱ + ۲ + \dots + (n-۱)$ فرمولی پیدا کنیم.

سهیلا : این را من بلدم. اگر مستطیلی $(n-۱) \times n$ را شطرنجی کنیم و نصفی از آن را این‌طوری رنگ بزنیم.



می‌بینیم که $۱ + ۲ + \dots + (n-۱) = \frac{(n-۱)n}{۲}$

پس داریم تعداد مشتریان در روز اوّل ماه n−ام $\sim ۱۹ + ۴n + \frac{(n-۱)n}{۲}$

$$= ۱۹ + ۴n + \frac{n^۲ - n}{۲}$$
$$= \frac{۱}{۲}n^۲ + \frac{۷}{۲}n + ۱۹$$

فریبا : خیلی دوست دارم ببینم این فرمول شما چه‌قدر به واقعیت نزدیک است :

تعداد مشتریان در فروردین ماه $\sim \frac{۱}{۲}(۱)^۲ + \frac{۷}{۲}(۱) + ۱۹ = ۲۲$

تعداد مشتریان در اردیبهشت ماه $\sim \frac{۱}{۲}(۲)^۲ + \frac{۷}{۲}(۲) + ۱۹ = ۲۸$

تعداد مشتریان در خرداد ماه $\sim \frac{۱}{۲}(۳^۲) + \frac{۷}{۲}(۳) + ۱۹ = ۳۴$

تعداد مشتریان در تیر ماه $\sim \frac{۱}{۲}(۴^۲) + \frac{۷}{۲}(۴) + ۱۹ = ۴۱$

تعداد مشتریان در مرداد ماه $\sim \frac{۱}{۲}(۵^۲) + \frac{۷}{۲}(۵) + ۱۹ = ۴۹$

من خیلی راضی نیستم. به‌نظر من این اعداد خیلی هم به آن‌چه می‌خواستیم نزدیک نیستند.

۵ــ۳ــ مهارتهای رسم و تحلیل نمودارهای درجه دوم

فعالیت

مقدار تابع $y = ax^2$ را برای مقادیر زیر از a رسم نمایید.

$$1 \ , \ 2 \ , \ 3 \ , \ \frac{1}{2} \ , \ -\frac{1}{2} \ , \ -1 \ , \ -2$$

۱ــ هرچه a کوچک‌تر شود نمودار $y = ax^2$ به چه شکلی نزدیک می‌شود؟

۲ــ هرچه a بزرگ‌تر شود نمودار $y = ax^2$ به چه شکلی نزدیک می‌شود؟

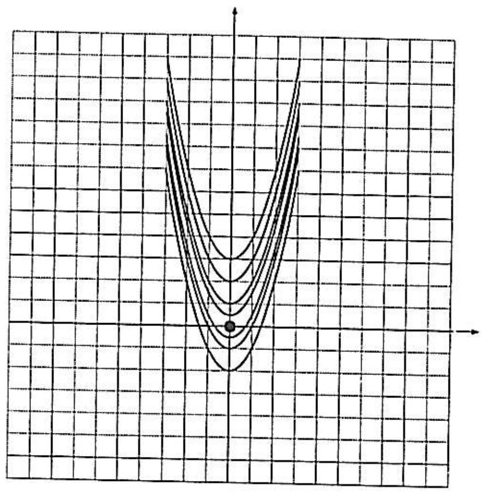
۳ــ نمودارهای $y = ax^2$ و $y = bx^2$ برای $a \neq b$ درچه نقاطی اشتراک دارند؟

جواد و حمید نمودار معادله‌درجه دوم را درست‌درک نمی‌کردند. به‌حال همهٔ شکلهایی که‌می‌شناختند باخواص‌هندسی دقیقی تعریف می‌شد. اما در مورد نمودار $y = x^2$ وضع طور دیگری بود.

$y = x^2$

$y = 2x^2$

$y = 3x^2$

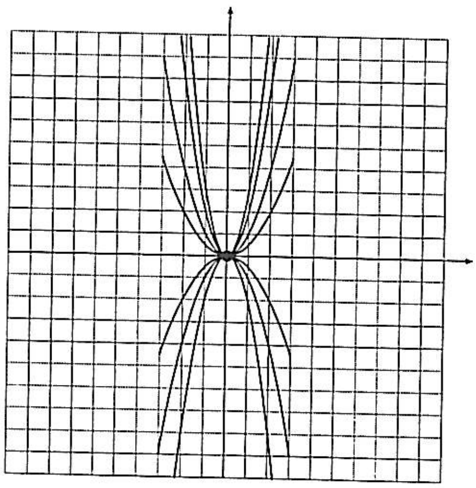


$y = \frac{1}{2}x^2$

$y = -\frac{1}{2}x^2$

$y = -x^2$

$y^2 = -2x^2$



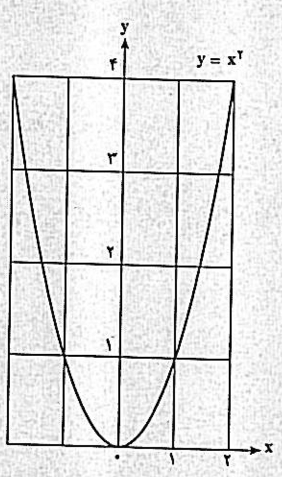
جواد : رسم همه نمودارهای $y = ax^2$ که در فعالیت آمده است الگویی کلی در ذهن من به‌وجود می‌آورد. احساس می‌کنم همهٔ این نمودارها بیش از اندازه شبیه $y = x^2$ هستند. یعنی فکر می‌کنم باید بتوان همهٔ آنها را از $y = x^2$ به‌دست آورد.

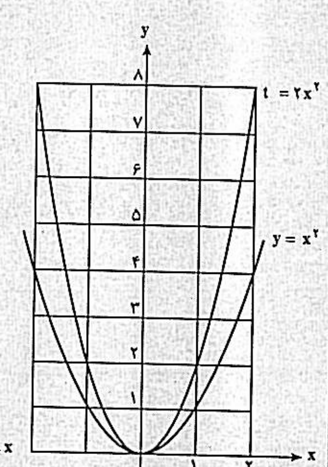
حمید : همین نکته توجه مرا هم به‌خود جلب کرد. مثلاً $y = 2x^2$ همان $y = x^2$ است ؛ فقط کمی به سمت بالا کشیده شده است. یا $y = \frac{1}{2}x^2$ همان $y = x^2$ است. فقط کمی نشست کرده است. من هم فکر می کنم باید ارتباط ریاضی دقیقی بین آن‌ها برقرار باشد.

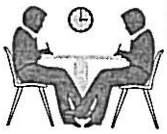
جواد : یک نکته جالب دیگر هم به فکرم رسید. اگر در معادلهٔ $y = 2x^2$ بنویسیم $\frac{y}{2} = x^2$ و $\frac{y}{2} = Y$ قرار دهیم همان معادلهٔ $Y = 2x^2$ به‌دست می آید و یا اگر در معادلهٔ $y = \frac{1}{2}x^2$ بنویسیم $2y = x^2$ و قرار دهیم $2y = Y$ معادلهٔ $Y = x^2$ ساخته می‌شود.

خود را بیازماییم

در هر کدام از دستگاه‌های مختصات زیر نمودار مربوطه را رسم شده است. از مقایسهٔ نمودارها چه نتیجه می گیرید؟







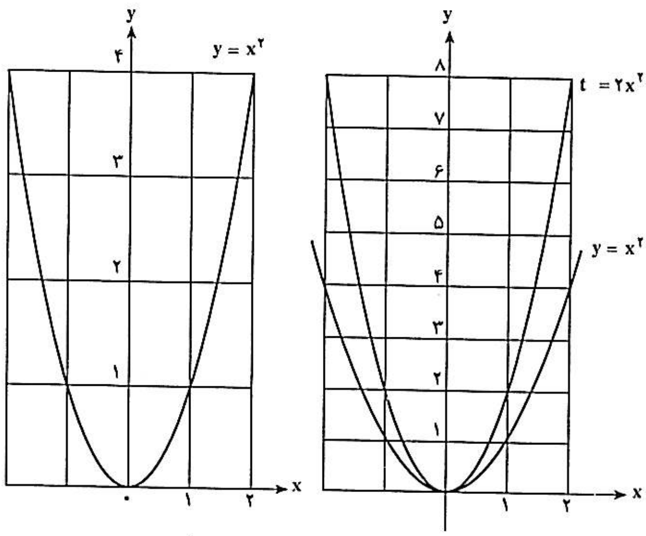
فعالیت

نمودار تابع $y = x^۲ + a$ را برای مقادیر زیر از a رسم نمایید.

$$۱ \,,\, ۲ \,,\, ۳ \,,\, \frac{۱}{۲} \,,\, -\frac{۱}{۲} \,,\, -۱ \,,\, -۲$$

نمودارهای $y = x^۲ + a$ و $y = x^۲ + b$ برای $a \neq b$ در چه نقاطی اشتراک دارند؟

فاطمه و معصومه انتظار داشتند مانند فعالیت قبل شکلی شبیه نمودار $y = x^۲$ بدست بیاورند، ولی به محض این که نمودارها را رسم کردند متوجه شدند که نمودار $y = x^۲ + a$ دقیقاً مساوی نمودار $y = x^۲$ است و فقط کمی جابه‌جا شده است.



$y = x^۲ + ۱ \quad y = x^۲ + ۲ \quad y = x^۲ + ۳$

$y = x^۲ + \frac{۱}{۲} \quad y = x^۲ - ۱ \quad y = x^۲ - ۲$

فاطمه : به‌نظر می‌رسد نمودار $y = x^۲ + ۱$ دقیقاً به اندازه ۱ واحد از نمودار $y = x^۲$ بالاتر رفته است و نمودار $y = x^۲ + ۲$ دقیقاً به اندازه ۲ واحد و همین‌طور برابر هر مقدار دیگر a . برای من جالب است که این نمودارها همدیگر را قطع نمی‌کنند!

معصومه : فرض کنیم $y = x^۲ + ۱$ و $y = x^۲ + ۲$ همدیگر را قطع کنند. مثلاً در نقطه‌ای مثل $(x_۰, y_۰)$. در این‌صورت این نقطه روی هر دو نمودار قرار دارد.

$$\begin{cases} y_۰ = x_۰^۲ + ۲ \\ y_۰ = x_۰^۲ + ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_۰ - x_۰^۲ = ۲ \\ y_۰ - x_۰^۲ = ۱ \end{cases} \Rightarrow ۱ = ۲$$

اما این یک تناقض است. پس فرض اوّلیه مااشتباه بوده و $y = x^۲ + ۱$ و $y = x^۲ + ۲$ نمی‌توانسته‌اند همدیگر را قطع کنند.

خود را بیازماییم

نمودار توابع زیر را رسم نمایید.

۱) $y = x^۲ + x_۰$ ۲) $y = x^۲ - x$

۳) $y = x^۲ + x + ۱$ ۴) $y = x^۲ + ۲x + ۱$

خود را بیازماییم

نمودار $y=x^2$ داده شده است. نمودار معادلهٔ $y=a(x-p)^2+q$ را در هریک از حالتهای زیر به‌دست آورید.

$$\begin{cases}a=2\\p=1\\q=1\end{cases}\qquad\begin{cases}a=2\\p=1\\q=0\end{cases}\qquad\begin{cases}a=1\\p=0\\q=1\end{cases}$$

خود را بیازماییم

با مربع‌سازی هریک از معادلات زیر را به شکل $y=a(x-p)^2+q$ درآورید و سپس نمودار آن را از روی $y=x^2$ به‌دست آورید.

۱) $y=\frac{1}{2}x^2+2x+3$ ۲) $y=\frac{1}{2}x^2-2x-1$

۳) $y=-x^2+x+1$ ۴) $y=-x(x-1)$

فعالیت

معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ را به شکل $y=a(x-p)^2+q$ درآورید. سپس مختصات نقطه قلّه (یا درّه) نمودار $y=ax^2+bx+c$ را برحسب a ، b و c بنویسید.

بصیر و نصیر همیشه با مسئله‌های خیلی کلّی مشکل داشتند. آنها همیشه سعی می‌کردند مسائل را در حالتهای خاص حل کنند و بعد اگر می‌توانستند راه حل خود را به صورت کلی‌تری تعمیم می‌دادند.

بصیر: بیا اوّل به یک حالت خاص فکر کنیم. مثلاً فرض کنیم $a=b=c=1$

نصیر: معادله به شکل $y=x^2+x+1$ درمی‌آید. حال می‌توانیم طرف راست را مربع کامل کنیم.

$$y=x^2+x+1=x^2+2(\frac{1}{2}x)+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1$$

$$=(x+\frac{1}{2})^2+1-\frac{1}{4}=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$$

بصیر: این نمودار همان چیزی است که ما می شناسیم و می‌توانیم آن را از روی نمودار $y=x^2$ با انتقال به‌دست آوریم. آنچه نمی‌دانیم این است که این انتقال مبدأ مختصات را به چه نقطه‌ای می‌برد!

نصیر: اگر $y=x^2$ را به شکل $f(x,y)=y-x^2=0$ بنویسیم، معادلهٔ بالا به شکل $f(x+\frac{1}{2}\ ,\ y-\frac{3}{4})=0$ خواهد بود.

پس سؤال کلی این است که نمودار $f(x,y)=0$ با چه انتقالی به نمودار $f(x-a,x-b)=0$ تبدیل می‌شود. اگر پاسخ این سؤال را برای $f(x,y)=y-x^2=0$ بدانیم، مبدأ مختصات را با همان انتقال جابه‌جا می‌کنیم و مختصات قلّه (یا درّه) $y=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ را به‌دست می‌آوریم.

بصیر: نمودار $f(x,y)=0$ ، با اضافه‌کردن a به طول از مبدأ نقاط آن، نمودار $f(x-a,y)=0$ را به‌دست می‌دهد. و با اضافه کردن b به عرض از مبدأ نقاط آن نمودار $f(x,y-b)=0$ را می‌دهد و با انجام هردوی این انتقال‌ها باهم نمودار $f(x-a,y-b)=0$ را می‌دهد. بنابراین در $y=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ مختصات قلّه (یا درّه) از مبدأ مختصات با انتقال به طول $-\frac{1}{2}$ و به‌عرض $\frac{3}{4}$ بدست می‌آید. پس مختصات قله $(-\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ است.

نصیر: خیلی خوب! حالا که مسئله حل شد، همین راه حل را در حالت کلی‌تر تکرار می‌کنیم.

$$y=ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})$$

$$=a(x^2+2(\frac{b}{2a}x)+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a})$$

$$=a(x+\frac{b}{2a})^2+a(\frac{c}{a}-(\frac{b}{2a})^2)$$

$$=a(x+\frac{b}{2a})^2+a(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2})$$

$$=a(x+\frac{b}{2a})^2+a(\frac{4ac-b^2}{4a^2})$$

$$=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a}$$

پس مختصات قلّه یا درّه $y = ax^2 + bx + c$ به شکل زیر است :

$$(\frac{-b}{2a} \ , \ -\frac{\Delta}{4a})$$

بصیر : دوست دارم امتحان هم بکنیم. در $(\frac{-b}{2a} \ , \ -\frac{b^2 - 4ac}{4a})$ قرارمی‌دهیم $a = b = c = 1$. نقطه $(-\frac{1}{2} \ , \ -\frac{1-4}{4} = \frac{3}{4})$ به‌دست می‌آید که همان جواب قبلی ماست که در حالت خاص داشتیم.

خود را بیازماییم

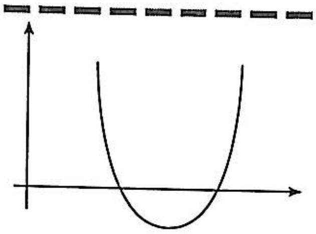
معادله محور تقارن نمودار $y = ax^2 + bx + c$ را به‌دست آورید.

فعالیت

نشان دهید ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را می‌توان با قطع کردن نمودار $y = ax^2 + bx + c$ با محور xها به‌دست آورد.

نامدار : محور x ها با معادله $y = 0$ مشخص می‌شود و مختصات تقاطع آن با نمودار $y = ax^2 + bx + c$ با معادلات زیر مشخص می‌شود.

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$$



با ساده کردن y از هر دو یک معادله درجه دوّم به‌دست می‌آید $ax^2 + bx + c = 0$ که نشان می‌دهد ریشه‌های این معادله طول از مبدأ محل تقاطع نمودار $y = ax^2 + bx + c$ با محور x هاست.

خود را بیازماییم

با استفاده از نمایش $y = ax^2 + bx + c$ به شکل $y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}$ نشان دهید اگر $\Delta > 0$ معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دقیقاً دو ریشه متمایز دارد و اگر $\Delta = 0$ معادله تنها یک ریشه دارد و اگر $\Delta < 0$ معادله ریشه حقیقی ندارد.

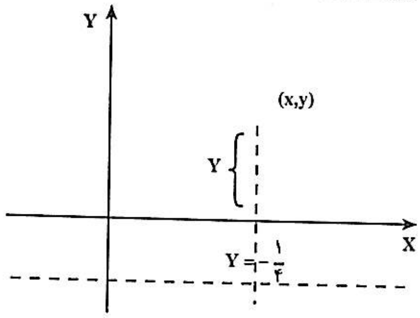
فعالیت

مکان هندسی نقاطی در صفحه را بیابید که فاصله آنها از نقطه $(0, \frac{1}{4})$ برابر فاصلهٔ آنها از خط $y = -\frac{1}{4}$ باشد.

زهرا و زکیّه نمی‌دانستند منظور از مکان هندسی چیست. معلم به ایشان توضیح داد که به مجموعه همه نقاطی که در یک خاصیت داده شده صدق می‌کنند مکان هندسی می‌گویند. مثلاً دایره مکان هندسی نقاطی است که فاصله آنها از مرکز داده شده ثابت است.

زهرا : پس ما به دنبال همه نقاط (x,y) هستیم که فاصله آنها از $(0, \frac{1}{4})$ با فاصله آنها از خط $y = -\frac{1}{4}$ برابر است.

زکیّه : باید برای هر کدام از این فاصله‌ها یک فرمول جبری پیدا کنیم و آنها را باهم برابر کنیم تا معادله مکان هندسی خواسته شده به‌دست آید.



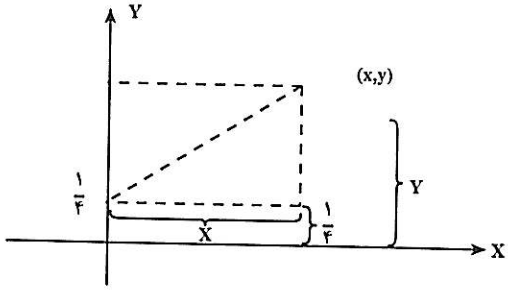
برای فاصله نقطه(x,y)از خط $y = -\frac{1}{4}$ یک فرمول داریم :

$$y = -\frac{1}{4} \text{ فاصله نقطه (x,y) تا خط } = y + \frac{1}{4}$$

اما برای فاصله نقطه (x,y) تا $(0, +\frac{1}{4})$ فرمولی بلد نیستم.

زهرا: می‌توانم یک مثلث قائم‌الزاویه بسازم که اضلاع زاویه قائم آن را بدانیم و وتر آن بر پاره‌خط واصل (x,y) و $(0,\frac{1}{4})$ تکیه داشته باشد. این‌طور می‌شود با کمک قضیه فیثاغورث فاصله این نقاط را حساب کرد.

$$x^2+(y-\frac{1}{4})^2=(\text{فاصله } (x,y) \text{ تا } (0,\frac{1}{4}))^2$$



زکیه: عالی شد. حالا فاصله‌ها را برابر قرار می‌دهم تا معادله مکان هندسی را پیدا کنم.

$$x^2+(y-\frac{1}{4})^2=(y+\frac{1}{4})^2$$

$$x^2+y^2-\frac{1}{2}y+\frac{1}{16}=y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{16}$$

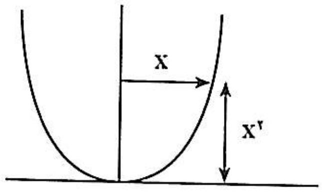
$$x^2=y$$

عجب! جواب مسئله همان نمودار $y=x^2$ است.

زهرا: پس نمودار $y=x^2$ یک مکان هندسی هم هست!

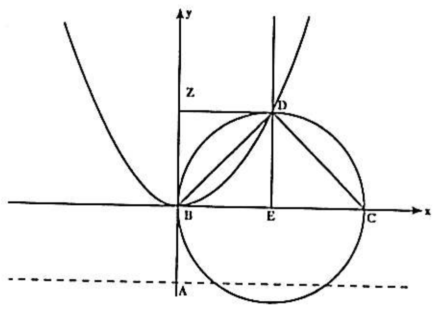
زکیّه: چرا تعجب کردی؟ از قبل هم می‌دانستیم که $y=x^2$ مکان هندسی نقاطی است که فاصله آنها از یک خط برابر مربع فاصله‌آنها از خطی‌است که از آن خط عمود بر آن اخراج‌شده است.

زهرا: راست گفتی. نمودار هر معادله‌ای خود یک مکان هندسی است.



فعالیت

نقطه A و خط l را چنان بیابید که نمودار $y=ax^2$ مکان هندسی نقاطی باشد که از نقطه A و خط l به یک فاصله‌اند. این مکان هندسی سهمی نام دارد.



خیام با کمک همین مکان هندسی که سهمی نام دارد،توانست برای اولین‌بار روشی هندسی برای حل معادلات درجه سوّم ارائه نماید. سعی کنید معادلهٔ $x^3+bx=a$ را به روش هندسی خیام حل کنید.

سهمی را چنان رسم می‌کنیم که $\overline{AB}^2=b$ و دایره‌ای را چنان رسم می‌کنیم که قطر $\overline{BC}$ در رابطه زیر صدق کند:

$$\overline{AB}^2.\overline{BC}=a$$

ادعای خیام این است که اگر D تقاطع دایره و سهمی باشد و E تصویر آن روی خط BC باشد، آن‌گاه $X=\overline{BE}$ جواب معادله بالاست.

خیام ادعای خود را چنین ثابت می‌کند.

از فعالیت بالا می‌دانیم که سهمی موردنظر با معادله $y=\frac{1}{\sqrt{b}}x^2$ مشخص می‌شود.

پس در سهمی داریم $\sqrt{b}y=x^2$

$$\overline{AB}.\overline{BZ}=\overline{DZ}^2$$

اما $\overline{DZ}=\overline{BE}$ و $\overline{ED}=\overline{ZB}$ بنابراین $\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{ED}}$

اما در دایره مثلث قائم‌الزاویه ΔBDC را داریم که در آن با استفاده از تشابه می‌توان دید

$\frac{\overline{BE}}{\overline{ED}}=\frac{\overline{ED}}{\overline{EC}}$ بنابراین $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BE}^2}=\frac{\overline{BE}}{\overline{ED}}.\frac{\overline{ED}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}$

و یا $\overline{AB}^2.\overline{EC}=\overline{BE}^3$

پس: $\overline{BE}^3+\overline{AB}^2.\overline{EB}$

$$=\overline{AB}^2.\overline{EC}+\overline{AB}^2.EB=\overline{AB}^2\overline{BC}$$

بنابراین: $\overline{BE}^3+b\overline{BE}=a$

و این همان است که می‌خواستیم.

۵ــ۴ــ مهارتهای رسم و تحلیل توابع متناوب

در این بخش به فرایند رسیدن از مسائل دنیای واقعی و پدیده‌های طبیعی به مدل ریاضی و حل و بررسی آن‌ها به‌وسیله روابط و ابزار ریاضی خواهیم پرداخت. باید توجه کنیم که با حل مسایل واقعی در محیط ریاضی کار تمام نمی‌شود و اکثر مواقع می‌بایستی نتایج به‌دست آمده در دنیای ریاضی را به دنیای واقعی بازگردانیم و سپس تفسیر نماییم، بنابراین استفاده از ریاضیات برای حل مسایل دنیای واقعی مشتمل بر سه مرحله است :

مرحلهٔ اوّل : مدل‌سازی ریاضی

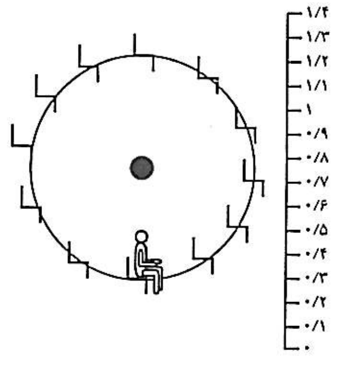
مرحلهٔ دوم : حل مسئله به‌وسیله ابزار و روابط ریاضی

مرحلهٔ سوم : تفسیر نتایج به دست آمده از محیط ریاضی

سعی می‌کنیم تا با نمونه‌های واقعی و ملموس فرایند مرحله آخر را بررسی کنیم که خواندن نمودارها و کشف اطلاعات از آن‌ها بخش مهمی از این فرایند است.

فعالیت

برای مدل‌سازی تغییرات ارتفاع یک صندلی از چرخ و فلک برحسب زمان، می‌توان از یک ماکت یا چرخ و فلک اسباب‌بازی کودکان استفاده کرد، ولی برای کلاس درس دو تکه مقوا، یکی مستطیل شکل و دیگری دیسک دایره‌ای که توسط یک پیچ یا میخ در وسط قطعه مقوای مستطیل شکل قرار گرفته است کافی‌است اطراف دیسک به فاصله‌های مساوی علامتی شبیه صندلی بکشید و پایین‌ترین صندلی را نشانه ویژه‌ای گذاشته و به ازای هر واحد زمانی به اندازه یک صندلی مقوای دایره‌ای را بچرخانید و بلندی نظیر آن را در جدول زیر یادداشت کنید.



زمان t	۰	۱	۲	
بلندی (ارتفاع) h	۲			

۱ــ اندازه‌گیری‌ها را ادامه دهید تا صندلی مخصوص دوباره در پایین‌ترین نقطه قرار گیرد. بیش‌ترین ارتفاع و کم‌ترین ارتفاع چه‌قدر است؟

۲ــ یک بار دیگر تکرار کنید و نتایج را یادداشت کنید و با نتایج به‌دست آمده قبلی مقایسه کنید چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

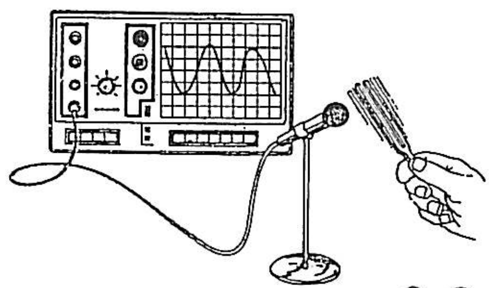
۳ــ دوبار دیگر تکرار کنید و نتایج را ثبت کنید و با آزمایشات قبلی مقایسه کنید.

۴ــ آیا به‌وسیله جدول (نه اطلاعاتی دیگر) می‌توانید مدل مربوط را با ضابطه‌اش مشخص کنید؟

۵ــ مقادیر جدول را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و سپس به‌وسیله منحنی هموار آن‌ها را به‌هم وصل کنید، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۶ــ اگر دقت خوبی در اندازه‌گیری‌های خود داشته باشید به تکرار مقادیر در جدول پی‌برده‌اید، آیا نمودار فوق نیز تکرار شده است؟ فکر می‌کنید چند بار تکرار شده است؟ آیا می‌توانید فرمولی برای نمودار فوق ارائه دهید؟

اگر دیاپازنی را جلوی میکروفون متصل به دستگاه نوسان‌نگار (اسیلوسکوپ) به ارتعاش درآورید، امواج صوتی که توسط دیاپازن تولید می شود توسط دستگاه گرفته می شود و نوسان نگار منحنی زیبا و جالبی را نشان می‌دهد.

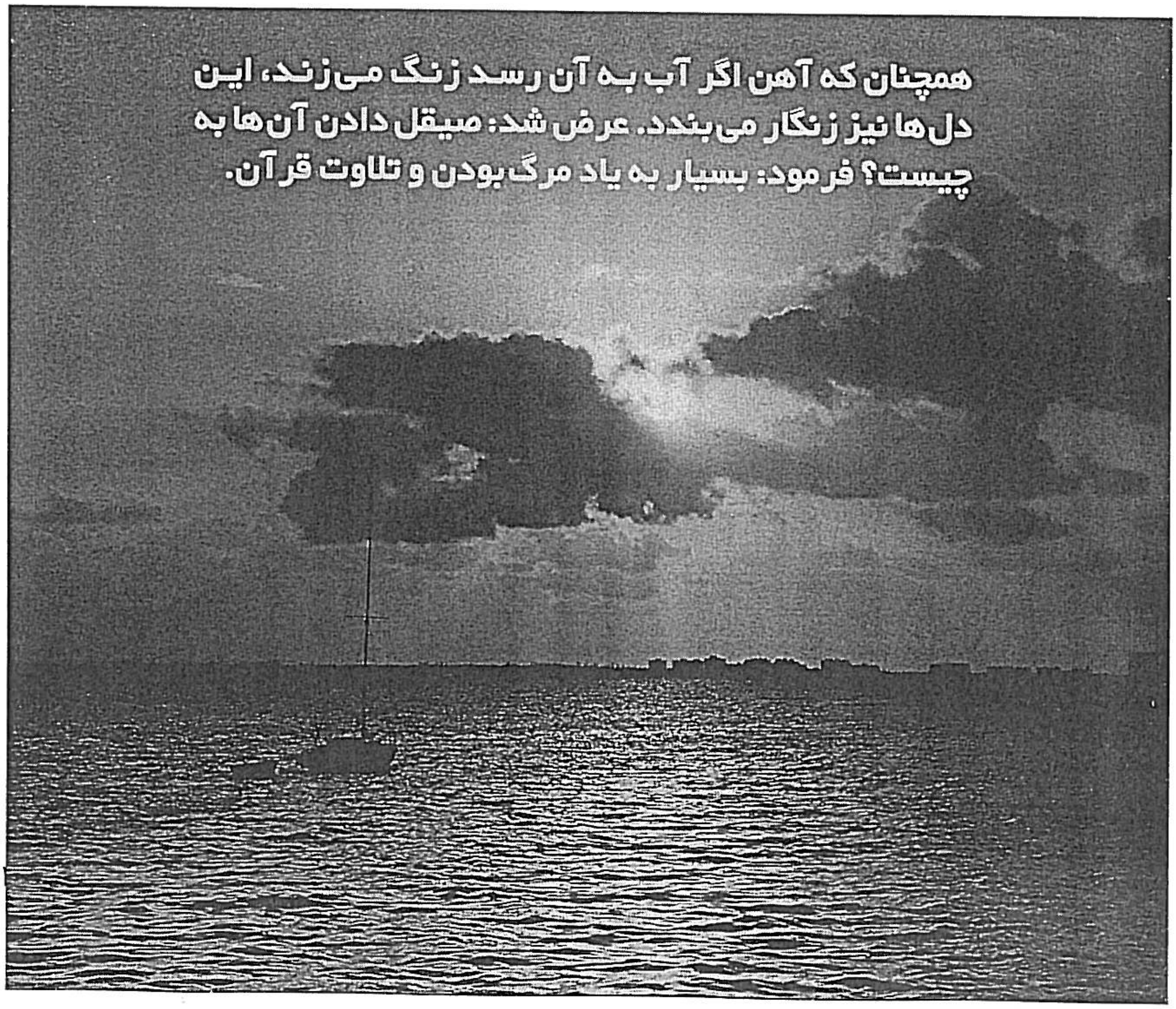


ریاضی‌دان فرانسوی ژوزف فوریه که در زمان ناپلئون می‌زیست، مشاهده کرده بود که امواج صوتی که به‌طور مشابه با خودشان تکرار می‌شوند متناظر با یک منحنی می‌شوند که به آن منحنی سینوسی می گویند.

توجه دارید که دستگاه نوسان‌نگار یک پدیده واقعی (امواج صوتی) را دریافت می‌کند و نمودداری براساس آن نمایش می‌دهد که دارای ویژگی خاصی می‌باشد.

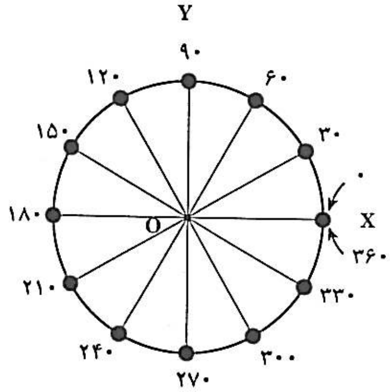
فعالیت

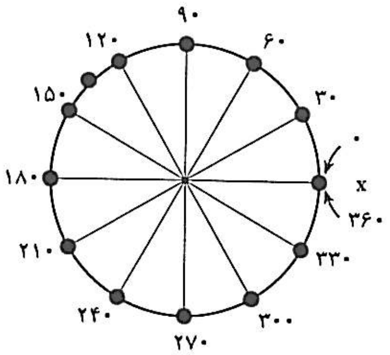
پدیدهٔ واقعی دیگری که مدل‌سازی ریاضی آن به‌این‌گونه منحنی‌ها (منحنی سینوسی) منجر می‌شود نوسان فنر است. مطابق شکل زیر وزنه‌ای به انتهای فنر آویزان، وصل کنید و به اندازه یک واحد از حالت سکون به‌سمت پایین بکشید و هم‌زمان با رهاکردن فنر، نوار کاغذ متحرک پشت فنر را با سرعتی ثابت به حرکت درآورید. توسط روان نویس متصل به فنر، بر روی نوار، منحنی‌ای ترسیم خواهد شد که از نوع منحنی‌های سینوسی است. وسایل لازم را تهیه کرده این آزمایش را یک‌بار انجام دهید.



فعالیت

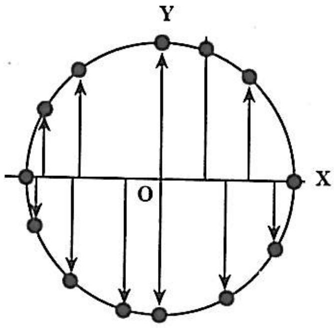
یک روش دیگر برای به‌دست آوردن درک کاملی از منحنی سینوسی، بررسی مکان یک نقطه متحرک روی دایره می‌باشد، دایره را مطابق شکل زیر از °۰ تا °۳۶۰ مدرّج کنید. سپس آن را بر روی دستگاه مختصات چنان قرار دهید تا مرکز دایره روی مبدأ مختصات و مکان °۰ روی محور x ها قرار گیرد.



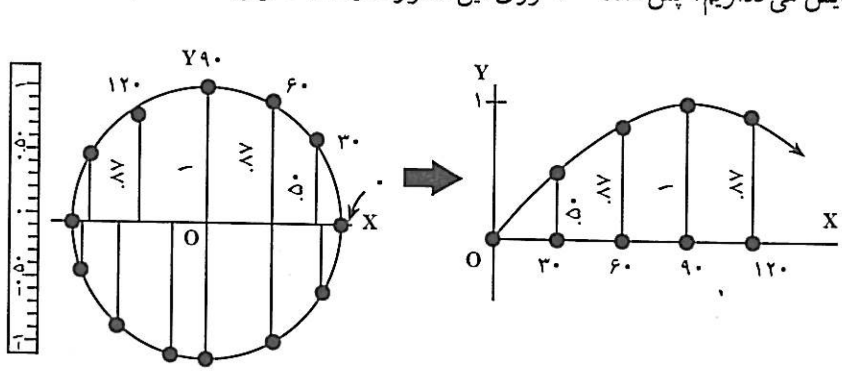


فرض می‌کنیم از نقطه °۰ شروع می‌کنیم و با سرعت ثابتی روی نیم‌دایره بالایی در جهت خلاف عقربه‌های ساعت حرکت می‌کنیم. از °۰ تا °۹۰ فاصله مکان نقطه تا محور x ها (بلندی آن) افزایش می‌یابد و از °۹۰ تا °۰ فاصله مکان نقطه تا محور x ها کاهش می‌یابد، به‌همین ترتیب اگر حرکت نقطه روی نیم‌دایره پایینی ادامه یابد فاصله مکان نقطه افزایش می‌یابد تا به °۲۷۰ برسیم و سپس کم‌کم فاصله کاهش می‌یابد تا به نقطهٔ °۳۶۰ یا همان شروع حرکت یعنی صفر درجه برسیم.

شکل زیر را ملاحظه کنید.



اکنون فرض می‌کنیم شعاع دایره برابر ۱ باشد، در این صورت درفرآیند بالا فاصله مکان نقطه را از محور x ها اندازه‌گیری می‌کنیم و سپس روی دستگاه مختصات دیگری مطابق شکل زیر رسم می‌کنیم. این بار روی محور xها زوایا را به نمایش می‌گذاریم. پس عدد °۳۰ روی این محور نمایندهٔ یک زاویه است نه یک فاصله.

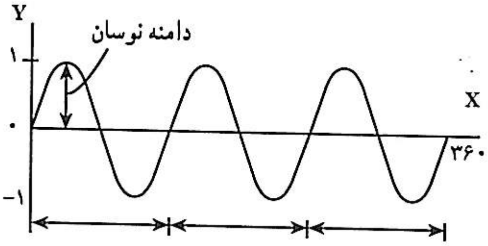


حال شما اندازه‌گیریها را روی نیم‌دایره پایینی نیز انجام دهید و نمودارها را کامل کنید.

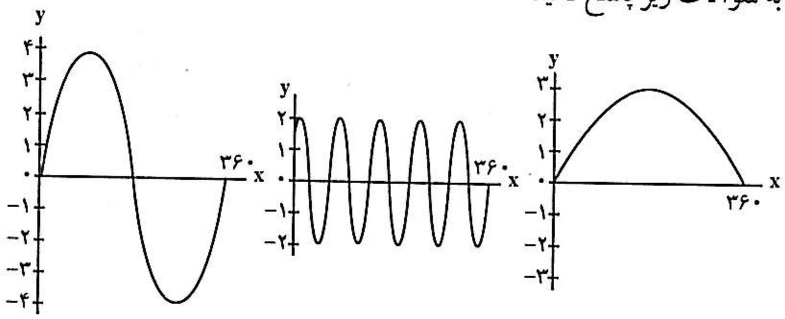
فعالیت

فاصله‌ها از محور xها، سینوس‌های مکان نقطه روی دایره نامیده می‌شوند و نمودار این سینوس‌ها روی دستگاه مختصات دیگر یک منحنی سینوسی به‌وجود می‌آورد. وقتی فرایند فوق برای یک دورکامل روی دایره انجام شود نمودار به‌دست آمده «یک موج» منحنی سینوسی نامیده می‌شود. پس یک موج منحنی متناظر با یک‌بار حرکت روی دایره به‌طور کامل است. نمودارمنحنی سینوسی نمودار یک تابع است که با نماد $y = \sin(x)$ نمایش داده می‌شود.

مدل متناظر برای یک نوع از منحنی‌های سینوسی که توسط نوسان‌نگار از روی امواج صوتی دیاپازن رسم می‌شود، به‌صورت $y = f(x) = \sin ۳x$ است که در نمودار زیر نمایش داده شده است.



همان‌گونه که در شکل بالا ملاحظه می‌کنید دامنه نوسان یک منحنی سینوسی عبارت است از بیشترین فاصله از محور xها و فرکانس منحنی سینوسی عبارتست از تعداد موج‌های کامل وقتی x از °۰ تا °۳۶۰ را طی کند، اندازه طول یک موج کامل روی محور x ها را طول موج گویند. برای بررسی انواع منحنی‌های سینوسی و درک بهتر اصطلاحات به سؤالات زیر پاسخ دهید:



۱ــ جدول دامنه نوسان و فرکانس امواج بالا را کامل کنید.

معادله تابع	دامنه نوسان	فرکانس
$y = \sin ۳x$	۱	۳
$y = ۴\sin x$		
$y = ۲\sin ۵x$		
$y = ۲\sin \frac{۱}{۲}x$		

۲ــ بلندی صدا بستگی به دامنه نوسان موج دارد. کدام معادله در جدول متناظر بلندترین صداست؟

۳ــ کدام معادله متناظر ملایم‌ترین صداست؟

۴ــ بم بودن یک صدا وابسته به تعداد فرکانس‌های موج آن است. کدام معادله متناظر بم‌ترین صداست؟

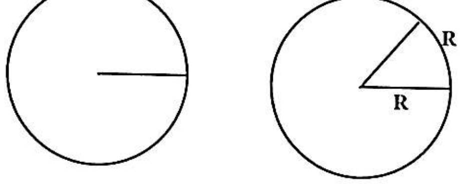
۵ــ کدام معادله مربوط به زیرترین صداست؟

۶ــ وقتی بم بودن یک صدا افزایش می‌یابد طول موج چه تغییری می‌کند؟

فعالیت

اگر با دقت به بررسی نمودار منحنی سینوسی پرداخته باشید متوجه شده‌اید که متغیر ارتفاع از محور xها را وابسته به متغیر زاویه تعریف کردیم و زوایا را روی محور افقی مشخص می‌کردیم. سؤالی که پیش می‌آید این است که آیا می‌توان مدل سینوس را به یک مدل وابسته به متغیری از نوع طول تعریف کرد؟ یعنی متغیر برحسب درجه به متغیری برحسب طول تبدیل شود؟ اگر مروری بر ریاضیاتی که سال‌های قبل خوانده‌اید بنمایید به سؤال پاسخ مثبت می‌دهید.

می‌دانیم هرگاه دایره را به وسیله شعاع‌ها به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم هرقسمت را یک درجه می‌گویند. این واحد از نوع زاویه است. می‌توان با واحدی از نوع طول نیز مشخص کرد که چه سهمی از دایره موردنظر ماست. فرض کنید دایره‌ای به شعاع ۱ قدم داریم و می‌خواهیم روی محیط دایره قدم بزنیم.



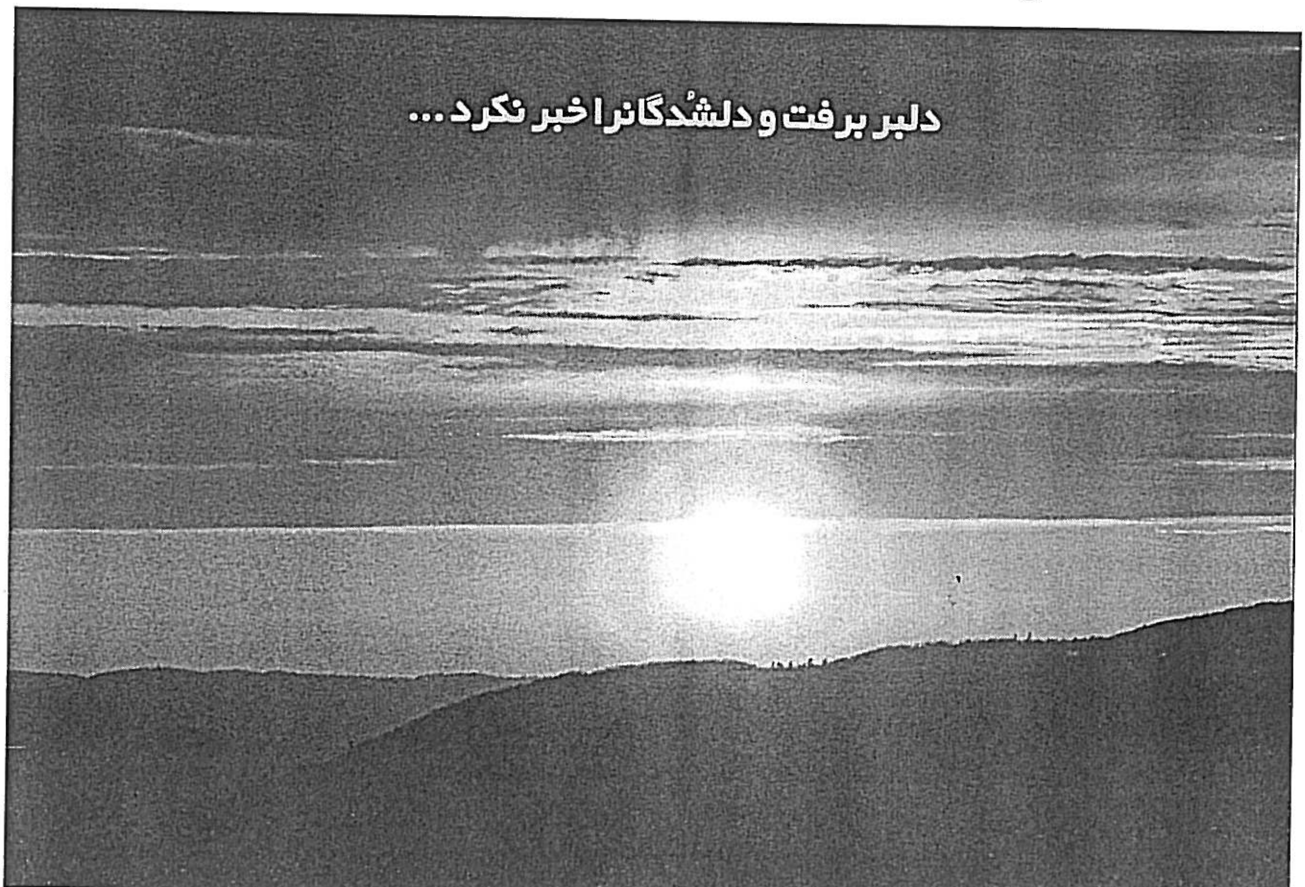
۱ـ چند قدم برداریم تا بیش از یک دور روی دایره راه رفته باشیم؟ محیط دایره تقریباً چند قدم است؟

۲ـ محیط دایره دقیقاً چند قدم است؟

۳ـ نصف محیط دایره چند قدم است؟

۴ـ اگر زاویه‌ای برحسب درجه داده شده باشد، اگر بخواهیم روی محیط دایره به اندازهٔ کمان روبرو به زاویه قدم بزنیم، باید چند قدم برداریم؟

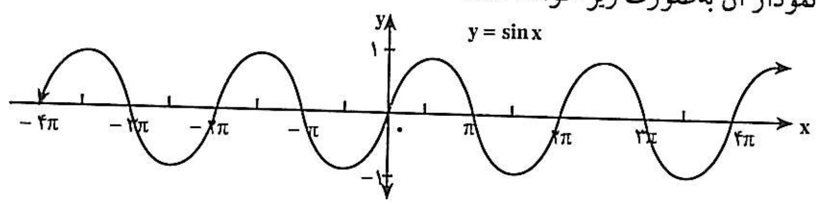
۵ـ آیا پاسخ شما به سؤالات بالا به طول قدم شما بستگی دارد؟

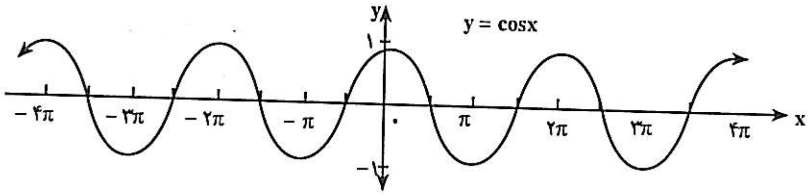


به این روش به هر زاویه یک طول نسبت داده می‌شود و آن برحسب تعداد قدمهایی است که لازم است تا کمان روبرو به زاویه داده شده را بپیماییم. مثلاً به زاویه ۱۸۰°، به‌مقدار π قدم متناظر می‌شود، و به این واحد برای اندازه‌گیری طول خم رادیان می‌گویند. توجه داشته باشید که نمی‌توان نوشت $\pi^{R} = ۱۸۰^{\circ}$ چون یکی نمایندهٔ زاویه و دیگری نمایندهٔ طول خم است. رادیان به ما کمک می‌کند تا در نمودار سینوسی، روی محور xها اعداد حقیقی که نمایندهٔ طول هستند بگذاریم، نه مقادیر زاویه‌ها را. اگر به نمودار دقت کنید در فواصل به طول ۲π منحنی تکرار می‌شود بدین جهت دوره تکرار یا دوره تناوب تابع سینوس ۲π است.

فعالیت

با تبدیل زاویه به رادیان مدل $f(x) = \sin x$ به یک مدل وابسته به یک متغیر حقیقی تبدیل می‌شود و اگر برای فاصله $[۲\pi, ۴\pi]$ منحنی سینوس را دوباره تکرار کنیم مانند این است که دایره را دوباره پیموده‌ایم و اگر پیمودن دایره در جهت حرکت عقربه‌های ساعت را با علامت منفی درنظر بگیریم مدل سینوس را می‌توانیم روی همه محور xها تعریف کنیم و نمودار آن به‌صورت زیر خواهد شد.





جدول مقابل را کامل کنید.

درجه	۰°	۱۵°	۳۵°	۴۵°	۶۰°	۷۵°
رادیان	۰					

اندازه زوایای ۱° ، ۱۰° ، ۵۰° ، ۱۰۰° را برحسب رادیان به‌دست آورید و حاصل را با کمک ماشین‌حساب محاسبه کنید.

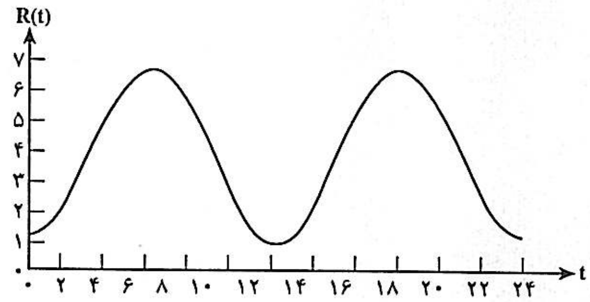
الف ــ از شکلهای متن درس در مورد مکان یک نقطه روی دایره استفاده کنید و به‌جای فاصله مکان نقطه تا محور x ها فاصله مکان نقطه تا محور y ها را محاسبه کرده جدولی تنظیم کنید و سپس روی دستگاه مختصات رسم کنید. منحنی به‌دست آمده چه تفاوتی با منحنی سینوس دارد؟

ب ــ فاصله‌ها تا محور yها را کسینوس (Cosine) گویند و معادله آن را به‌صورت $y = \cos(x)$ نشان می‌دهند. به‌طور مشابه منحنی را روی محور ادامه دهید (تکرار کنید) و سپس به وسیله نقطه‌یابی نمودار را رسم کنید و با نمودار تابع سینوس مقایسه کنید، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

پ ــ مقادیر سینوس و کسینوس مربوط به مکان نقاط را با استفاده از ماشین حساب مجذور کرده باهم جمع کنید چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا می‌توانید با روشی دیگر نتیجه را ثابت کنید؟

خود را بیازماییم

بخش تحقیقات یک شربت نوشابه‌سازی درآمد حاصل از فروش در دو سال را به‌طور تقریبی با تابع زیر داده است. که در آن $R(t)$ درآمد (برحسب میلیون تومان) در t ماه بعد از فروردین می‌باشد نمودار تابع درآمد در زیر نشان داده شده است.



الف ــ مقادیر دقیق R(۰)، R(۲) ، R(۳) و R(۱۸) را بدون ماشین حساب بیابید.

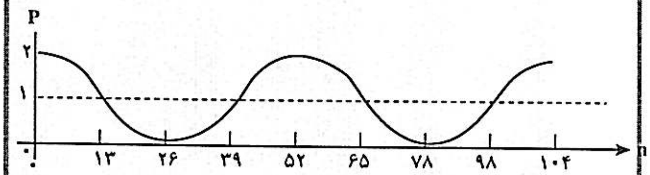
ب ــ به‌وسیله ماشین حساب R(۵) و R(۲۳) را محاسبه کنید.

پ ــ آیا نمودار با توجّه به مسئلهٔ واقعی معقول به‌نظر می‌رسد؟

خود را بیازماییم

در یک شهر بزرگ، مقداری دی‌اکسید سولفور آلوده‌کننده که ناشی از سوخت ذغال‌سنگ و نفت می‌باشد به داخل اتمسفر رها شده باعث صدمه لایه اوزن می‌گردد. فرض کنید مقدار آلودگی رها شده در اتمسفر بر حسب تُن در n امین هفته بعد از فروردین به‌طور تقریبی با معادله $P(n)=1+\sin\frac{7\pi n}{13}$ داده شده باشد.

نمودار تابع آلودگی هوا در شکل زیر نمایش داده شده است.



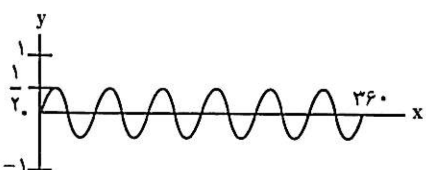
الف ــ مقدار دقیق P(۰)، P(۳۹) ، P(۵۲) و P(۶۵) را با استفاده از ضابطه تابع آلودگی وبدون کمک ماشین حساب پیدا کنید.

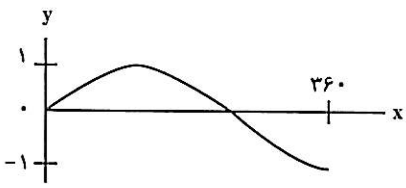
ب ــ به‌وسیله ماشین‌حساب P(۱۰) و P(۹۵) را بیابید.

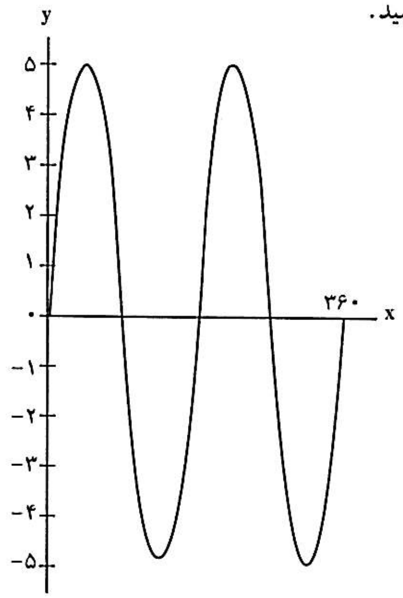
پ ــ چه دلایلی می‌توانید ارائه کنید که این معضل محیط زیست دارای منحنی سینوسی است؟

فعالیت

در هریک از نمودارهای زیر معادلات متناظر با آنها را بنویسید.



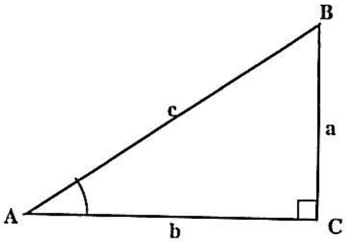




۵ـ۵ـ کاربرد مدلهای ریاضی در توسعه ریاضیات

فعالیت

اگر به‌جای فاصله از محور xها، فاصله از محور yها را مدل‌سازی کنیم مدل کسینوسی به‌دست می‌آید که آن را با $y = \cos(x)$ نمایش می‌دهیم.



از قضیه فیثاغورث می‌دانیم $a^۲ + b^۲ = c^۲$

با تقسیم بر $c^۲$ داریم $\frac{a^۲}{c^۲} + \frac{b^۲}{c^۲} = ۱$ و در نتیجه $\sin^۲ A + \cos^۲ A = ۱$

نشان دهید فرمول $\sin^۲ A + \cos^۲ A = ۱$ با قضیه فیثاغورث معادل است. یعنی از قضیه فیثاغورث می‌توان ثابت کرد $\sin^۲ A + \cos^۲ A = ۱$ (که در بالا نشان دادیم) و ازرابطه $\sin^۲ A + \cos^۲ A = ۱$ می‌توان قضیه فیثاغورث را نتیجه گرفت (که شما انجام این قسمت را به‌عهده دارید.)

خود را بیازماییم

تحقیق کنید که

۱) $\sin ۳۰° = \cos ۶۰°$ ۲) $\cos ۳۰° = \sin ۶۰°$

۳) $\sin ۴۵° = \cos ۴۵°$ ۴) $\sin ۹۰° = \cos ۰°$

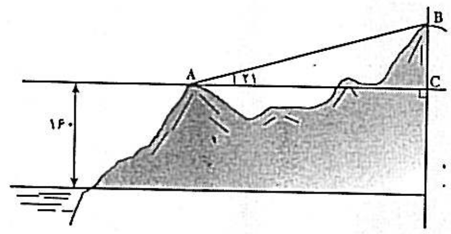
سپس با کمک $\sin B = \frac{b}{c}$ و $\cos A = \frac{b}{c}$ ثابت کنید

$\sin(۹۰° - A) = \cos A$

$\cos(۹۰° - A) = \sin A$

خود را بیازماییم

طنابی از نقطه A که ۱۶۰ متر بالاتر از سطح دریاست به بالای کوه نقطه B که از روی طناب ۱۲۰۰ متر از نقطه A فاصله دارد، کشیده شده است. AB زاویه °۲۱ با سطح افقی می‌سازد. ارتفاع قله کوه نسبت به سطح دریا را با کمک ماشین‌حساب محاسبه نمایید.

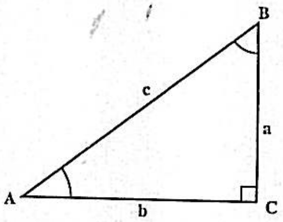


طول AC ، فاصله افقی نقطه A و قله کوه را به‌دست آورید.

خود را بیازماییم

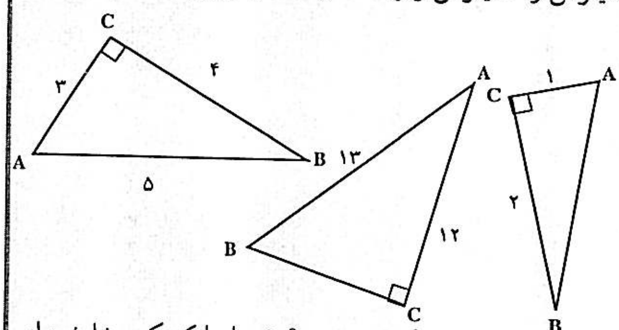
نسبت‌های مثلثاتی در مثلث

در مثلث قائم‌الزاویه ABC فرض کنید $AB = c$ و $AC = b$ و $BC = a$.



دیدیم $\sin A = \frac{a}{c}$ و $\cos A = \frac{b}{c}$

سینوس و کسینوس زاویه A در اشکال زیر را محاسبه نمایید.



ــ سینوس و کسینوس °۶۰ را با کمک مثلث‌های قائم‌الزاویه محاسبه نمایید.

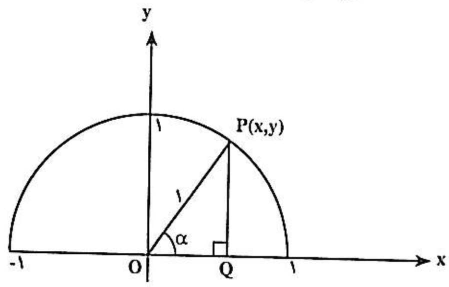
ــ سینوس و کسینوس °۴۵ را با کمک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین حساب نمایید.

نسبتهای مثلثاتی در دستگاه مختصات دکارتی

فعالیت

اگر بخواهیم نسبتهای مثلثاتی را با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه تعریف کنیم تنها برای زوایای حاده می‌توانیم sin و cos را تعریف نماییم. با استفاده از دستگاه مختصات می‌توان تعریف نسبتهای مثلثاتی را به زوایای غیرحاده نیز توسعه داد. این کار را انجام دهید.

پروین : دایره‌ای به شعاع ۱ و به مرکز مبدأ مختصات رسم کنید. شعاع OP را رسم نمایید تا زاویه حادهٔ α با جهت مثبت محور xها تشکیل شود.



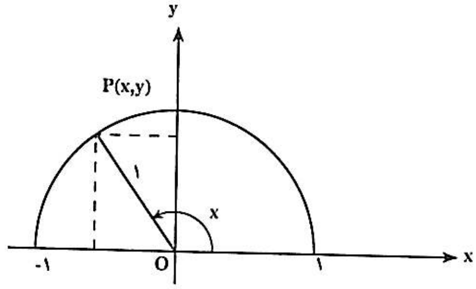
اگر عمود PQ را از P بر محور xها رسم کنیم داریم

$$\sin\alpha = \frac{PQ}{OP} \qquad \cos\alpha = \frac{OQ}{OP}$$

پس اگر (x,y) مختصات نقطه P را به‌دست دهد داریم

$$\sin\alpha = y \qquad \cos\alpha = x$$

با این تفاسیر می‌توان نسبتهای مثلثاتی یک زاویه منفرجه را هم تعریف کرد. برای $۰ \le \alpha \le ۱۸۰^\circ$ و نقطه P روی دایره‌ای به شعاع r به مرکز O مبدأ مختصات به‌طوری که OP با جهت مثبت محور xها زاویهٔ α می‌سازد تعریف می‌کنیم



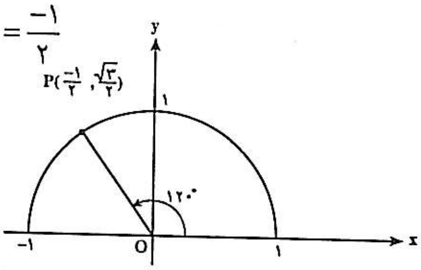
$\sin\alpha = y$

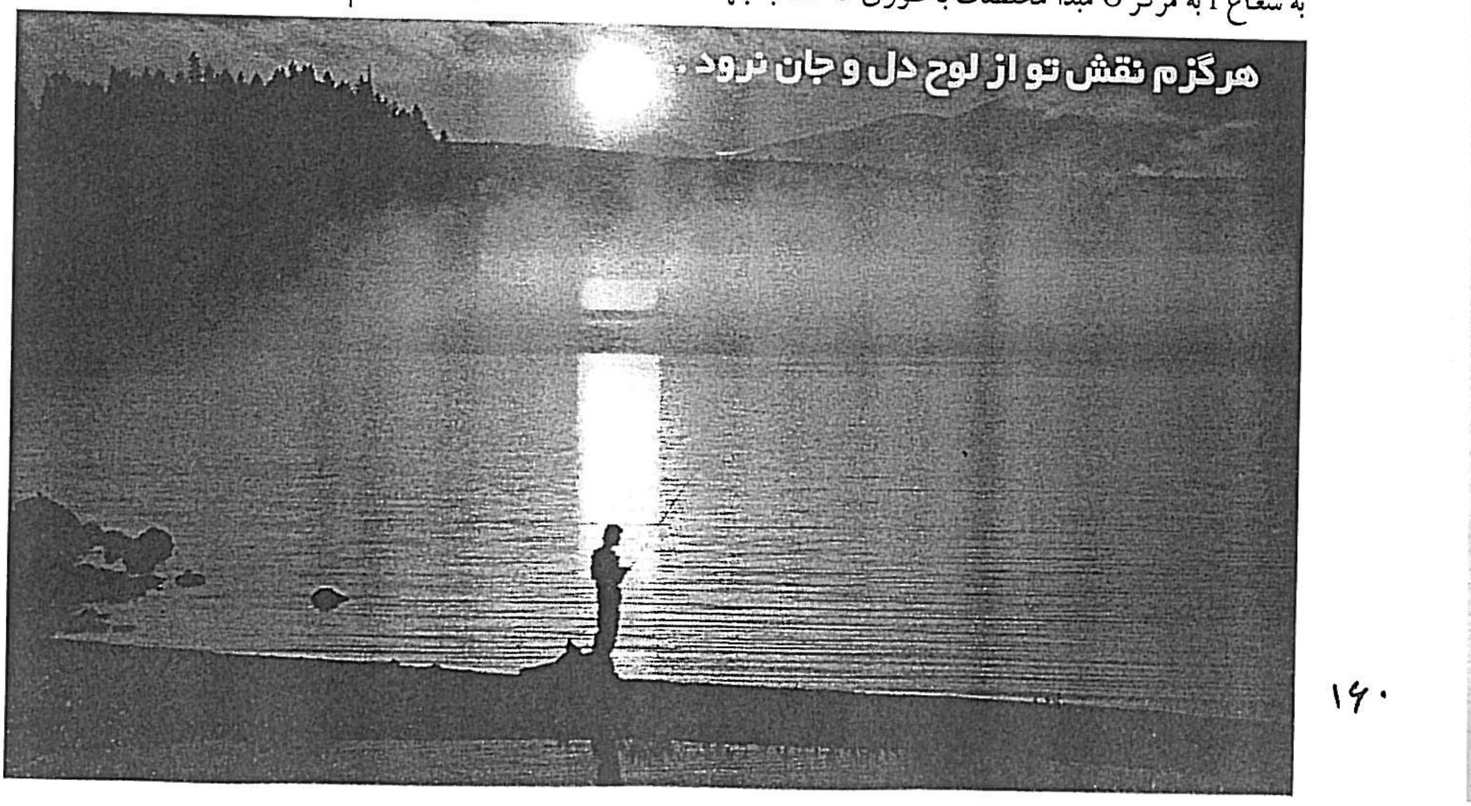
$\cos\alpha = x$

مثلاً اگر $\alpha = ۱۲۰^\circ$ با رسم دایره‌ای به شعاع ۱ نقطه P با مختصات $P(-\frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{۳}}{۲})$ به‌دست می‌آید که نتیجه می‌دهد

$$\cos ۱۲۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos ۱۲۰^\circ = \frac{-۱}{۲}$$





خود را بیازماییم

در بالا اگر دایره‌ای به شعاع ۱ رسم می‌کردیم مختصات نقطه P چه می‌شد؟

خود را بیازماییم

نسبتهای مثلثاتی زاویه ۱۳۵° را با رسم دایره‌ای به شعاع ۲ به‌دست آورید.

خود را بیازماییم

تحقیق کنید که آیا رابطهٔ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ برای زوایای منفرجه هم برقرار است یا خیر؟ ادعای خود را ثابت کنید.

خود را بیازماییم

روابط زیر را تحقیق کنید :

۱) $\sin 0^\circ = \sin 180^\circ$ ۲) $\cos 0^\circ = \cos 180^\circ$

۳) $\sin 135^\circ = \sin 45^\circ$ ۴) $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ$

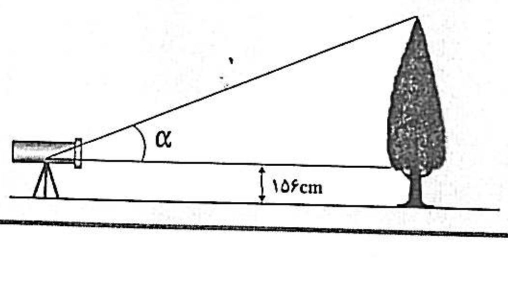
سپس با کمک دستگاه مختصات ثابت کنید

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$

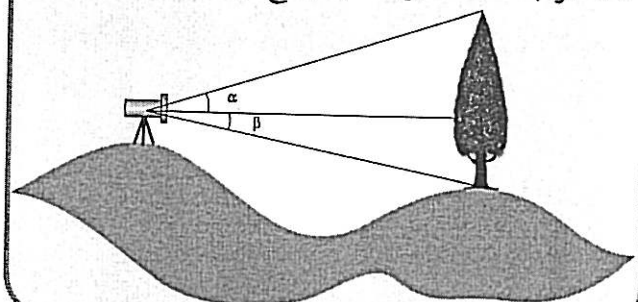
خود را بیازماییم

برای به‌دست آوردن ارتفاع یک درخت، دستگاه زاویه‌یابی را مطابق شکل زیر به فاصلهٔ ۸۰ متر از درخت مستقر کرده زاویهٔ شیب آن یعنی زاویه α را اندازه‌گیری می‌کنیم که ۳۶° می‌شود. اگر ارتفاع دستگاه زاویه‌یاب ۱۵۶ سانتی‌متر باشد با کمک ماشین‌حساب ارتفاع درخت را محاسبه کنید. سطح زمین افقی فرض شده است.



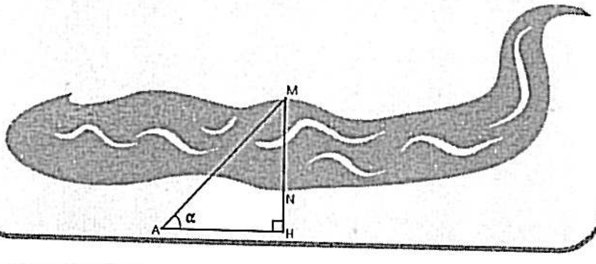
خود را بیازماییم

در اندازه‌گیری ارتفاع درخت اگر زمین افقی نباشد و زاویه‌یاب مطابق شکل قرارگرفته باشد، با داشتن زوایای شیب α برابر ۲۳° و β برابر ۱۲° و فاصله افقی زاویه‌یاب تا درخت برابر ۱۸۳ متر، با کمک ماشین‌حساب ارتفاع درخت را به‌دست آورید.



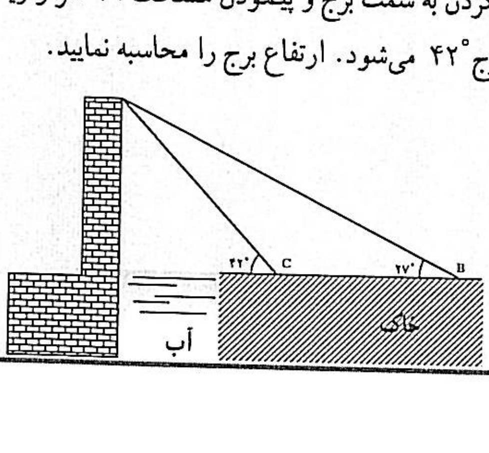
خود را بیازماییم

محاسبهٔ عرض یک رودخانهٔ عبور ناپذیر برای احداث پلی مورد نیاز است. برای این کار دستگاه زاویه‌یابی را در نقطهٔ دلخواه A مستقر می‌کنیم و مطابق شکل زاویهٔ افقی α را اندازه‌گیری می‌نماییم که نتیجه ۴۳° شده است. اگر طولهای AH و NH که برهم عمودند به ترتیب ۵۰ متر و ۲۰ متر باشند، عرض رودخانه را با کمک ماشین‌حساب به‌دست‌آورید.



خود را بیازماییم

از نقطه B زاویهٔ فراز بلندترین نقطه برجی ۲۷° است با حرکت‌کردن به سمت برج و پیمودن مسافت ۱۹ متر زاویه فراز همان برج ۴۲° می‌شود. ارتفاع برج را محاسبه نمایید.



فصل ۶

آشنایی با کامپیوتر

مقدمه

در این فصل، هدف آشنایی کلّی با کامپیوتر و درک این مفهوم است که اساساً کامپیوتر چیست و چه می‌کند. برای دست‌یابی به این هدف ابتدا نیاز به بیان چند مثال می‌باشد، چند مثال از فرآیندهایی مشابه فرآیندهای کار یک کامپیوتر. اگر به این مسئله توجه کنیم که کارخانجات اساساً چه عملی انجام می‌دهند می‌بینیم همه آنها صرفنظر از نوع و زمینه فعالیت خود، مقداری مواد اولیه خام را دریافت کرده، بر روی آنها یک سری اعمال خاص انجام می‌دهند و در نهایت محصولی را عرضه می‌نمایند.

بدیهی است نوع مواد اولیه، اعمالی که بر روی آنها صورت می‌پذیرد و طبیعتاً محصول به‌دست آمده بسته به نوع کارخانه متفاوت خواهد بود.

مسیر عملکرد تمام کارخانجات را تحت نموداری مانند آنچه در پایین آمده می‌توان خلاصه نمود.

ورودی	پردازش	خروجی

در این شکل اعمالی که بر روی مواد خام و غیر آماده صورت می‌گیرد تا آنها را به مواد آماده (محصول موردنظر) تبدیل سازد را پردازش نامیده‌ایم.

به عنوان مثال در یک کارخانه ریسندگی پشم و الیاف بعنوان مواد خام (ورودی) به کارخانه وارد می‌شوند، پردازش لازم روی آنها صورت می‌گیرد و نخ (خروجی) تحویل داده می‌شود. در کارخانه پارچه‌بافی، نخ که خروجی کارخانه اول بود ؛ ورودی این کارخانه محسوب می‌شود و پس از انجام پردازش لازم پارچه بعنوان خروجی دریافت می‌شود.

یک کامپیوتر را نیز می‌توان دقیقاً کارخانه‌ای تصور نمود که وظیفه آن پردازش اطلاعات خام (داده، data) و تبدیل آن به اطلاعات پرورده است. بعنوان مثال نمرات کارنامه یک دانش‌آموز را به عنوان ورودی کامپیوتر در نظر بگیرید و خروجی را معدل او. واضح است که در اینجا عمل پردازش محاسبه مجموع نمرات داده شده (data) و تقسیم آن بر تعداد نمرات است.

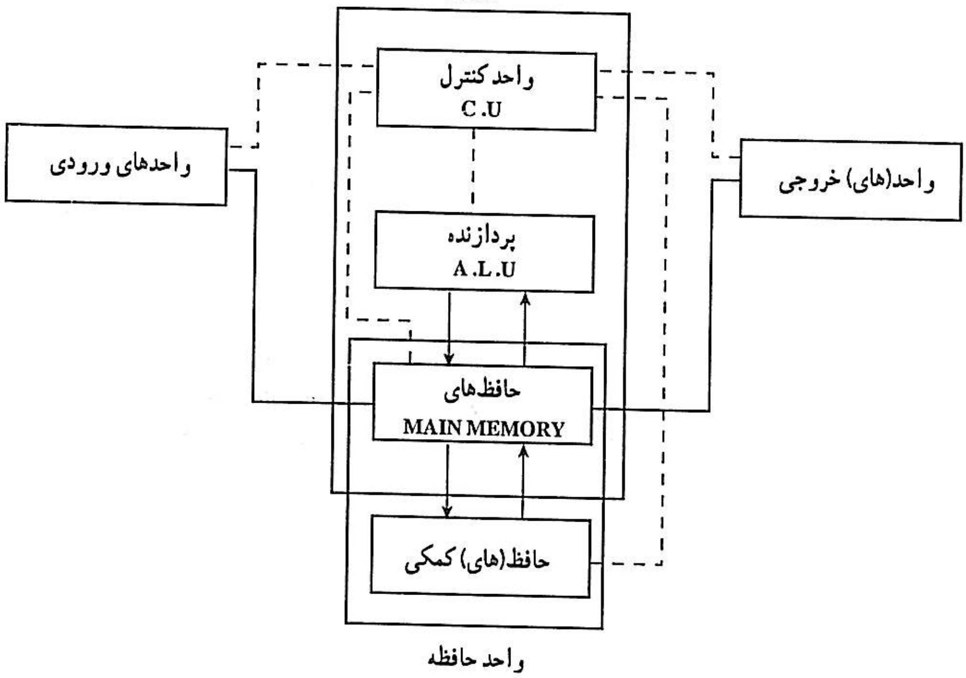
با توجه به آنچه بیان شد می‌بینیم که در واقع کامپیوتر صرفاً بخشی از کار حواس و مغز ما را انجام می‌دهد، با این تفاوت که محاسبات در کامپیوتر نسبت به مغز انسان بسیار سریعتر، اما پیچیدگی و تنوع پردازش‌ها در مغز انسان فوق‌العاده افزونتر از

کامپیوتر می‌باشد. در ضمن تفاوت بسیار عمده کامپیوتر با مغز انسان در این است که کامپیوتر قدرت پیدا کردن راه حل مسئله مطرح شده را ندارد، برای استفاده از کامپیوتر باید خودمان راه حل را پیدا کنیم، آن‌را تبدیل به دستورالعمل‌هایی نماییم که برای کامپیوتر قابل فهم باشند و همراه با داده‌ها به‌صورت ورودی به کامپیوتر بدهیم، به همین دلیل در مواردی که حجم اطلاعات زیاد و نوع پردازش عمدتاً محاسباتی باشد (مانند تصحیح اوراق کنکور و تعیین اسامی پذیرفته‌شدگان) استفاده از کامپیوتر بسیار مفید و مشکل‌گشا خواهد بود.

پردازش در کامپیوتر

حال کمی فراتر می‌رویم و به عملکرد کامپیوتر قدری دقیق‌تر توجه می‌نماییم. سیر فعالیت یک کامپیوتر را همانند کارخانجات در شکل زیر می‌توان خلاصه نمود. ما این شکل را در ارتباط با کامپیوتر باز کرده و با جزئیات بیشتر مورد توجه قرار می‌دهیم :

همان‌گونه که در شکل زیر نیز نمایان است data از طریق دستگاه ورودی به قسمت پردازش فرستاده می‌شود و پس از انجام پردازش، اطلاعات به دستگاه خروجی فرستاده شده و این دستگاه اطلاعات آماده بهره‌برداری را به استفاده کننده (user) تحویل می‌دهد.



نرم‌افزار و سخت‌افزار

سخت افزار کامپیوتر مجموعه دستگاههای الکترونیکی و مکانیکی قابل رؤیت می‌باشد، سخت‌افزار کامپیوتر در اندازه‌ها، شکل‌ها و با قیمتهای مختلفی ساخته می‌شود، از کامپیوترهای خانگی گرفته که با قیمت پایین در دسترس عموم قرارگرفته‌اند تا کامپیوترهای بزرگ چند میلیون دلاری که برای کاربردهای حساس به کارگرفته می‌شوند. اما سخت‌افزار کامپیوتر در هر اندازه و قیمتی باشد، به تنهایی قادر به انجام کاری نیست. نرم‌افزار کامپیوتر نقش هدایت کنندهٔ سخت‌افزار را به‌عهده دارد. نرم‌افزارها برنامه‌هایی هستند که درون سخت‌افزار کامپیوتر قرار می‌گیرند و از آن برای انجام کار به‌خصوصی استفاده می‌کنند. در مقایسه کامپیوتر با انسان می‌توان گفت که اجزاء فیزیکی بدن انسان مانند دست و پا، یا سر سخت‌افزار هستند و افکار انسان، نرم‌افزار. در کامپیوتر نرم‌افزار کنترل کننده، سیستم عامل نامیده می‌شود و برنامه‌هایی که استفاده کنندگان می‌نویسند برنامه‌های کاربردی خوانده می‌شوند. بنابراین می‌توان نرم‌افزارها را به نرم‌افزارهای سیستم و نرم‌افزارهای کاربردی تقسیم نمود.

۶ـ۱ـ سیستم عامل DOS

سیستم عامل چیزی جز یک برنامه پیچیده و بزرگ نیست. این برنامه در استفاده از کامپیوتر نقش اصلی را ایفا می‌کند و می‌توان گفت قدم اصلی جهت آشنایی با یک کامپیوتر، آشنایی با سیستم عامل آن می‌باشد. یکی از کارهای مهمی که سیستم عامل انجام می‌دهد این است که تمام پیچیدگیها را از دید استفاده کننده پنهان نگهداشته و با فراهم نمودن مجموعه‌ای از دستورالعملها بنام «فرمانهای سیستم عامل» محیط مناسبی را جهت کار با کامپیوتر فراهم می‌سازد. بعنوان مثال می‌توان مکانیزم خواندن اطلاعات از دیسک و نوشتن اطلاعات بر روی دیسک را در نظر گرفت که کاملاً از دید استفاده کننده از کامپیوتر خارج است. اعمال خواندن و یا نوشتن بر روی دیسک در محیط سیستم عامل خیلی ساده بنظر می‌رسد ولی اگر بخواهیم در غیر محیط سیستم عامل این کار را انجام دهیم آشنایی با ساختار کامل دیسک ضروری است. در حالی‌که در محیط سیستم عامل، نیازی به پرداختن به این مفاهیم نیست و کلیه کارها توسط سیستم عامل انجام می‌شود.

در واقع یکی از وظایف مهم سیستم عامل ایجاد ارتباط بین سخت‌افزار کامپیوتر و استفاده کننده از کامپیوتر (user) و اجرا نمودن فرامین صادر شده می‌باشد و از وظایف دیگر آن کنترل دستگاههای ورودی و خروجی و نقل و انتقال اطلاعات بین حافظهٔ اصلی و حافظه‌های جانبی است. سیستم عامل با توجه به نوع کامپیوتری که باید کنترل کند ممکن است وظایف مختلفی را بعهده گیرد. سیستم عاملی که در عموم ریز کامپیوترها مورد استفاده قرار می‌گیرد DOS (Disk Operating sysrem) می‌باشد.

در اینجا با سیستم عامل DOS آشنا خواهیم شد. از ابتدای تولید این سیستم عامل تاکنون تغییرات زیادی در آن صورت گرفته است. این روند تکاملی منجر به ایجاد گونه‌های (نگارشهای) مختلف آن شده است، که هرگونه شماره‌ای مخصوص به خود دارد (مانند شماره ویرایش یک کتاب). اولین نسخه DOS نسخه شماره ۱/۰ می‌باشد. تمامی شماره نگارشهای DOS شامل یک قسمت صحیح و یک قسمت اعشاری می‌باشد که به ترتیب زیر مشخص می‌شوند.

اگر سیستم عامل با شماره نگارش جدید نسبت به قبلی ارتقاع چشمگیری پیدا کرده باشد و اشکالات اساسی از آن را برطرف نموده باشد یک واحد به قسمت صحیح نگارش قبلی اضافه می‌شود و اگر صرفاً اشکالات جزئی قبلی را برطرف نموده و به عبارت دیگر تغییرات جزئی در آن ایجاد کرده باشد یک واحد به قسمت اعشاری اضافه می‌شود.

فایل‌ها

به مجموعه‌ای از اطلاعات که ارتباطی منطقی با یکدیگر داشته باشد فایل گفته می‌شود. در هر سیستم عاملی عنصر اصلی کار فایل می‌باشد. در سیستم عامل DOS هر فایل دارای اسمی است که شامل دو قسمت می‌باشد قسمت اول را نام فایل (File name) و قسمت دوم را مشخصه فایل (یا پسوند فایل Extension) می‌گوییم. این دو قسمت بوسیله نقطه از یکدیگر جدا می‌شوند. نام فایل حداکثر ۸ کاراکتر و پسوند آن حداکثر ۳ کاراکتر می‌تواند باشد. کاراکترهایی که می‌توانند در نام و پسوند فایل ظاهر گردند عبارتند از :

ـ حروف A تا Z (حروف بزرگ و کوچک)

ـ ارقام 0 تا 9

ـ کاراکترهای ' { } - ( ) & ^ % $ # @ ! ~ -

مشخصه فایل اختیاری است و ممکن است فایلی دارای مشخصه نباشد.

روش بهره‌برداری از هر نرم‌افزاری بدین صورت است که ابتدا باید آن نرم‌افزار داخل حافظه RAM ماشین Load شود و سپس به اجرا درآید. در مورد نرم‌افزارها و Packageها می‌توان با استفاده از سیستم عامل آنها را در حافظه اصلی Load نمود و به اجرا درآورد ولی در مورد سیستم عامل مسئله متفاوت است و باید سیستم عامل را درست بعد از روشن شدن ماشین در حافظه Load نمود (زیرا استفاده و بهره‌گیری از کامپیوتر تنها از طریق سیستم عامل امکان‌پذیر است).

روش Load شدن سیستم عامل در حافظه RAM کامپیوتر بصورت زیر است :

هنگامی که کامپیوتر را روشن می‌کنیم ابتدا تست سخت‌افزاری صورت می‌گیرد در حین این عمل اگر اشکالی در سخت‌افزار موجود باشد پیغام مناسب داده خواهد شد. بعد از اتمام موفقیت‌آمیز تست سخت‌افزار، دیسکت موجود در Disk drive A مورد جستجو جهت‌یافتن سیستم‌عامل قرار می‌گیرد. اگر دیسکت مربوط به سیستم عامل روی Disk dive A قرار داده نشود، در این صورت دیسک C مورد جستجو قرار می‌گیرد. و اگر کامپیوتر مورد استفاده Hard disk داشته باشد) در این حالت اگر سیستم عامل از قبل روی دیسک C نصب شده باشد، در حافظه load خواهد شد. در غیر این صورت پیغام مناسب مبنی بر موجود نبودن سیستم عامل بر روی یسک داده خواهد شد. پس جهت استفاده از کامپیوتر تحت کنترل سیستم عامل بایدما دیسکتی در اختیار داشته باشیم که سیستم عامل روی ان قرار داده شده باشد و یا قبلاً سیستم عامل را روی دیسک C قرار داده باشیم. در هر دو حالت بعد از اتمام قسمت سخت‌افزاری و load شدن سیستم عامل در حافظه و ظاهرشدن نشانه سیستم (dos prompt) روی صفحه نمایش می‌توان کار با کامپیوتر را شروع نمود.

دستورهای سیستم عامل DOS

به‌کارگیری توانایی سیستم عامل با استفاده از دستورهایی که از طریق صفحه کلید وارد می‌شوند و به سیستم عامل DOS ابلاغ می‌گردد، امکان‌پذیر است. شکل کلی دستورات DOS به‌صورت زیر می‌باشد : Command [Parameters]

دستورهای سیستم عامل DOS به دو دسته داخلی و خارجی تقسیم می‌شوند. هنگامی که کامپیوتر راه‌اندازی می‌شود فایلی بنام Command. com در حافظه RAM ماشین Load می‌گردد که تا زمان وجود این فایل در حافظه یک دسته از دستورات DOS قابل اجراست. این دستورات همان دستورهای داخلی (Internal Commands) هستند.

اما دستورات خارجی آنهایی هستند که برای اجرای هرکدام فایلی (متناظر با نام دستور) باید در حافظه جانبی موجود باشد. این فایل به هنگام اجرای دستور در حافظه RAM ماشین Load شده و دستور موردنظر اجرا می‌گردد و پس از آن از حافظه خارج می‌شود.

لازم به تذکر است، دستوراتی که توضیح داده خواهند شد براساس سیستم عامل MS DOS 4.01 می‌باشند.

ضمناً قبل از شروع دستورات چند نکته قابل ذکر است :

۱ـ برای تغییر drive پیش فرض (default drive) کافی است نام drive موردنظر و علامت : (colen) را تایپ و کلید ENTER را بزنیم.

۲ـ در بعضی موارد که به‌کاربردن نام فایل لازم می‌باشد می‌توان به‌جای نام یک فایل از نام گروهی فایلها استفاده کرد. در نوشتن یک نام گروهی دو علامت * و ? (Wildcard characters) به‌کار برده می‌شود. بدین صورت که علامت * فقط در انتهای نام فایل یا پسوند آن می‌تواند ظاهر گردد ولی علامت ؟ در هر کجا از نام و پسوند فایل می‌تواند قرارگیرد. هر علامت ؟ به‌جای یک حرف می‌نشیند ولی * به‌جای یک یا بیش از یک حرف می‌تواند قرارگیرد. بعنوان مثال P*.ba? یک نام گروهی است که می‌تواند شامل فایلهای

pa. bas

pik.bas

prof. bak

p. bat

باشد.

CLS

نوع دستور : داخلی

فرم کلی دستور : CLS

توضیح: این دستور صفحه نمایش را پاک کرده و فقط نشانه سیستم (Prompt) و مکان نما (Cursor) روی صفحه باقی خواهد ماند.

Dir

نوع دستور : داخلی

فرم کلی دستور : dir [drive.] [pathname][/p][/w]

توضیح : توسط این دستور لیستی از فایلهای موجود روی دیسک بر روی monitor نمایش داده می‌شود. اگر این دستور را بدون پارامتر به‌کار بریم فایلهای موجود روی دیسک پیش فرض (default disk) لیست خواهند شد و اگر نام drive را ذکر کنیم فایلهای موجود روی دیسک خواسته شده لیست می‌شوند.

این دستور ابتدا lable و شماره سریال دیسک را نشان داده سپس نام فایلها، پسوند (entension) آنها، میزان حافظه مصرف شده توسط فایلها (برحسب بایت) تاریخ و زمان تشکیل فایلها یا آخرین تغییرات ثبت شده روی آنها را نمایش می‌دهد. در انتها تعداد فایلهای موجود و فضای خالی باقیمانده روی دیسک موردنظر را مشخص می‌سازد. اگر بخواهیم از وجود یا عدم وجود فایل مشخصی روی دیسک اطلاع حاصل نماییم کافی است بعد از دستور dir نام فایل موردنظر را ذکر کنیم. اگر فایل مذکور روی دیسک باشد، نام، پسوند، اندازه و تاریخ و زمان آخرین تغییرات ثبت شده روی آن فایل روی صفحه نمایش ظاهر می‌شود. در غیر این صورت پیغام «File not Found» روی صفحه نمایش خواهد آمد. همچنین به جهت دیدن مشخصات مجموعه‌ای از فایلها با خصیصه‌ای مشترک در نام آنها، می‌توان از کاراکترهای Wild) cards) 0 ? , * در محل نام فایل استفاده کرد.

مثال : DIR *. BAT DIR A? B. pas

این دستور سوییچ‌های زیر را می‌پذیرد :

P/ : باعث می‌شود اسامی فایلها صفحه به صفحه روی monitor ظاهر گردند، برای مشاهده صفحه بعد کافی است کلیدی را فشار دهید.

W/ : اسامی فایلها را به صورت افقی لیست کرده و نمایش می‌دهد به‌طوری‌که نام و پسوند هر ۵ فایل روی یک خط از صفحه نمایش ظاهر می‌گردد و بقیه اطلاعات مربوط به فایل (اندازه، تاریخ و ...) نمایش داده نمی‌شود.

Ren (Rename)

نوع دستور : داخلی

فرم کلی دستور :

rename [drive][path] Filename 1 Filename 2

یا ren [drive:][parh] Filename 1 Filename 2

که در آن Filename 1 نام قدیم فایل و Filename 2 نام جدید فایل می‌باشد.

توضیح: با استفاده از این دستور امکان تغییر نام فایلها را خواهیم داشت.

امّا لازم به تذکر است که تغییر نام فایل فقط روی یک drive انجام می‌پذیرد. بدین مفهوم که برای Filename 2 نمی‌توان drive ی غیر از drive مربوط به Filename 1 تعیین کرد.

به‌عبارت دیگر نمی‌توان فایلی را تغییر نام داد و در حین تغییر نام آن را بر روی دیسک دیگری منتقل نمود. در این فرمان استفاده از علایم * و ? نیز امکان پذیر می‌باشد. مثال :

ren   *. txt   *. DOS

ren   b: chap 10. pas   part 10. pas

فایل Chap 10 . pas که روی دیسک موجود در drive b است به part 10. pas تغییر نام می‌یابد.

Del (Erase)

نوع دستور : داخلی

فرم کلی دستور :

del [drive:]pathname/p یا erase [drive:] pathname/p

توضیح: توسط این دستور فایل یا فایلهای تعیین شده از روی دیسکت حذف می‌شود. سوییچ p/ موجب می‌گردد قبل از حذف هر فایل پیغام زیر روی صفحه نمایش ظاهر گردد :

Filename delete (Y/N)?

پس از ظاهر شدن این پیغام می‌توانیم با وارد نمودن حرف «Y» یا «N» تصمیم‌گیری لازم را در مورد حذف یا عدم حذف فایل نامبرده اتخاذ نماییم.

در این دستور می‌توان از کاراکترهای عمومی * و ? برای پاک کردن بیش از یک فایل استفاده کرد. اگر تایپ کنیم *.* del آنگاه MS. DOS خواهد پرسید که آیا اطمینان دارید یا نه؟ (Are you sure? (Y/N)) که اگر وارد کنیم Y آنگاه تمامی فایلهای directory فعال پاک خواهد شد. برای پاک‌کردن فایلهای یک directory دیگر باید در قسمت pathname نام آن directory را ذکر کنیم.

نکته: اگر فایلی توسط دستور del پاک شود به‌طور عادی نمی‌توان آن را برگردانید. ولی امروزه نرم‌افزارهایی موجود هستند که در شرایط خاص به ما امکان می‌دهند که فایل Delete شده را undelete نماییم.

Copy

نوع دستور : داخلی

فرم کلی دستور :

Copy [drive:] pathname 1 [drive.][pathname 2]

[b/][a/][v/] :برای کپی کردن فایلها یا

Copy [drive:] pathname 1[/v][/a][/b][drive:][pathname 2]

: Copy pathname 1 + parthname 2 [...] pathname N

برای به هم پیوستن فایلها

توضیح: توسط این دستور امکان کپی‌برداری از روی فایلهای موجود روی یک دیسک بر روی دیسک دیگر ایجاد می‌شود همچنین توسط این دستور می‌توان فایلهایی را به یکدیگر ملحق نمود و فایل جدیدی به‌دست آورد. اگر پارامتر pathname 2 وارد نشود در واقع به این معنی است که می‌خواهیم فایل را با همان نام اولیه‌اش کپی کنیم.

اگر نام دیسک مبدأ و مقصد یکی باشد امکان کپی کردن وجود نخواهد داشت، زیرا روی یک دیسک نمی‌توان دو فایل با مشخصات (نام و پسوند) یکسان داشت. (مگر اینکه در directoryهای مختلفی از دیسک قرار داشته باشد) در این‌حالت پیغام زیر روی صفحه نمایش ظاهر خواهد شد :

File can not be copied onto itself

o File (s) copied

تقسیم‌بندی فضای دیسک

اسامی فایلهای ما در هر دیسک در محلی به‌نام فهرست راهنما (directory) نگهداری می‌شود. این فهرست شامل اطلاعاتی درباره اندازه فایلها و تاریخ ایجاد یا اصلاح آنها می‌باشد. هنگامی که چندین استفاده کننده (user) از کامپیوتر استفاده می‌کنند، یا یک فرد روی چندین پروژه کار می‌کند ممکن است تعداد فایلهای ایجاد شده آنقدر زیاد شوند که مدیریت آنها مشکل گردد. در اینگونه موارد طبقه‌بندی فایلها توصیه می‌گردد.

DOS با ایجاد فهرستهای راهنمای گوناگون به ما امکان طبقه‌بندی فایلها در گروههای متفاوت را می‌دهد. DOS به ما امکان می‌دهد که تحت یک فهرست راهنما، فهرستهای راهنمای دیگری ایجاد کنیم، که به این فهرستها نیز زیر فهرست subdirectory می‌گوییم. ایجاد فهرستهای راهنما در سطوح مختلف روشی برای تقسیم‌بندی فایلها به گروههای موردنظر می‌باشد. این روش سازماندهی فایلها، ساختاری شبیه به یک

درخت دارد به‌عنوان مثال ساختار زیر را در نظر بگیرید :ROOT فهرست راهنمایی است که توسط DOS به‌طور اتوماتیک هنگامی که دیسکی را Format می‌کنیم روی آن ایجاد می‌شود.

ساختار سلسله مراتبی فهرستهای راهنما به ما امکان می‌دهد که در فهرستهای گوناگون فایلهای هم نام داشته باشیم. برای یک فلاپی دیسک $5\frac{1''}{5}$ دو رویه (double sided)، چگالی مضاعف (double density) حداکثر تعداد فایلها یا زیرفهرستهایی (Subdirectories) که فهرست راهنمای اصلی (Root directory) می‌تواند داشته باشد 112 عدد و برای دیسک $3\frac{1''}{2}$ با ظرفیت 1.44MB،224 عدد می‌باشد. اما تعداد کل زیر فهرستهایی که می‌تواند روی یک دیسک موجود باشد محدودیتی ندارد.

Mkdir (md)

نوع دستور : داخلی

فرم کلی دستور :

mkdir [drive] path یا md[drive:]path

توضیح: وظیفه این دستور ایجاد زیر فهرست‌ها بر روی دیسک می‌باشد.

پارامتر drive در این دستور مشخص می‌سازد که زیر فهرست مورد نظر باید روی دیسک موجود در کدام drive تشکیل گردد. پارامتر path معین می‌کند که این فهرست در کدام سطح باید ایجاد گردد یا به عبارت دیگر این زیر فهرست منشعب از کدام فهرست باید باشد، علاوه بر این نام فهرست را نیز تعیین می‌کند. بعنوان مثال اگر بخواهیم فهرست Pascal را منشعب از Root ایجاد نماییم : mD \ pascal

و اگر بخواهیم زیر فهرست david را منشعب از فهرست pascal ایجاد نماییم : mD pascal/David

در دستور dir جلوی نام تمامی زیر فهرستهای منشعب از فهرستی که دستور dir را روی آن اعمال نموده‌ایم علامت ?D:R< قرار می‌گیرد و این مسئله بیانگر این ابت که اسم مذکور اسم یک زیر فهرست است نه یک فایل.

نکته: طول کاراکترهای نمایش دهنده مسیر همراه با نام Subdirectory حداکثر ۶۳ کاراکتر می‌تواند باشد.

Chdir (cd)

نوع دستور : داخلی

فرم کلی دستور :

chdir [drive:][path] یا cd[drive:][path]

توضیح: این دستور فهرست (directory) فعال را تعویض می‌نماید و مسیری را که در پارامتر path تعیین کرده‌ایم بعنوان فهرست فعّال قرار می‌دهد. اگر دستور cd بدون پارامتر مورد استفاده قرار گیرد فهرست جاری نمایش داده می‌شود.

برای برگشتن از فهرست جاری به یک فهرست قبل از آن (در واقع نه فهرستی که زیر فهرست فعال از آن منشعب شده است) از ..CD استفاده می‌کنیم و برای برگشتن به فهرست اصلی (Roor directory) از هر زیرفهرستی که در آن قرار داریم از \CD استفاده می‌کنیم.

Rmdir (rd)

نوع دستور : داخلی

فرم کلی دستور: rd [drive:]path یا rmdir [drive:] path

توضیح : این دستور برای حذف یک فهرست مورد استفاده قرار می‌گیرد. یک فهرست (directory) فقط زمانی از بین می‌رود که کاملاً خالی باشد. یعنی بجز شاخه‌های و ... که بطور اتوماتیک تشکیل می‌شوند هیچ فایلی یا فهرست دیگری در آن موجود نباشد علامت ... به فهرست جاری اشاره دارد و علامت ... به فهرستی که فهرست جاری از آن منشعب شده است (اصطلاحاً می‌گویند "پدر فهرست جاری" =its parent directcry). برای حذف یک فهرست (directory) ابتدا کلیه فایلهای درون آن را پاک کرده، سپس تمامی زیر فهرستهای آن را از بین می‌بریم. حال می‌توان با استفاده از دستور rd خود فهرست را از بین برد. بعنوان مثال در اینجا می‌خواهیم زیر فهرست pascal را از بین ببریم :

```
Del    C:\pascal\ karol\*. *
RD     C:\pascal\ karol
Del    C:\pascal\ David\*. *
RD     C:\pascal\ David
Del    C:\pascal\*. *
RD     C:\pascal
```

۶ـ۲ـ آشنایی با نرم‌افزار Derive

بستهٔ نرم‌افزاری Derive برای محاسبات عددی، نمادین و عملیات گرافیکی به کار می‌رود. این سیستم یک محیط کار ریاضی ایجاد می‌کند که در آن می‌توان به حل عددی یا حل نمادین مسائل ریاضی پرداخت. توانایی گرافیکی این نرم‌افزار در تجسم برخی ساختارهای مجرد ریاضی، وسیله‌ای قوی در اختیار فراگیران قرار می‌دهد. در مجموع این نرم‌افزار برای آموزش ریاضی و کار در قلمروهای مختلف ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرد که در این مجموعه ابتدا به‌طور خلاصه به روش راه اندازی و طریقهٔ استفاده از دستورهای نرم‌افزار اشاره شده و سپس با گوشه‌ای از موارد استفادهٔ این نرم‌افزار در زمینهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال (حسابان) آشنا خواهیم شد.

راه اندازی

پس از آماده‌کردن کامپیوتر نخست یک زیرفهرست به نام Derive در دیسک ثابت بسازید و وارد آن شوید. سپس دیسک حاوی Derive را در دیسک‌گردان A قرار داده و دستور *.* A: copy را وارد کنید. به این ترتیب برنامه در دیسک ثابت کامپیوتر کپی شده و بعد از این به راحتی تنها با تایپ کلمهٔ Derive نرم‌افزار فوق فعال شده و می‌توانید از آن استفاده کنید. در ضمن بهتر است دیسک حاوی Derive را بایگانی نموده و در مواقعی که خللی در برنامهٔ ضبط شده در کامپیوتر ایجاد شد به‌عنوان مرجع به آن مراجعه کنید.

به محض فعال‌شدن نرم‌افزار Derive صفحهٔ زیر که ما آن را پنجرهٔ اصلی می‌نامیم، ظاهر می‌شود.

DERIVE

A Mathematical Assistant

Version 2.02

Copyright (C) 1988 and 1990 by Soft Warehouse, Inc.

Honolulu, Hawaii, USA Press H for help

COMMAND: Author Buid Calculus Declare Expand Factor Help Jump Solve Manage Options Plot Quit Remove Simplify Transfer move Window approx

Enter option

Free: 100% Derive Algeb

دو خط آخر نمایشگر دستورات برنامه هستند. همانطور که ملاحظه می‌کنید در هر دستور یک حرف از هر کلمه به‌صورت بزرگ نمایش داده شده مانند approX و Build و شما می‌توانید دستورها را تنها با تایپ این حروف صدا بزنید. همچنین با حرکت در میان دستورها به سمت راست توسط کلید Tab و به سمت چپ توسط کلید Backspace می‌توانید دستور مورد نظر را انتخاب نموده و با زدن کلید Enter وارد آن شوید و برای خروج از هر مرحله کافی است کلید Esc را فشار دهید.

لازم به ذکر است که برخی از دستورها شامل زیردستوراتی می‌باشند که نحوهٔ انتخاب و ورود و خروج آنان نیز مطابق آنچه که گفته شد انجام می‌شود.

مثال: با زدن کلید C وارد دستور Calculus می‌شوید که خود شامل دستورات زیر می‌باشد.

CALCUS: Differentiute Integrate limit Product Sum taulor

با فشاردادن کلید S وارد زیردستور Sum شده و با یکبار زدن کلید Esc به دستور Calculus و با فشاردادن مجدد آن به پنجرهٔ اصلی باز خواهید گشت.

قبل از انتخاب هر دستوری برای وارد کردن عبارت ریاضی خود ابتدا باید دستور Author را انتخاب نموده و بعد از وارد کردن عبارت مورد نظر آن را کلید Enter را فشار دهید. چنانچه عبارت شما دارای اشتباه باشد با پیغام Syntax error مواجه می‌شوید و در این حالت نشانگر کامپیوتر در محل اشتباه قرار می‌گیرد که برای اصلاح آن می‌توانید نکات زیر را مورد استفاده قرار دهید.

با کلید Backspace و یا Delete می‌توانید آخرین حرف را پاک کنید و با حرکت به سمت چپ با فشاردادن همزمان کلیدهای Crl و S و به سمت راست با فشاردادن کلیدهای Ctrrl و D نشانگر کامپیوتر را در محل مورد نظر خود قرار دهید.

برای خروج از Derive کافی است حرف Q را تایپ کرده و پس از دریافت پیغام ?Abandon expressions (Y/N) با انتخاب Y از برنامه خارج می‌شوید.

در ضمن برای کسب اطلاعات بیشتر در رابطه با نرم‌افزار فوق می‌توانید از دستور Help که شامل هفت قسمت می‌باشد، استفاده نمایید.

در ادامه کاربرد و طریقهٔ استفادهٔ برخی از دستورات Derive در سه بخش عمده تحت عناوین، عملیات محاسباتی و جبری، عملکرد گرافیکی و حساب دیفرانسیل انتگرال برای شما شرح داده شده است.

عملیات جبری و محاسباتی

از جمله دستوراتی که در این نرم‌افزار با استفاده از آنها می‌توان برخی از اعمال جبری و محاسباتی را در ریاضیات انجام داد عبارتند از Simplify، Solve، Expand، Factor که در ادامه به‌طور مختصر با نحوهٔ کار هریک آشنا می‌شویم.

الف ــ دستور Factor: این دستور همراه با دستورات زیر ظاهر می‌شود.

FACTOR: Amount: Trivial Squarefree Rational radical Complex

و با توجه به زیر دستور انتخابی شما عبارت مورد نظر را تجزیه می‌کند که به ترتیب به شرح عملکرد هریک از زیر دستورات فوق می‌پردازیم.

ــ ***زیر دستور Trivial:*** عبارت را برحسب کمترین توان متغیرها و بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک ضرایب تجزیه می‌کند.

مثال: عبارت $۲x^۳-۱۲x^۲+۱۸x$ را به طریق زیر وارد کرده و جواب را دریافت می‌کنید.

کلید F

FACTOR expression: 2x^3 – 12x^2 +18x

کلید Enter

کلید T

$1{:}2x(x^2\text{-}6x+9)$

ــ ***زیر دستور Squarfree:*** عبارات را به‌صورت حاصلضربی از جمله‌ها با توانهای مختلف تجزیه می‌کند.

مثال: تجزیهٔ عبارت قبلی را به‌صورت زیر نمایش می‌دهد.

کلید F

FACTOR expression: 2x^3-12x^2+18x

کلید Enter

کلید S

1:2x(x-3)^2

ـــ زیر دستور *Rational*: عبارت را به جملاتی تا حد ممکن با ضرایب در $\mathbb{R}$ تجزیه می‌کند.

مثال: تجزیهٔ $x^۴+۲x^۳-x^۲-۸x-۴$ به‌صورت زیر است.

FACTOR expression: x^4+2x^3-x^2-8x-4

کلید Enter

کلید R

1:(x-2)(x+1)^2(x+2)

ـــ زیر دستور *raDical*: با استفاده از دستور فوق شما می‌توانید تجزیه عبارت مورد نظر خود را به‌صورت حاصلضربی از جملاتی با ضرایب کسری و یا اعشاری مشاهده کنید. که البته شکل ضرایب انتخابی خود را می‌توانید با استفاده از زیر دستور Precision دستور Option که خود شامل زیر دستورات فوق می‌باشد تعیین نمایید.

OPTIONS PRECISION: Mode: Approximate Exact Mixed Digits: 6

مثال: تجزیهٔ عبارت $x^۲-۲$ در زیردستور Precision در حالت Mix یا Approximate با ضرایب اعشاری به‌صورت $(x-۱/۴۱۴۲)(x+۱/۴۱۴۲)$ است و در حالت Exact به‌صورت $(x-\sqrt{۲})(x+\sqrt{۲})$ می‌باشد.

ب ــ دستور Expand

دستور فوق عکس دستور Factor عمل می‌کند به این ترتیب که عبارتهای حاصلضربی را با انجام عمل ضرب به صورت یک عبارت واحد با ضرایبی در حالت انتخابی زیر دستور Precision نمایش می‌دهد.

مثال: عبارت حاصلضربی $(x-\sqrt{۲})(x-\sqrt{۳})$ در حالت Mixed یا Approximate به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود.

کلید E

EXPAND expression: (x-sqrt 2)(x-sqrt 3)

کلید Enter

x^2-3.1462x-24494

و درحالت Exact به طریق مشابه به‌صورت $x^۲-\sqrt{۲}x-\sqrt{۳}x+\sqrt{۶}$ نشان می‌دهد.

ج ــ دستور Simplify: ساده‌کردن عبارت با توجه به حالت انتخابی در زیردستور Precision توسط این دستور صورت می‌گیرد. در عملیات ساده‌کردن دستور فوق نه‌تنها حذف عامل مشترک از صورت و مخرج کسر و حذف عنصر بی اثر عمل جمع یا ضرب را انجام می‌دهد بلکه همانطورکه در قسمت‌های بعدی مشاهده خواهید کرد در انجام محاسبات دیفرانسیل و انتگرال و حل معادلات نیز برای دستیابی به جواب ساده شدهٔ نهایی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

د ــ دستور Solve: با استفاده از این دستور می‌توانید جواب معادله یا نامعادلهٔ مورد نظرتان را در حالت انتخابی خود در زیر دستور Precision دریافت کنید. در ضمن برای حل عباراتی با بیش از یک متغیر با تایپ جملهٔ Solve (u,x) در دستور Author و سپس استفاده از دستور Simplify حل معادله یا نامعادلهٔ u را برحسب متغیر x خواهید داشت. توجه کنید که علامت curuearrowright یعنی معادله شما بی‌نهایت جواب دارد.

مثال: حل معادلهٔ $x^۲-۴=۰$ و نامعادلهٔ $-۲x+۳y\le ۷$ نسبت به متغیر x به ترتیب به‌صورت زیر انجام‌پذیر است.

کلید L

SOLVE expression: x^2-4

کلید Enter

1:X=2

2:X=−2

کلید A

AUTHOR expression: Solve (−2x+3y<=7,x)

کلید Enter

1:SOLVE (−2x+3y≤7,x)

کلید S

SIMPLIFY expression #1

Enter

$$2:x \ge \frac{3y-7}{2}$$

عملکرد گرافیکی

از جمله امکانات خوب نرم‌افزار Derive عملکرد گرافیکی آن می‌باشد که به‌طور عمده با دستور Plot قابل اجراء بوده و با استفاده از آن می‌توان نمودارهای توابع را روی صفحهٔ کامپیوتر مشاهده کرد. در این قسمت به بیان عملکرد دستور Plot و مختصری از زیردستورهای آن که به‌صورت زیر ظاهر می‌گردد بسنده می‌کنیم.

COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window Zoom

Enter option

Cross x:1 y:1 Scale x:1 y:1 Derive 2D-pl

ـــ **زیردستور Algebra:** با انتخاب این زیردستور به پنجرهٔ اصلی باز می‌گردید.

ـــ **زیردستور Center:** با حرکت‌دادن نشانگر کامپیوتر به سمت راست یا چپ، بالا یا پایین و سپس با استفاده از این دستور می‌توانید دنبالهٔ نمودار را در سمت راست یا چپ و به همین ترتیب بالا یا پایین ملاحظه کنید.

ـــ **زیردستور Option:** زیر دستور فوق به‌صورت زیر ظاهر می‌شود.

OPTIONS: Accuracy Color Display Execute Mute Notation Precision Radix State Enter Option

Cross x:1 y:1 Scale x:1 y:1 Derive 2D-pl

که در آن زیردستور Accuracy برای دقت رسم در نظر گرفته شده که با انتخاب اعداد ۱ تا ۹ به‌طور صعودی میزان دقت رسم کاهش می‌یابد. زیردستور Display از اهمیت زیادی برخوردار است و قبل از هر کاری لازم است که در این زیردستور کامپیوتر در حالت Grsphic قرارگیرد.

ـــ **زیردستور Plot:** عبارت مشخص‌شده را رسم می‌کند.

ـــ **زیردستور Scale:** برای تغییر نسبت واحدهای محورهای مختصات به‌طور همزمان به‌کار می‌رود که به این ترتیب در بزرگنمایی شکل تغییر ایجاد می‌شود.

ـــ **زیردستور Zoom:** در بزرگنمایی محورهای مختصات تک تک و یا همزمان به‌صورت زیر تغییر ایجاد می‌کند. به این ترتیب که با هر بار فشاردادن کلید F9 شکل را نسبت به محور انتخابی به نسبت ...,۱۰,۵,۲,۱,۰/۵,۰/۲,۰/۱,۰، بزرگ و با هربار زدن کلید F10 شکل به‌ترتیب نسبتهای ذکرشده کوچک می‌شود.

مثال: برای رسم نمودار تابع $y = x^2$ به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

کلید A

کلید Enter

کلید AUTHOR expression: x^2

کلید Enter

کلید $1{:}x^2$

کلید P

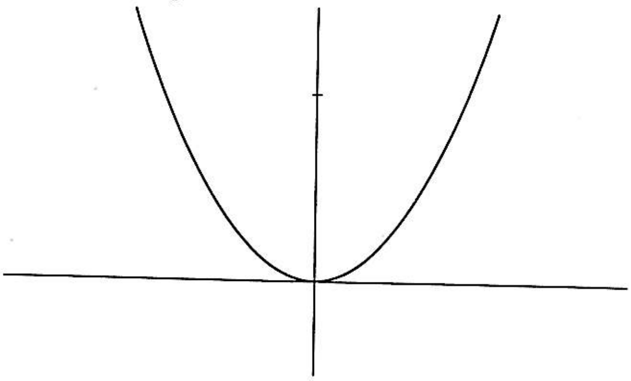
کلید ( )

کلید D

کلید Back Space

کلید Enter

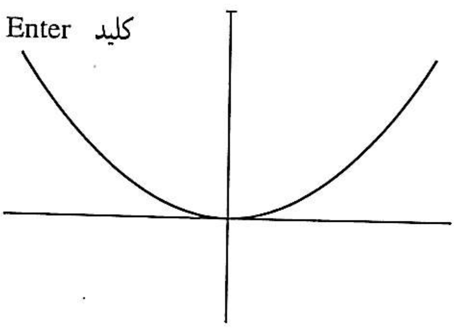
کلید P



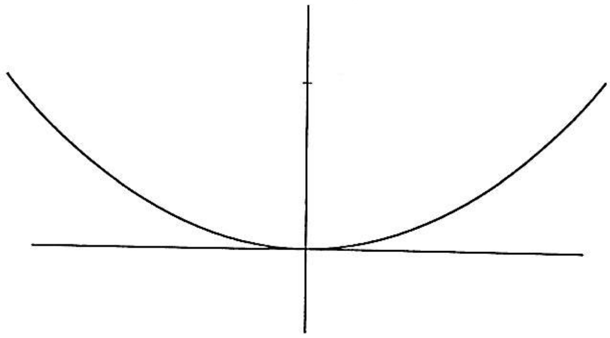
چنانچه نمودار فوق را Zoom کنیم شکل زیر را خواهیم داشت.

کلید Z

کلید Enter



و با یکبار زدن کلید F9 شکل زیر ایجاد می‌شود.



توابع و نمودار آنها

در این قسمت خواهیم دید که چگونه با استفاده از دستوراتی که تاکنون آموخته‌ایم می‌توان به راحتی صفرها، دامنه و برد توابع و نیز مفاهیم دیگری از قبیل معکوس‌پذیری، صعودی یا نزولی بودن توابع و غیره را تعیین کرد. برای تعیین موارد فوق با استفاده از نمودار تابع دستور Plot را به‌کار می‌بریم. به عنوان مثال به کمک این دستور توابع زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

الف) $f(x)=\dfrac{x^{3}-5x^{2}-x+5}{10}$

ب) $f(x)=x^{4}-\sqrt{1-x}$

حل

الف ــ تابع الف را به‌صورت عبارت (x^3-5x^2-x+5)\10 وارد کامپیوتر نموده و برای ترسیم نمودار آن مطابق زیر عمل می‌کنیم.

کلید A

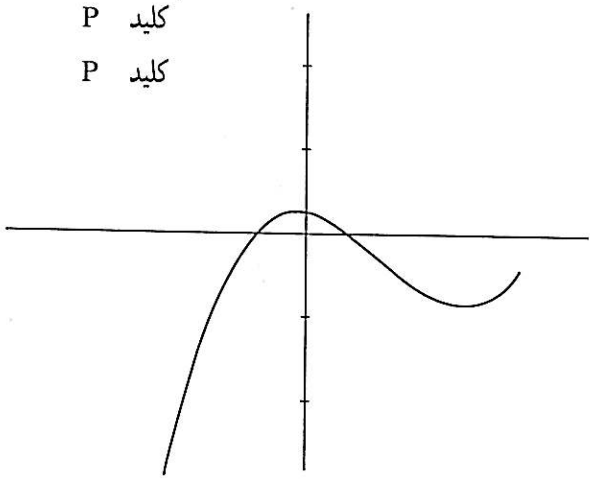
AURHOR expression:(x^3-5x^2-x+5)\10

کلید Enter

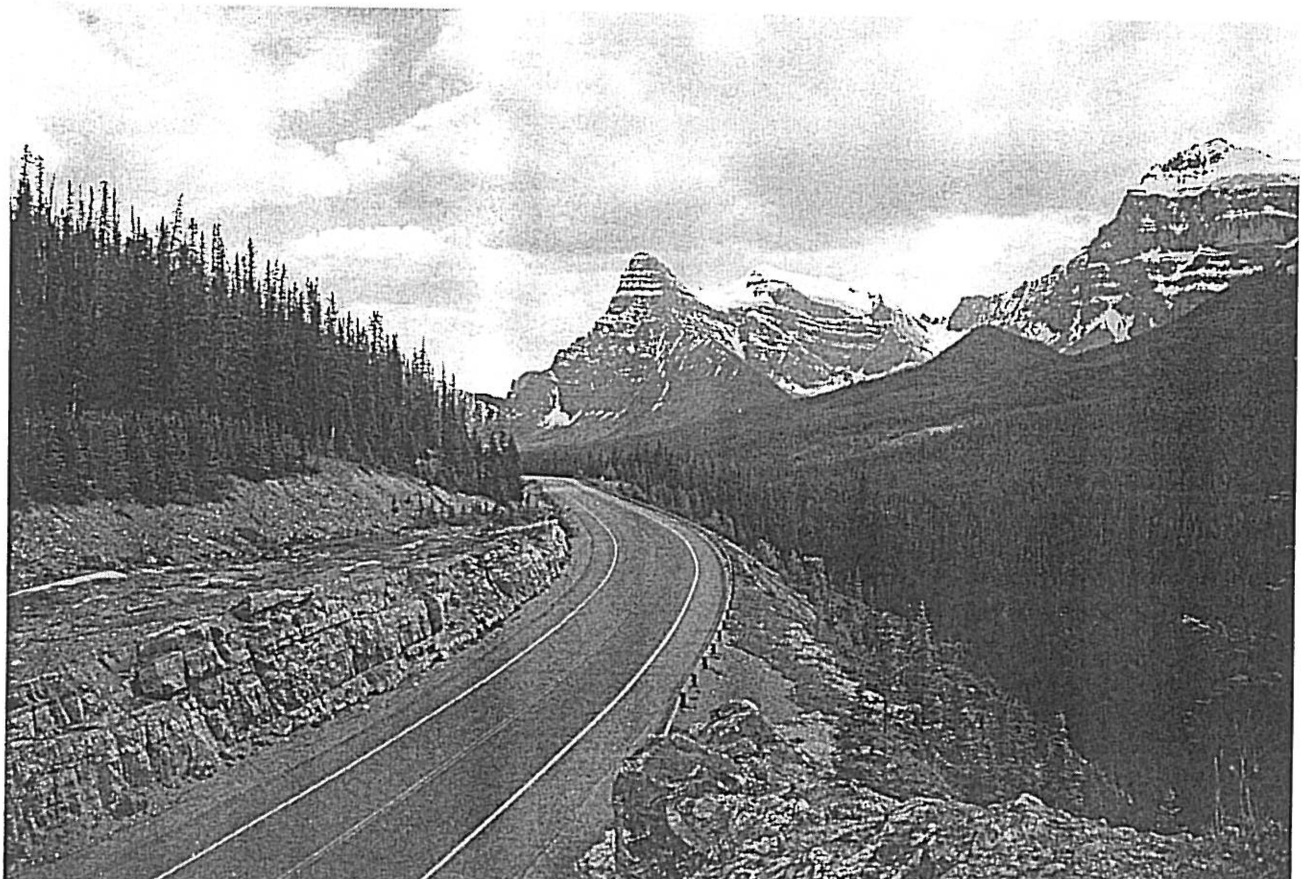
$\dfrac{x^{3}-5x^{2}-x+5}{10}$

کلید P

کلید P

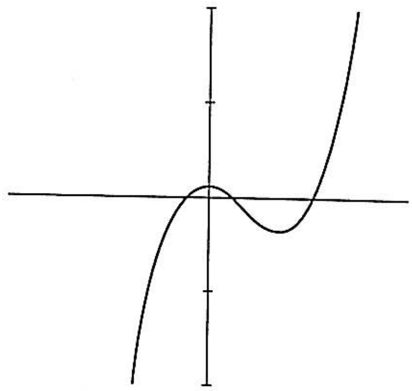


از آنجایی که چند جمله‌ایهای درجهٔ ۳ ممکن است دارای سه ریشه باشند در حالی که نمودار فوق تنها دو ریشه نمایش می‌دهد با Zoom کردن روی نمودار فوق می‌توانید از وجود یا



عدم وجود ریشهٔ دیگر اطمینان حاصل کنید.

برای تعیین مختصات هر نقطهٔ نمودار از جمله صفرها کافی است نشانگر کامپیوتر را توسط کلیدهای $\rightarrow, \uparrow, \downarrow, \leftarrow$ در محل موردنظر روی نمودار قرارداده و سپس مختصات نقطهٔ موردنظر را در گوشهٔ چپ کامپیوتر جلوی کلمهٔ Cross بخوانید. در شکل زیر مختصات نقطهٔ تعیین شده توسط نشانگر کامپیوتر را که (۱،۰) می‌باشد، ملاحظه می‌کنید.



برای یافتن صفرهای توابع می‌توانید با وارد کردن تابع موردنظر خود در دستور Solve نیز عمل کرده، سپس لیست صفرها را در خروجی پنجرهٔ اصلی مشاهده کنید. مثلاً در مورد همین تابع می‌توان بطریق زیر نیز عمل کرد.

کلید L

SOLVE expression:(x^3-5x^2-x+1)\10

کلید Enter

$x = 1$

$x = -1$

$x = 5$

نکته: هربار پس از مشاهدهٔ نمودار موردنظر برای ترسیم نمودار بعدی با استفاده از دستور Delete نمودار قبلی را در صفحه پاک نمائید.

حل

ب ـ مانند مثال قبل تابع را به طریق زیر وارد کامپیوتر کرده و آن را ترسیم می‌کنیم.

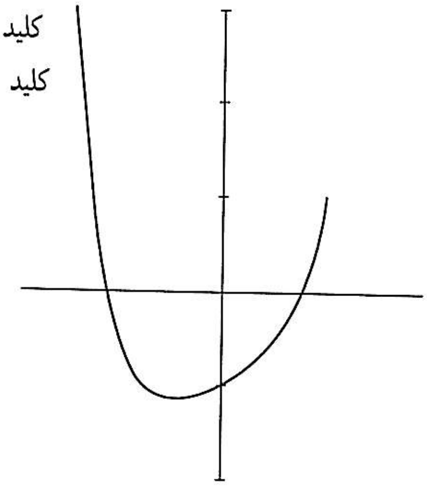
کلید L

AUTHOR expression: x^4-sqrt (1-x)

کلید Enter

کلید P

کلید P



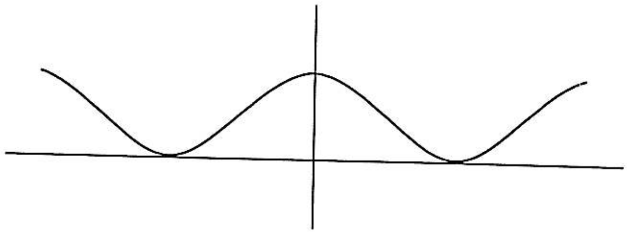
برای تعیین دامنه تعریف تابع نیازی به محاسبه و حل نامعادلهٔ $۱ - x > ۰$ ندارید بلکه نمودار تابع که توسط دستور Plot ترسیم شده خود بیانگر این حقیقت می‌باشد که تابع فوق تنها به ازای اعداد حقیقی کمتر از یک تعریف شده است. همانطور که در شکل مشاهده می‌کنید ممکن است مقدار تابع به میزان دلخواه بزرگ شود ولی نمی‌تواند کوچکتر از مقداری که قسمت انتهایی نمودار نشان می‌دهد، باشد. با قراردادن نشانگر کامپیوتر در منتهاالیه پائینی نمودار مقدار تابع در موقعیت فوق به‌طور تقریبی به دست می‌آید. با استفاده از همین روش صفرهای تابع عبارتند از $x = -۱/۲$ و $x = ۰/۸$ که البته برای پیدا کردن صفرها دستور Solve را نیز می‌توان به‌کار برد.

از جمله اطلاعات جالب دیگری که نمودار تابع فوق در اختیار ما می‌گذارد جواب نامعادلهٔ $x^۴ < \sqrt{۱-x}$ می‌باشد. می‌دانیم که نامعادلهٔ فوق زمانی صحیح است که نمودار تابع $x^۴ - \sqrt{۱-x}$ زیر محور xها واقع باشد و با توجه به شکل فوق این اتفاق بین دو صفر تابع می‌افتد پس جواب نامعادله عبارتست از $-۱/۲ < x < ۰/۸$.

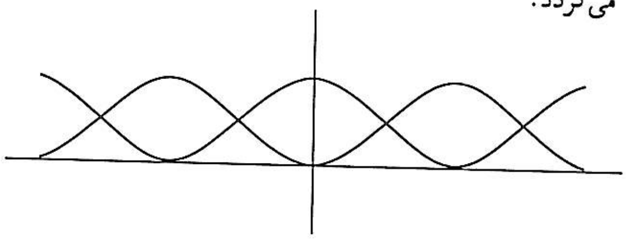
توابع دیگری که بررسی نمادین و گرافیکی آنها جالب می‌باشند، عبارتند از توابع مثلثاتی و متناوب که نمونه‌هایی از آنها را در ادامه خواهیم دید. نکته‌ای که در زمینهٔ کار با توابع مثلثاتی در نرم‌افزار Derive قابل ذکر می‌باشد، این است که در این نرم‌افزار اندازهٔ زاویه برحسب رادیان درنظر گرفته شده لذا $\sin ۳۰^\circ$ به‌عنوان سینوس ۳۰ رادیان محاسبه می‌گردد و اگر مایل باشید که با سینوس ۳۰ درجه کار کنید می‌بایست عبارت deg را در جلوی عدد ۳۰ تایپ کنید یعنی عبارت قبلی را به صورت sin(30 deg)

وارد نمائید. در مورد توابعی که با نسبتهای مثلثاتی در ارتباط هستند علاوه بر معلوماتی که تاکنون به آنها اشاره کردیم می‌توان تناوبی بودن یا نبودن و نیز دورهٔ تناوب آنها را به‌طور تقریبی تعیین نمود. برای مثال توابع $\cos^2 x$ و $\cos(x^2)$ را در زیر مورد بررسی قرار داده‌ایم.

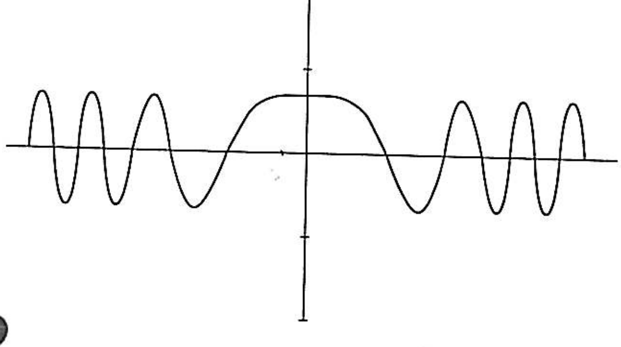
نمودار تابع $\cos^2 x$ را پس از وارد کردن عبارت cosx^2 در دستور Author و انتخاب دستور Plot به صورت زیر داریم :



در شکل فوق تناوبی بودن تابع $\cos^2 x$ به وضوح قابل رؤیت است. حال چنانچه بدون استفاده از دستور Delete نمودار فوق را در صفحهٔ کامپیوتر نگاه داشته و دستور Plot تابع $\cos^2(x+\pi)$ را بدهید. از منطبق شدن نمودار تابع جدید بر روی نمودار قبلی نتیجه می‌شود که π یک دورهٔ تناوب تابع $\cos^2 x$ بوده و $\frac{\pi}{2}$ دورهٔ تناوب تابع فوق نیست زیرا نمودار تابع $\cos^2(x+\frac{\pi}{2})$ نسبت به نمودار تابع $\text{Cos}^2 x$ به صورت زیر ظاهر می‌گردد.



با ترسیم نمودار تابع $\cos(x^2)$ توسط دستور Plot شکل زیر را روی صفحهٔ کامپیوتر ملاحظه می‌کنید که به وضوح تناوبی نیست.



خود را بیازماییم

نمودار توابع زیر را رسم نمایید.

الف) $f(x)=x^2-x-2$

ب) $g(x)=x^3+\sqrt{x-1}-5$

ج) $h(x)=\dfrac{x}{x^3+x+1}$

خود را بیازماییم

ریشه‌های تابع $f(x)=\dfrac{x^3-5x^2-x+1}{10}$ را با حل دستگاه

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^3-5x^2}{10} \\ y=\dfrac{x-1}{10} \end{cases}$$

از طریق ترسیم نمودارها تعیین کنید.

خود را بیازماییم

معادلهٔ $\left|x^2-3\right|<6x$ را حل کنید.

خود را بیازماییم

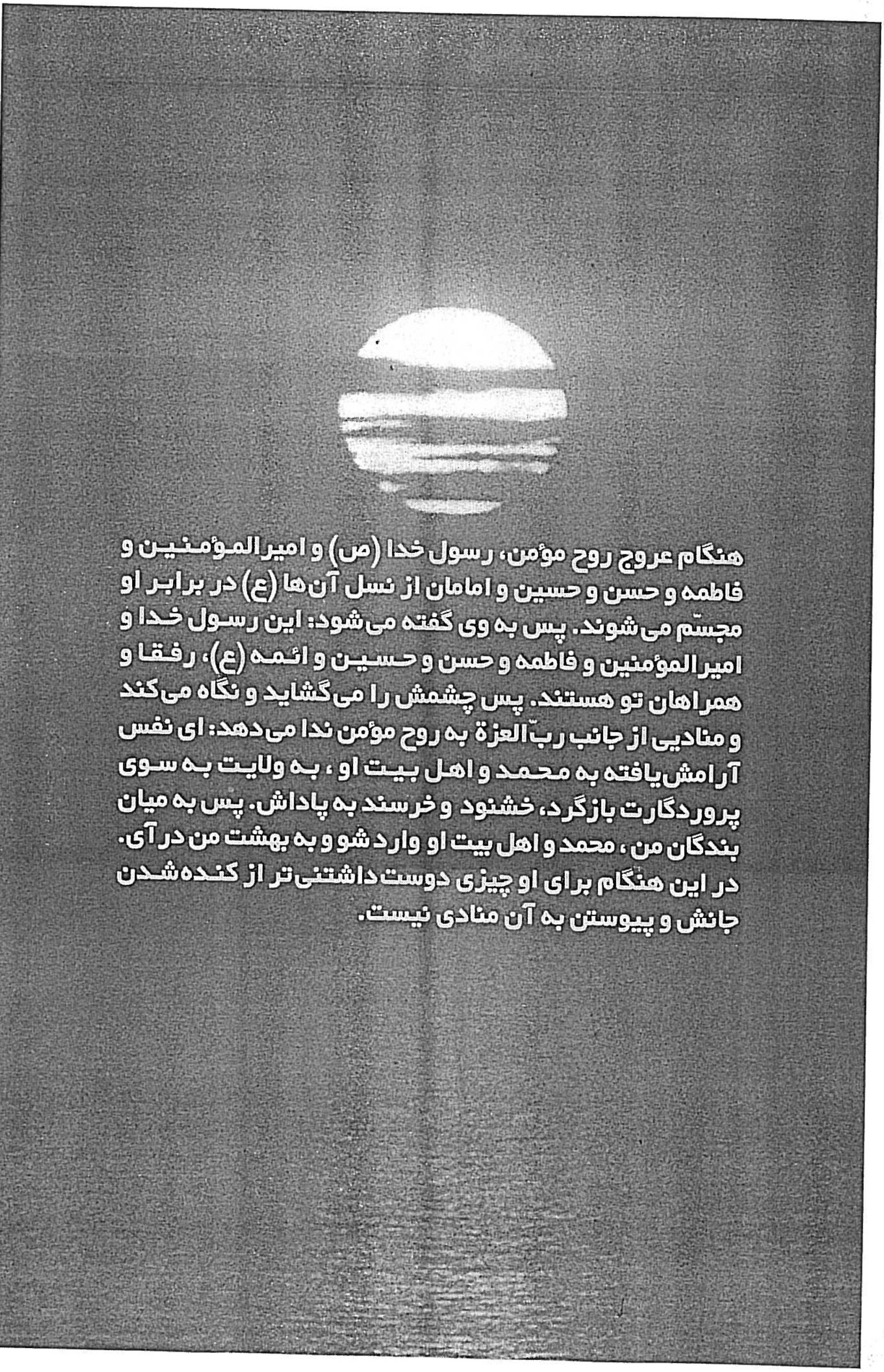
نمودارهای توابع زیر را ترسیم نموده و در صورت تناوبی بودن هر یک دورهٔ تناوب آن را مشخص کنید.

الف) $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$

ب) $g(x)=\dfrac{1}{\sin(\frac{1}{x})}$

ج) $h(x)=\cos 2x$

۱۷۵



هنگام عروج روح مؤمن، رسول خدا (ص) و امیرالمؤمنین و فاطمه و حسن و حسین و امامان از نسل آن‌ها (ع) در برابر او مجسّم می‌شوند. پس به وی گفته می‌شود: این رسول خدا و امیرالمؤمنین و فاطمه و حسن و حسین و ائمه (ع)، رفقا و همراهان تو هستند. پس چشمش را می‌گشاید و نگاه می‌کند و منادیی از جانب ربّ‌العزة به روح مؤمن ندا می‌دهد: ای نفس آرامش‌یافته به محمد و اهل بیت او، به ولایت به سوی پروردگارت بازگرد، خشنود و خرسند به پاداش. پس به میان بندگان من، محمد و اهل بیت او وارد شو و به بهشت من درآی. در این هنگام برای او چیزی دوست‌داشتنی‌تر از کنده‌شدن جانش و پیوستن به آن منادی نیست.