بسم الله الرحمن الرحیم

توسعه‌ی نظریه‌ی رسته‌ها به نقشه‌های مفهومی

آرش رستگار (استادیار)

چکیده

در این مقاله، بدنبال این هستیم که به طور سیستماتیک فرمالیسمی ریاضی بسازیم که در آن مفاهیم ریاضی و ارتباط آن‌ها، انعطاف اشیاء ریاضی در نمایش پشت‌صحنه‌ی مفهومی از پیش تعیین شده، لایه‌های مختلف استنتاج منطقی، و فرهنگ‌نامه‌های بین شاخه‌های مختلف ریاضی مورد تاکید قرار گرفته باشند. قدم بعدی وارد کردن ابعاد انسانی نظریه پردازی از قبیل مهارت‌های نظریه پردازان در فرمولبندی فرضیات‌مناسب و طراحی اهداف تحقیقاتی و برهم‌نهی نقشه‌های مفهومی خواهد بود.

کلمات کلیدی: رسته، چندرسته، مفهوم، استنتاج، تئوری.

مقدمه

نظریه‌ی رسته‌ها با دیدگاه جدیدی به اشیاء ریاضی نظر می‌کند. یک شاخصه‌ی این نظریه، فراهم کردن امکاناتی برای مشخص نمودن اشیاء ریاضی با خواص بیرونی آن‌هاست. برای مثال می‌توان بسیاری از اشیاء را به طور یگانه با در دست داشتن نگاشت‌های حافظ ساختار به سایر اشیاء کاملاً مشخص نمود، بدون اینکه ساختار داخلی این اشیاء را مورد توجه قرار داده باشیم. این باعث می‌شود فرمالیسمی بوجود بیاید که در آن مفاهیمی همچون وردش(functor) و نمایش پذیری(representability) مطرح شود. البته، این نوری روشنگر بر درک ما از اشیاء ریاضی بدست می‌دهد، اما هنوز وقتی این فرمالیسم را با ساده‌ترین و قدیمی‌ترین ساختار ریاضی که همان کتاب «اصول» اقلیدس باشد مقایسه می‌کنیم، بی‌درنگ ضعف نظریه‌ی رسته‌ها در جذب زیبایی‌های ریاضی و عمق ساختارهای عددی و هندسی این سند باستانی علمی بشر آشکار می‌گردد.

در این مقاله قصد داریم فرمالیسمی ریاضی ارائه دهیم که در آن طیف گسترده‌تری از اشیاء ریاضی و نگاشت‌های بین آن‌ها وارد شود تا ما را قادر سازد که دنیای مفاهیم پشت‌صحنه‌ی ریاضی را به زبان ریاضی بیان کنیم. یک میوه‌ی این توسعه، تشخیص لایه‌های مختلف استنتاج منطقی است. همچنین، معنایی دقیق‌تر برای قضایا و هماهنگی منطقی و مفهومی آن‌ها ارائه خواهدشد.

این کار به ما فرصت خواهد داد درک بهتری از فرهنگ‌نامه‌هایی که شاخه‌های به ظاهر بی ارتباط ریاضی را به یکدیگر ترجمه می‌کنند، بدست بیاوریم.

اشیاء ریاضی و خانواده‌ی اشیاء

در یک نظریه‌ی ریاضی ممکن است چند نوع شیء مختلف مورد بررسی قرار گیرند. مثلاً در هندسه‌ی اقلیدسی، نقطه، خط، دایره، بیضی، سهمی و هذلولی مورد بررسی قرار می‌گیرند. همینطور، در یک نظریه‌ی ریاضی ممکن است انواع مختلفی از ریختارها بکار برده شوند. برای مثال، ریختارهای بین نقاط و سایر انواع اشیاء در هندسه‌ی‌اقلیدسی می‌تواند با شمول تعریف شود، ریختارهای بین اشیاء از یک دسته می‌تواند با تشابه تعریف شود، و یا ریختارهایی بین مقاطع مخروطی با تبدیلات تصویری تعریف شود.

همچنین، می‌توان با کمک نمودارهایی که از ریختارها تشکیل شده، از اشیاء متفاوت و ریختارهای بین آن‌ها اشیاء جدیدی تعریف نمود و ریختارهای بین این اشیاء جدید را نیز تعریف و مطالعه نمود. مثال‌هایی از این اشیاء جدید، یک جفت خط، یا یک مقطع مخروطی و یک نقطه روی آن، یا سه‌تایی یک مقطع و یک خط مماس بر آن و نقطه‌ی مشترک بین آن‌ها.

با تعریف چنین اشیائی می‌توان ریختارهای جدیدی نیز تعریف نمود. برای مثال، یک مثلث با ترکیب سه خط و سه نقطه و ریختارهایی بین آن‌ها بدست می‌آید. می‌توان ریختار بین دو مثلث را یک ریختار نمودار ها گرفت که اشیاء متناظر را به هم می‌برد و ریختارهای متناظر جابجا می‌شوند. این ریختار ها ممکن است بین اشیائی از دو جنس متفاوت تعریف شده‌باشند. برای مثال، به زوجی از یک نقطه روی یک مقطع مخروطی می‌توان زوج نقطه و خط مماس بر مقطع در آن نقطه نسبت داد.

مفهوم «زیرشیئی» بودن می‌تواند دو شیء را به هم مربوط کند. مثلاً، یک نقطه می‌تواند زیرشیئی از خط یا صفحه باشد. می‌توان فرض کرد در یک تئوری اشیاء زیرشیئی‌های یک شیء جهانی هستند. یا گروه‌های آزاد آبلی متناهیاً تولید شده زیرشیئی‌های یک گروه جهانی هستند که خود متناهیاً تولید شده نیست. یا نمایش‌های گالوایی به گروه‌های جبری روی میدان‌های متناهی می‌توانند به عنوان زیرشیئی‌های یک نمایش گالوایی جهانی روی یک حلقه جهانی در نظر گرفته شوند. توجه کنید که یک زیرشیئی لزوماً یک زیر مجموعه از ابر شیء خود نیست.

همچنین، «اشیاء نسبی» را می‌توان توسط ریختارهای بین اشیاء تعریف نمود. برای مثال، یک نقطه از خط یک شیئی نسبی است. اشیاء ممکن است زیر شئی‌های یکسانی داشته باشند. برای مثال، یک زوج از خطوط می‌توانند در یک نقطه مشترک باشند یا زوجی از گروه‌ها می‌توانند در زیر گروهی مشترک باشند.

می‌توان خانواده‌ای از اشیاء را با در نظر گرفتن همه‌ی زیرشیئی‌های یک شیء تعریف نمود. خانواده‌ی همه‌ی زیرگروه‌های یک گروه داده‌شده و خانواده‌ی همه‌ی خطوط روی صفحه‌ی اقلیدسی مثال‌هایی از خانواده‌ها هستند. اگر توپولوژی متریک به طور طبیعی روی خانواده‌ای از اشیاء وجود داشته باشد می‌توان معنی دقیقی از دنباله همگرا از اشیاء یک خانواده تعریف نمود. حتی ممکن است اشیاء از یک نوع در حد به شیئی از نوع دیگر میل کنند. مثلاً دوایری که به سمت یک نقطه میل می‌کنند یا هذلولی‌هایی که به سمت یک زوج محور ثابت میل می‌کنند.

می‌توان خانواده‌ای را به یک زیر خانواده محدود نمود. این کار را با قرار دادن شرایطی در مورد زیرشیئی‌های شیء جهانی انجام می‌دهند. برای مثال، خانواده‌ی همه‌ی خطها در صفحه‌ی اقلیدسی که از یک نقطه می‌گذرند خانواده‌ای از خطوط است که

زیرخانواده‌ی همه‌ی زیرخط‌های صفحه است، و مجموعه‌ی همه‌ی میدان‌های اعداد به عنوان زیرشیئی‌هایی از اعداد مختلط که روی اعداد گویا متناهی هستند نیز یک زیر خانواده از همه‌ی زیر میدان‌های اعداد مختلط بدست می‌دهند.

مفاهیم و نقشه‌های مفهومی

مفاهیم به خانواده‌ای از اشیاء یا اشیاء نسبی مربوط می‌شوند که می‌توانند از انواع مختلفی باشند. در واقع، مفاهیم روابط هم‌ارزی روی خانواده‌ای از اشیاء هستند که در زبان و شهود ذهن انسان خوش‌تعریف باشند. به عبارت دیگر، مفاهیم خانواده‌ای اشیاء را با قرار دادن رابطه‌های هم‌ارزی طبیعی روی آن‌ها رده بندی می‌کنند. برای مثال، خانواده‌ی زوج خطوط در صفحه‌ی اقلیدسی را درنظر بگیرید. در اینصورت توازی، تقاطع، تساوی یک رده‌بندی خانواده‌ی زوج خطوط بدست می‌دهند. می‌توان زوج خطوط مساوی را به هریک از دو رده‌ی هم‌ارزی دیگر نیز الحاق نمود. هریک از این دسته‌های هم‌ارزی یک «مفهوم» روی خانواده‌ی زوج خطوط در صفحه بدست می‌دهند.

دو مفهوم را مربوط می‌دانیم اگر دسته‌های هم‌ارزی وابسته به آن‌ها با شمول به هم مربوط باشند. به عبارت دقیق‌تر، اگر بتوان یک خانواده را به خانواده‌ای بزرگ‌تر توسعه داد بطوری‌که مفهوم روی خانواده‌ی بزرگ‌تر زیر مفهومی روی خانواده‌ی اولیه القا کند، این مفاهیم را مربوط می‌نامیم. می‌توان به طور نمادین چنین ارتباطی را با یک پیکان بین این مفاهیم نمایش داد. با این روش، اطلس مفاهیم تعریف دقیقی پیدا می‌کند. مثلاً مفهوم توازی در صفحه‌ی اقلیدسی به مفهوم توازی در فضای اقلیدسی تعمیم پیدا می‌کند. بنابراین، مفاهیم می‌توانند به ابرخانواده‌ها و زیرخانواده‌ها بترتیب تعمیم و تخصیص پیدا کنند. می‌توان با مقایسه‌ی روابط هم‌ارزی«زیرمفاهیم» را نیز تعریف نمود. می‌گوییم یک رابطه‌ی هم‌ارزی مشمول رابطه‌ی هم‌ارزی دیگر است هرگاه هردسته‌ی هم‌ارزی در دومی، اجتماعی از دسته‌های ارزی اولی باشد. برای مثال، مفهوم توازی که در بالا به آن اشاره شد با سه دسته‌ی هم‌ارزی، زیر مفهومی از مفهوم توازی با دو دسته‌ی هم‌ارزی است. ممکن است دو مفهوم، زیر مفهوم مشترکی داشته باشند یا ابر مفهوم یکسانی داشته باشند.

می‌توان اجتماع و اشتراک مفاهیم را بزرگ‌ترین زیرمفهوم مشترک و کوچک‌ترین ابر مفهوم مشترک تعریف نمود. اگر کوچکترین ابر مفهوم مشترک بین دو مفهوم بدیهی باشد، می‌گوییم این دو مفهوم «مستقل» هستند.

ریختارهای بین مفاهیم و مفاهیم نسبی می‌توانند توسط ریختارهای بین روابط هم‌ارزی تعریف شوند. برای تعریف چنین ریختاری می‌توان از یک ریختار بین دو خانواده از مفاهیم شروع کرد و سعی نمود آن را با روابط هم‌ارزی مربوط به مفهوم‌هایی روی این خانواده‌ها در دو طرف هماهنگ نمود.

منظور از خانواده‌ای از مفاهیم تمام زیرمفهوم‌های یک مفهوم داده‌شده از نوع خاص است. یک خانواده از مفاهیم می‌تواند به زیرخانواده‌ای از مفاهیم تخصیص شود. برای مثال، می‌توان خانواده‌ی همه‌ی زیر مفاهیم یک مفهوم داده شده که شامل مفهومی خاصی هستند را در نظر گرفت.

گاهی اوقات خانواده‌های اشیاء را می‌توان در اشیاء جهانی خلاصه نمود. این موجب می‌شود که چنین حکم شهودی را قبول کنیم که می‌توان به خانواده‌ای از اشیاء ریاضی به عنوان یک شیء ریاضی فکر نمود. لازم است روی خانواده‌ای از اشیاء یک توپولوژی طبیعی قرار دهیم. این منجر به «مفهوم باز» می‌شود که در آن اشیاء یک دسته هم‌ارزی نمی‌توانند در حد به اشیاء دسته‌ی هم‌ارزی دیگر میل کنند.

ممکن است مفاهیم از انواع مختلفی باشند یا در حد به انواع دیگری از مفاهیم میل کنند. مثلاً، اگر زوج خطوط در یک صفحه را در نظر بگیریم، توازی یا تقاطع یا تساوی یک مفهوم روی این خانواده است. تساوی یا نامساوی یک زیرمفهوم آن است. تساوی، یا خطوط از زاویه‌ی داده شده یک ابر مفهوم آن است. این ابر مفهوم باز است اما در دو مفهوم معرفی شده می‌توان در حالت حدی به اشیاءدسته‌های هم‌ارزی دیگر میل نمود.

می‌توان به مفاهیم ریاضی به عنوان اشیاء ریاضی نظر کرد و «مفاهیم بالاتر» را با تعریف رابطه‌ی هم‌ارزی روی خانواده‌ای از مفاهیم که اکنون آن‌ها را شیء گرفته‌ایم، تعریف نمود. حتی می‌توان تئوری‌هایی را در نظر گرفت که در آن‌ها مفاهیم را همیشه بتوان به عنوان اشیاء در نظر گرفت. حتی تئوری‌هایی وجود دارند که اشیاء همیشه مفاهیم برای اشیاء طبقات پایین‌تر هستند. چنین تئوری‌هایی را غیرنتری، (Non-Noetherian) می‌نامیم. در چنین تئوری‌هایی لایه‌های تجرید مختلفی وجود دارند که در هر یک شیء و مفهوم معنی خاص خود را دارند.

با ثابت نگه داشتن هر نوع از اشیاء یا خانواده‌ای از این انواع و همچنین با ثابت کردن شیء خاصی از یک نوع یا خانواده‌ای از اشیاء از انواع مختلف می‌توان خانواده‌ای از اشیاء را نسبت داد و روی هر خانواده مجموعه‌ای از مفاهیم پشت صحنه را تعریف نمود. می‌توان ریختارهایی بین اشیاء و خانواده‌های وابسته به آن‌ها را تعریف نمود که ریختاری بین مفاهیم پشت‌صحنه بدست دهند. پس می‌توان اشیاء از انواع مختلف یا مفاهیم از انواع مختلف را با ریختارهایی به هم مربوط نمود. بنابراین خانواده‌های هماهنگ از اشیاء و مفاهیم پشت‌صحنه‌ی آن‌ها و انواع آن‌ها قابل تعریف است. می‌توان از این مقدمات استفاده نمود و برای یک تئوری ریاضی تعریفی دقیق ارائه کرد.

اشیاء جهانی و مفاهیم پشت صحنه

با ثابت گرفتن یک شیء جهانی می‌توان خانواده‌هایی از اشیاء را با کمک این شیء جهانی تعریف نمود. مفاهیم روی این خانواده‌ها مفاهیم پشت‌صحنه‌ی خانوده‌ی جهانی نام دارند. برای مثال، مفهوم توازی یک مفهوم پشت‌صحنه‌ای برای شیء جهانی صفحه است که در آن خانواده‌ی وابسته، خانواده‌ی زوج خطوط در صفحه است. و یا پوشا بودن یک مفهوم پشت صحنه برای نمایش گالوایی جهانی است که در آن خانواده وابسته خانواده‌ی نمایش‌های گالوایی پیمانه‌ای وابسته است.

برای درک مفاهیم پشت‌صحنه‌ی یک شیء جهانی، باید تمام ارتباطات مفهومی و نقشه‌ی مفاهیم مربوط به زیرشیئی‌های شیء جهانی را شناخت. برای مثال، یک خط اقلیدسی نقاط را به عنوان زیرشیئی می‌پذیرد و تنها راهی که می‌توان از مفاهیم روی این مجموعه نقاط صحبت کرد، معرفی روابط هم‌ارزی روی این نقاط است که نابدیهی باشد. اگر ما زوج یک نقطه و خط جهانی را به عنوان زیرشیئی آن انتخاب کنیم، با ثابت گرفتن زیرشیئی به ما اجازه می‌دهد مفاهیم را روی این خانواده تعریف کنیم. مثلاً ساختارهای ترتیبی با زیر مجموعه‌های باز و بسته روی خط حقیقی، و این نقشه مفهومی خط حقیقی را پیچیده‌تر می‌کند. روشن است که نقشه‌ی مفهومی صحنه‌ی اقلیدسی از نقشه‌ی مفهومی خط اقلیدسی پیچیده‌تر است؛ به این دلیل که خط یک زیرشیئی صفحه است و زیرشیئی‌های یک شیء می‌توانند به عنوان زیرشیئی شیء جهانی درنظر گرفته شوند. مثال دیگر نقشه‌های مفهومی یک نمایش پیمانه‌ای تحویل‌ناپذیر است که ساده‌تر از نقشه‌ی‌مفهومی بک نمایش جهانی است. البته یک نمایش پیمانه‌ای تحویل‌ناپذیر، زیرشیئی به معنای کلاسیک ندارد اما می‌توان نمایش‌های زیرگروه‌ها و سایر اشیاء وابسته را به عنوان زیرشیئی یک نمایش پیمانه‌ای در نظر گرفت.

بعضی اوقات خود را به اشیائی محدود می‌کنیم که نقشه‌ی مفاهیم پشت‌صحنه‌ی آن‌ها ساده‌تر باشد تا از پیچیدگی احراز کنیم، اما در آن صورت پیچیدگی به سوی ارتباط بین اشیاء رانده شده‌است. برای مثال، وقتی یک مفهوم تحویل‌ناپذیری را تعریف کنیم و همه چیز را به حالت تحویل ناپذیر تحویل کنیم، سعی می‌کنیم که از پیچیدگی اشیاء ریاضی مورد مطالعه، بکاهیم. از طرف دیگر بعضی اوقات پیچیدگی را به سوی اشیاء می‌رانیم چون ترجیح می‌دهیم روابط بین اشیاء ساده‌تر باشد. در هنگام تعریف یک لغت‌نامه بین دو شاخه‌ی ریاضی باید مواظب بود تا در این ابعاد دوطرف لغت‌نامه هماهنگ باشند.

استنتاج منطقی و ارتباط مفهومی

نباید بر اشیاء خاص تاکید نمود بلکه ساختار اشیاء باید مورد تاکید باشد. می‌توان دو شیء را هم دسته تعریف کرد اگر ایزومرف باشند، اما این فرمالیسم ما را محدود می‌کند زیرا باید به ساختارهای درونی اشیاء توجه کنیم. برای مثال، در هندسه‌ی اقلیدسی، هذلولی‌ها را می‌توان هم‌دسته فرض کرد، اگر چه نامساوی باشند. اگر اشیاء را با تقریب ایزومرفیسم یکی بگیریم، چیزی جز همان نظریه‌ی رسته‌ها را بدست نمی‌دهد.

استنتاج‌های منطقی می‌توانند شمول یا تصویری پوشا بین خانواده‌های اشیاء باشند، یا در حالت کلی ریختارهایی بین خانواده‌های اشیاء که با مفاهیم هماهنگ باشند یا حتی با دسته‌های مورد بررسی هماهنگی داشته باشند. روشن است که چگونه شمول به یک استنتاج منطقی می‌انجامد. اگر یک تصویر پوشا بین دو خانواده از اشیاء داشته باشیم مفاهیم خانواده‌ی دوم مفاهیمی روی خانواده‌ی اول القا می‌کنند و تصویر پوشا یک نتیجه‌گیری منطقی بدست می‌دهد. یک نتیجه‌گیری منطقی را می‌توان به شمول‌ها، تصویرهای پوشا شکست و به زیرشیئی‌ها القا نمود.

بعضی اوقات، ریختارهای بین خانواده‌ها، با ریختارهای بین اشیاء جهانی القا می‌شود و لذا استنتاج‌های منطقی را می‌توان به صورت ریختارهای بین اشیاء جهانی تجسد بخشید؛ ریختارهایی که با مفاهیم پشت‌صحنه‌ی این مفاهیم جهانی هماهنگ‌اند. برای مثال، دوخط موازی در صفحه‌ی اقلیدسی، در هر فضای اقلیدسی شامل آنان موازی هستند. این ریختار با مفاهیم پشت صحنه هماهنگ است. در این مثال برای زوج خطوط در صفحه یا فضا شیئی جهانی فضای مدولی وابسته در نظر گرفته می‌شود.

می‌توان استنتاج‌های منطقی هم دسته را هم تعریف نمود، و همچنین زیر استنتاج و ابر استنتاج با در نظر گرفتن استنتاج منطقی به عنوان شیئی قابل تعریف است. با این وصف چنان نخواهد بود که تمامی استنتاج‌های منطقی از یک درجه‌ی اعتبار برخوردار باشند، بلکه انواع مختلفی از استنتاج متصور خواهد بود. برای مثال، یک استنتاج در هندسه‌ی اقلیدسی می‌تواند روی اعداد مختلط هم درست باشد و یا اینکه فقط روی اعداد حقیقی برقرار باشد. می‌توان دید که بسیاری از گزاره‌هایی که به نظر شگفت انگیز می‌رسیدند دیگر چنین نیستند. هر گزاره ترکیبی از استنتاج‌های طبیعی است و برای تعمیم یک گزاره باید از انواع این استنتاج‌های بکار رفته مطلع بود تا بتوانیم تصمیم بگیریم که آیا هریک قابل تعمیمند یا نه. حتی شاید در این فرمالیسم بتوانیم نتایجی رده‌بندی کننده در مورد تمام روش‌هایی که بتوان یک گزاره را تعمیم داد، ثابت نمود.

می‌توان خانواده‌هایی از استنتاج‌های منطقی تعریف کرد. منظور از خانواده همه‌ی زیر استنتاج‌های یک استنتاج است که از دسته‌ی خاصی باشند. اگر استنتاج‌های منطقی را شیئی بگیریم، برای خانواده‌ای از این اشیاء می‌توان مفهوم تعریف کرد. آن را یک «قالب منطقی» می‌نامیم. مفاهیم زیرقالب، ابر قالب و ریختارهای بین قالب‌ها قابل تعریف است.

قضایا و پدیده‌های ریاضی

قضایا و گزاره‌ها از زنجیرهایی از استنتاج‌های منطقی تشکیل شده‌اند یا زنجیرهایی از خانواده‌ی استنتاج‌های منطقی. با توجه به دسته‌های مختلف استنتاج‌های بکار رفته تعمیم یک قضیه راحت‌تر قابل بررسی است. منظور از تعمیم یک قضیه، توسعه‌ی خانواده‌های استنتاج منطقی یا یک مدل یکریخت به ابر خانواده‌هاست. برای تعریف یکریختی بین استنتاج‌های منطقی، ابتدا باید ریختار بین استنتاج‌های منطقی را تعریف نمود. برای اینکه چنین چیزی ممکن شود، باید از استنتاج‌های منطقی به عنوان شیئی ریاضی صحبت نمود. منطقی است که فرض کنیم چنین ریختارهایی قالب‌های روی اشیاء ابتدایی و نهایی را حفظ می‌کنند.

یک پدیده‌ی ریاضی از یک مجموعه استنتاج‌های منطقی تشکیل شده‌است. که می‌توانند در لایه‌های تجرید مخالفی بکار روند. به عبارت دقیق‌تر، یک پدیده یک کلاس یکریختی مجموعه‌ای از استنتاج‌های منطقی است که در لایه‌های تجرید مختلفی زندگی می‌کنند. یک پدیده‌ی ریاضی در واقع یک تم است که بسته‌ای از چندین مجموعه از استنتاج‌های منطقی با لایه‌های تجرید مختلف را متحد می‌کند. برای مثال، اولین قضیه‌ی ایزومرفیسم می‌تواند به عنوان یک پدیده‌ی ریاضی تصور شود. این بسیار جالب خواهد بود اگر خانواده‌های نابدیهی از پدیده‌ها کشف شوند که دسته‌های مربوط را محترم بشمارند. یک فرمالیسم ریاضی، از یک بسته از پدیده‌های به هم مربوط تشکیل شده است که می‌تواند برای درک بعضی ساختارهای ریاضی بکار رود. به طور دقیق‌تر، یک فرمالیسم ریاضی از یک کلاس یکریختی از قضایا تشکیل شده است. جبرخطی مثالی از یک فرمالیسم ریاضی است.

ریختارهای بین نظریات ریاضی

یک نظریه از مجموعه‌ای از اشیاء و خانواده‌های زیر اشیاء و دسته‌های آن‌ها، مفاهیم و دسته‌های آن‌ها و استنتاج‌های منطقی و قضایا تشکیل شده‌است. می‌توان ریختارهای بین نظریه‌ها را با بردن شیئی به شیئی یا شیئی به مفهومی تعریف کرد چنان‌که با دسته‌های آن‌ها و استنتاج‌های منطقی و قضایا هماهنگ باشد. بنابراین، درلایه‌های تجرید مختلف، می‌توان نظریات یکریختی پیدا کرد.

ریختار از طبقه‌ی صفر(یعنی حافظ لایه‌های تجرید) بین نظریات که شیئی را به شیئی و مفاهیم پشت‌صحنه‌ای را به مفاهیم پشت صحنه می‌برد، پدیده را نیز به پدیده می‌برد و یک لغت‌نامه نامیده می‌شود. ریختار بین این تئوری‌ها با ریختار بین استنتاج‌های منطقی جابجا می‌شود و فرمالسیم‌های ریاضی را به فرمالیسم‌های ریاضی می‌برد. برای مثال، با بردن نقطه به دایره از شعاع ثابت و خط به نواری به همان پهنا، ریختاری از هندسه اقلیدسی به خودش بدست می‌آید که مفهوم را به مفهوم می‌برد و دسته‌ها را احترام می‌گذارد. این ریختار یک ریختار یکریختی از هندسه اقلیدسی به درون خودش می‌دهد.

می‌توان یک تئوری را با توسعه اشیاء به خانواده‌ای گسترده‌تر از اشیاء و تعمیم مفاهیم به آن خانواده‌ها همراه با دسته‌های آن‌ها به یک تئوری گسترده‌تر توسعه داد. اگر فرض کنیم همه‌ی اشیاء یک تئوری زیرشیئی یک شیئی جهانی باشد موجب سادگی کار است. در این صورت، مفهوم زیر تئوری را می‌توان به سادگی کنترل کرد. یک زیر خانواده‌ای از اشیاء همراه با مفاهیم القا شده و دسته‌های آن‌ها یک زیر تئوری را تشکیل می‌دهند. می‌توان تئوری‌های نسبی و ریختار بین تئوری‌های نسبی را تعریف نمود. مثلاً هندسه اقلیدسی صفحه یک زیر تئوری از هندسه اقلیدسی فضای سه بعدی است.

برای تشکیل«تئوری خارج قسمت»، می‌توان اشیاء متشابه را در یک گروه خلاصه نمود چنان که با دسته‌های اشیاء و دسته‌های مفاهیم هماهنگ باشد. به طور دقیق‌تر، کافیست خارج قسمت خانواده‌های اشیاء را از دسته‌های مختلف به یک زیر خانواده تعریف نمود. این کار را می‌توان با یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی یک خانواده‌ی اشیاء انجام داد که هر دسته هم‌ارزی خانواده‌ای از اشیاء است و زیر خانواده را دقیقاً در یک شیئی قطع می‌کند. این کار را می‌توان چنان انجام داد که با مفاهیم و دسته‌های آن‌ها هماهنگ

باشد. با این کار به طور طبیعی مفاهیم خارج قسمت و دسته‌های خارج قسمت تعریف می‌شوند. بدیهی است که تئوری‌های خارج قسمت یک تئوری، لزوماً یکریخت نیستند. توجه کنید که این مفهوم خارج قسمتی که مطرح کردیم با مفهوم خارج قسمت در ساختارهای جبری متفاوت است.

اگر زیر تئوری دیگری داشته باشیم که همان خارج قسمت را بدهد، آن را یک «مقطع» می‌نامیم. گویی که مقطع ریختارهای بین تئوری‌ها را تعریف می‌کنیم.

می‌توان مقاطع تئوری‌های خارج قسمت را به عنوان خانواده‌ای از تئوری‌ها در نظر گرفت. مجموعه همه‌ی زیر تئوری‌های یک تئوری را نیز می‌توان یک خانواده از تئوری‌ها دید. می‌توان محدودیت‌های بیشتر هم در تعریف خانواده تئوری‌ها قائل شد که بر اثر آن احکام جالبی برقرار شود.

خودریختی‌های نظریات ریاضی

می‌توان خودریختی‌های یک تئوری را به عنوان ریختارهای یک تئوری به خودش تعریف نمود. این ریختارها اجازه دارند دسته‌های اشیاء یا مفاهیم را تغییر دهند. خودریختی‌ها می‌توانند اشیاء را ثابت حفظ کنند اما ریختارهای بین آن‌ها را تغییر دهند.

خود ریختی‌های نظریات ریاضی یک تناظر یک به یک بین اشیاء و مفاهیم بوجود می‌آورند که با دسته‌های آن‌ها هماهنگ است. برای مثال، در صفحه‌ی افکنشی، بردن خط به نقطه و نقطه به خط از فضای افکنشی به فضای افکنشی دوگان، یک خودریختی هندسه صفحه‌ی افکنشی است. لزومی ندارد خط خاصی به نقطه‌ی خاصی یا برعکس متناظر شود. می‌توان خودریختی‌های تئوری‌های نسبی را روی تئوری طبقه‌ی پایین ثابت می‌گیریم. هرچنین خودریختی، یک تناظر یک به یک بین استنتاج‌های منطقی بدست می‌دهد. بررسی دینامیک این خودریختی‌ها نیز مسئله‌ی جالبی است به شرط اینکه روی استنتاج‌های منطقی یک توپولوژی تعریف کنیم. خودریختی‌های مرتبه دو«دوگانی» نام دارد. یک خودریختی از مرتبه متناهی یک«تقارن تاب دار» نامیده می‌شود. همانطور که معمول است خودریختی‌ها را می‌توان ترکیب نمود و گروه خودریختی‌های یک تئوری را تعریف کرد.

خارج قسمت یک تئوری نسبت به عمل یک گروه از خودریختی‌ها همیشه یک نظریه است. می‌توان پرسید که آیا قسمتی که یک گروه از خودریختی‌ها ثابت نگه می‌دارد یک زیر تئوری است؟ می‌توان مفهوم خودریختی را به چنین خودریختی‌هایی محدود کرد. برای آنکه یک نظریه ناورداها داشته باشیم منطقی است که تئوری خودریختی را محدود کنیم. فرض کنید چنین نظریه ناورداهایی برای نظریات ریاضی داشته باشیم. می‌توان سعی نمود که یک نظریه گالوا برای شمول تئوری‌ها ارائه نمود. در اینصورت تناظر یک به یکی بین زیر گروه‌های گروه خودریختی‌ها و زیر تئوری‌های یک تئوری نسبی بدست خواهد آمد. با این روش، درک زیر تئوری‌های یک تئوری نسبی به مسئله‌ی شناخت زیر گروه‌های گروه خودریختی‌ها تحویل می‌شود. جالب است اگر مفهوم زیر گروه نرمال به زیر تئوری‌های یک تئوری نسبی قابل ترجمه باشد.

کاربرد در آموزش ریاضی

یکی از مسائل مهم و بغرنج در آموزش ریاضی تعیین درجه سختی یک مفهوم، یک قضیه یا یک مسئله است. در ارزشیابی و هم در برنامه‌ریزی درسی و هم در روش تدریس، درک صحیحی از درجه‌ی سختی موضوع یادگیری بسیار تعیین کننده است.

بعلاوه رده بندی مهارت‌های یادگیری دانش آموزان با درک اجزاء متمایز ساختار ریاضی موضوع ریاضی میسر است. این اطلاعات می‌تواند در عیب‌یابی و ترمیم تفکر ریاضی دانش آموزان که پایه‌ی ریاضی ایشان ضعیف است، بسیار مفید واقع شود.

فرمول‌بندی مفاهیم ریاضی به زبان دقیق ریاضی کمک می‌کند تا ابعاد پشت‌صحنه‌ی ریاضیات در کنار اشیاء ریاضی آشکار شوند و مورد بررسی قرار گیرند. ترجمه‌ی قضایای ریاضی، علی الخصوص ترجمه‌ی مراحل استنتاج به شمول دسته‌های هم‌ارزی از خانواده‌های اشیاء، یکی از پیچیده‌ترین بنیادهای مجرد ریاضی را به ملموس‌ترین وجه ساده‌سازی می‌کنند. پیچیدگی تئوری‌های ریاضی و اشیاء مورد مطالعه در آن‌ها و استدلال‌هایی که در آن تئوری ظاهر می‌شوند با توسعه‌ی نظریه‌ی رسته‌ها به نقشه‌های مفهومی قابل اندازه‌گیری و مقایسه خواهد شد. این اطلاعاتِ کمّی می‌تواند در برنامه‌ریزی درسی مورد استفاده قرار گیرد.

کابرد در نظریه‌ی دگردیسی

مفهوم وردش دگردیسی جهانی و نمایش‌پذیر بودن آن در نظریه‌ی رسته‌ها منجر به این می‌شود که خانواده‌ای از اشیاء ریاضی و ساختار ریاضی آن‌ها در یک شیئی جهانی که همه‌ی این اطلاعات را در بر داشته باشند، خلاصه شود. با توسعه‌ی نظریه‌ی رسته‌ها به نظریه‌ای که در آن تنوع اشیاء و ریختارها وجود دارد امکان آن فراهم می‌شود تا چندین وردش جهانی همزمان در ساختارهای متنوعی خلاصه شوند به طوری که ارتباط بین این ساختارها هم مورد کنترل قرار گیرد. این امکان در نظریه‌ی رسته‌ها که در آن تنها یک نوع شیء و ریختار ظاهر می‌شود، وجود ندارد.

باید متذکر شد که معمولاً اثبات وجود شیئی جهانی و نمایش‌پذیر بودن یک وردش دگردیسی کار مشکلی است. در نظریه‌ی رسته‌ها محک‌هایی توسط گروتندیک برای نمایش پذیری وردش‌ها ارائه شده که بسیار پیچیده است. محک‌های اشلسنیگر برای وردش‌ها روی حلقه‌های موضعی آرتینی صورت ساده شده‌ای از این محک‌هاست که معمولاً در نظریه‌ی اعداد، جبر و هندسه بکار می‌رود. تعمیم این محک از نظریه‌ی رسته‌ها به صورت کلی‌تر آن بسیار مفید خواهد بود.

کاربرد در شمارش

خلاصه کردن خانواده‌ای از اشیاء ریاضی در یک شیئی جهانی که همه‌ی آن ساختارها را دربرداشته باشد اولین بار توسط وایلز شمارش خوانده شد. درواقع این مفهومی تعمیم یافته از شمارش اعداد را بدست خواهد آورد. این شیء جهانی درواقع از نمایش‌پذیر بودن یک وردش دگردیسی بدست می‌آید. امکان دگردیسی هم‌زمان چند وردش به ما کمک خواهد کرد که شمارش چند خانواده از ساختارهای ریاضی را به طور همزمان انجام دهیم و بعضی از تکنیک‌های شمارش را به این فرمالیسم تعمیم دهیم.

کاربرد در روانشناسی ریاضی

برای مدلسازی روند حل مسئله توسط یک ریاضی‌دان لازم است تمام فرایندهای ذهنی او را به زبانی که قابل مطالعه باشد و اجزاء و مراحل پیشرفت به تفکیک در آن مشخص شده باشد، ترجمه بنماییم. زبان نقشه‌ی مفاهیم و توسعه‌ی آن اطلس مفاهیم مراحل تفکر را به زبان مفاهیم مدلسازی می‌کنند. توسعه‌ی نظریه‌ی رسته‌ها به مفاهیم ریاضی این امکان را فراهم می‌کند تا نقشه‌ی مفاهیم با دقت ریاضی مورد مطالعه قرار گیرد و به عنوان یک شیء ریاضی بررسی شود.

کاربرد در منطق ریاضی

نظریه رسته‌ها به عنوان راه فراری از مشکلاتی که در زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها، پیش می‌آید در منطق ریاضی بکار برده می‌شود. توسعه‌ی نظریه‌ی رسته‌ها و ترجمه‌ی مفاهیم ریاضی به این فرمالیسم می‌تواند منجر شود به توسعه‌ی زبان‌های رسته‌ای که در منطق ریاضی بکار می‌رود.

کاربرد در مبانی ریاضی

به هم پیوستن هندسه و حساب یکبار در یونان باستان منجر به خلق علم جبر و بار دیگر در نظریه‌ی شماهای گروتندیک منجر به انقلابی در حل معادلات دیوفانتی گردید. توسعه‌ی نظریه‌ی رسته‌ها فرمالیسمی ریاضی می‌سازد که غنای لازم برای ترجمه‌ی ساختارهای هندسی به زبان شمارش را فراهم می‌نماید. به این ترتیب بار دیگر هندسه و حساب را به هم پیوند خواهد داد.