• در تئوری $\lambda\phi^r$ با توجه به رابطه $rV = E + 2I$ داریم:

$$\boxed{D = d - \frac{E}{2}(d-2) + V\left(\frac{r}{2}(d-2) - d\right)}$$

• Renormalizability - Super renormalizability - Non-renormalizability

Superficial degree of divergence ($\lambda\phi^r$ - theory)

(a) مثال ۱

$\lambda\phi^4$ - theory in $d = 4$ dimensions $\qquad D = 4 - E$ in $d = 4$

$D = 4 - \frac{2}{2}(4-2) = 2$ ✓ واگرا بصورت ربعی

$D = 4 - \frac{4}{2}(4-2) = 0$ ✓ واگرا بصورت لگاریتمی

$D = 4 - \frac{6}{2}(4-2) = -2$ همگرا

هرچقدر تعداد پاهای خارجی نمودار بیشتر می‌شود (E بزرگتر می‌شود) درجه واگرایی کوچکتر می‌شود تا بالاخره (از یک تعداد E به بالا) نمودارها همگرا می‌شوند.

$$\int \frac{d^4k}{(k^2)^3} \cong \int \frac{k^3 dk}{k^6} \simeq \int \frac{dk}{k^3} \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

نکته: این نتیجه ربطی به همگرایی یک سری اختلالی ندارد زیرا در هر سری تعداد پاهای خارجی ثابت است.
(مثلاً در سری اختلالی تابع همبستگی n نقطه‌ای، E همواره مساوی n است).

• از آنجایی که در $d = 4$ بعد، درجه واگرایی D فقط به E بستگی دارد، تعداد معدودی نمودار واگرا در کل تئوری وجود دارند
(نمودارهای دو نقطه‌ای و ۴ نقطه‌ای واگرا و سایر نمودارها همگرا هستند)

به این ترتیب امید می‌رود که با استفاده از برنامه بازبهنجارش (renormalization) بتوان بی‌نهایت‌هائی را که تولید می‌شوند
باز تعریف و مشکل تئوری را حل کرد

می‌گوییم: تئوری بازبهنجارش‌پذیر است. The theory is renormalizable

(b) مثال ۲ تئوری $\lambda\phi^3$ در $d = 4$ بعد

$$D = d - \frac{E}{2}(d-2) + V\left(\frac{r}{2}(d-2) - d\right)$$

$d = 4 \longrightarrow D = 4 - E - V \Leftarrow$ برخلاف مثال ۱، D در این تئوری به V بستگی دارد

$D = 4 - E - V$

در این مثال علاوه بر اینکه با افزایش E (تعداد پایه‌های خارجی) از D کم می‌شود (در نتیجه نمودارها همگراتر می‌شوند) با افزایش تعداد رئوس V در یک سری اختلال (برای E ثابت) هم از مقدار D کاسته می‌شود. این بدان معنی است که در مراتب بالای اختلال D منفی است و در نتیجه نمودارها همگرا هستند.

می‌گوییم: تئوری $\lambda\phi^3$ در $d=4$ بُعد super-renormalizable است.

سؤال ۲ در چه بعدی از فضا تئوری $\lambda\phi^3$ بازبهنجارش‌پذیر (renormalizable) است؟

(ج) مثال ۳ تئوری $\lambda\phi^6$ در $d=4$ بُعد.

$D = 4 - E + 2V$

اگر E را ثابت نگه داریم (یعنی بسط اختلال یک سری اختلالی برای تابع n نقطه‌ای) هرچقدر مرتبه اختلال بالاتر برود (V بزرگتر شود) D مثبت‌تر می‌شود و در نتیجه نمودار واگراتر می‌شود ← در نتیجه بسط اختلال برای E ثابت شامل ∞ نمودار می‌شود که همگی واگرا هستند (در حد $k \to \infty$).

می‌گوییم: تئوری $\lambda\phi^6$ در $d=4$ بُعد non-renormalizable است.

Power-counting for QED

V = # of vertices

E_e = # of external lines for elections

E_p = # of external lines for photons

I_e = # of internal lines for elections

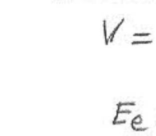
I_p = # of internal lines for photons

سؤال $L =$ تعداد حلقه‌های یک نمودار ؟

$D =$ Superficial degree of divergence ؟

a) از آنجایی که به هر رأس ۲ خط الکترونی و یک خط فوتون می‌چسبد، خواهیم داشت

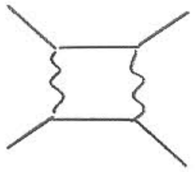
$V - E_p =$ تعداد رئوسی که فوتون خارجی ندارند (زیرا فوتون‌هایی که به آن رئوس می‌چسبند همه داخلی هستند)



$V - E_p = 3 - 1 = 2$ ✓ یعنی دو رأس داریم که فوتون به عنوان پای خارجی به آنها نچسبیده است.

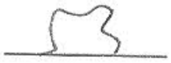
b) $V - E_p = 2 I_p$ می‌توان نشان داد که

$3 - 1 = 2 \times 1$ ✓



$4 - 0 = 2 \times 2$ ✓

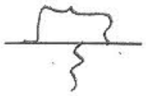
c) تعداد E_e = عدد زوج



$E_e = 2$

خط فرمیونی همیشه وارد سیستم و خارج می‌شود پس تعداد پاهای الکترونی (فرمیونی) همواره زوج است.

d)



$2V = E_e + 2 I_e$

An external electron line touches only one vertex, while an internal electron line touches 2 vertices.

$2 \times 3 = 2 + 2 \times 2$ ✓

e) In analogy to $\lambda\varphi^4$ – theory: $L = (I_e + I_p) - (V - 1)$

تعداد خطوط داخلی (فرمیون + فوتون)

تعداد قیدها یا تابع دلتاها بدون در نظر گرفتن $\delta^4(\Sigma p_{in} - \Sigma p_{out})$

f) Superficial degree of divergence:

$$\int \frac{d^{dL} k}{(2\pi)^{4d}} \frac{1}{(k^2)^{I_p} (k)^{I_e}} \qquad D = dL - 2I_p - I_e$$

به این ترتیب نتیجه می‌گیریم:

$$\boxed{D = \frac{V}{2}(d-4) - \frac{E_p}{2}(d-2) - \frac{E_e}{2}(d-1) + d}$$

For $d = 4$ $\qquad D = d - E_p - E_e \frac{3}{2} = d - (E_p + \frac{3}{2} E_e)$

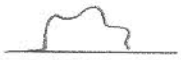
مشابه استدلالی که برای بازبهنجارش پذیری تئوری $\lambda\varphi^4$ کردیم در $d=4$ نیز کوانتوم الکترودینامیک بازبهنجارپذیر است.

نظریه میدان کوانتومی ذرات ۱ شنبه ۹۵/۶/۲۷ جلسه ۱۱

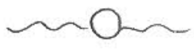
به این ترتیب تعداد نمودارهایی که ∞ دارند بسیار محدود است؛

Primitively divergent diagrams $\qquad D = 4 - \left(E_p + \frac{3}{2} E_e\right)$

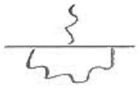
$d = 4$



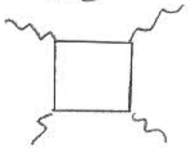
$D = 4 - \left(0 + \frac{3}{2} \times 2\right) = 4 - 3 = 1$ ✓



$D = 4 - \left(2 + \frac{3}{2} \times 0\right) = 4 - 2 = 2$ ✓



$D = 4 - \left(1 + \frac{3}{2} \times 2\right) = 0$ ✓



$D = 4 - \left(4 + \frac{3}{2} \times 0\right) = 0$

Renormalizability and dimensional analysis

$\lambda\varphi^4$-theory : $\qquad S = \int d^d x \, \mathcal{L} \qquad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4$

بُعد جرمی $\quad [\mathcal{L}] = \Lambda^d$

$[\varphi] = ?$

$[m^2 \varphi^2] = \Lambda^d \qquad d - 2 = 2x \longrightarrow \qquad x = \frac{d-2}{2} \qquad [\varphi] = \Lambda^{\frac{d-2}{2}}$

$[\lambda \varphi^4] = \Lambda^d = \Lambda^{x + 4\frac{d-2}{2}} \qquad d = x + 2(d-2)$

$x = -d + 4 \qquad [\lambda] = \Lambda^{4-d}$

for $d = 4 \curvearrowright [\lambda] = \Lambda^0$

λ بدون بُعد جرمی است. $\longrightarrow$ تئوری $\lambda\varphi^4$ در $d = 4$ بُعد بازبهنجارپذیر است.

$\lambda\varphi^r$-theory : $\qquad [\lambda\varphi^r] = \Lambda^{x + r\frac{(d-2)}{2}} = \Lambda^d \curvearrowright$

$x = d - \frac{r}{2}(d-2)$

a) $\lambda\varphi^3 \qquad x = d - \frac{3}{2}(d-2)$; for $d = 4 \curvearrowright x = 1$ (Super renorm.)

b) $\lambda\varphi^4 \qquad x = d - 2(d-2)$; for $d = 4 \curvearrowright x = 0$ (renorm.)

c) $\lambda\varphi^6 \qquad x = d - \frac{6}{2}(d-2)$; for $d = 4 \curvearrowright x = -2$ (non-renorm.)

و این بحث برای همه تئوریها صحیح است

Same dimensional analysis for QED:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 - g\bar{\psi}\not{A}\psi$$

$[\mathcal{L}] = \Lambda^d$

a) $[m\bar{\psi}\psi] = \Lambda^d = \Lambda^{1+2x}$ $\qquad x = \frac{d-1}{2} \xrightarrow{d=4} x = \frac{3}{2} \curvearrowright [\psi] = \Lambda^{\frac{d-1}{2}}$

b) $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \curvearrowright [A_\mu] = \Lambda^x$ $\qquad [\partial_\mu] = \Lambda^1$

$\Lambda^d = \Lambda^{2(1+x)}$ $\qquad x = \frac{d}{2} - 1 = \frac{d-2}{2} \xrightarrow[d=4]{} x = 1$

$\curvearrowright [A_\mu] = \Lambda^{\frac{d-2}{2}}$

c) $[g\bar{\psi}\not{A}\psi] = \Lambda^d = \Lambda^{x + (d-1) + \frac{d}{2} - 1}$

$x = d - d + 1 - \frac{d}{2} + 1 = 2 - \frac{d}{2} = \frac{4-d}{2} \xrightarrow{d=4} x = 0$

This means that QED is in $d=4$ dim a renormalizable theory. $\qquad [g] = \Lambda^{\frac{4-d}{2}}$

منظم‌سازی Regularization:

برای نقش سهم بینهایت انتگرال‌ها نامتناهی باید از منظم‌سازی استفاده کنیم

روش‌های مختلف منظم‌سازی:

a) Cutoff - regularization

منظم‌سازی بر روی شبکه b) Lattice - regularization

c) Pauli - Villars regularization

منظم‌سازی ابعادی d) d - dimensional regularization

این دو روش تقارن Poincaré را حفظ می‌کنند.

روش منظم‌سازی ابعادی تقارن پیمانه‌ای را حفظ می‌کند.

✓ خصوصیت مشترک این روشهای مختلف: برای همهٔ آنها می‌توان یک پارامتر منظم‌ساز تعریف کرد

a) Cutoff Λ $\qquad \Lambda \to \infty$

b) Lattice space a $\qquad a \to 0$

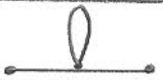
c) Pauli - Villars mass M $\qquad M \to \infty$

d) dimension d $\qquad d \to 4$

!

a) Cutoff Regularization

مثال:



$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2}$$

Wick rotation: $k_0 \to i k_4$

مختصات اقلیدسی
Euclidean.

a) $d^4k_{Mink} = i d^4k_E$

b) $k^2_{Mink} = k_0^2 - \vec{k}^2 = -k_4^2 - \vec{k}^2 = -(k_E^2)$

$\curvearrowright (k_{Mink}^2 - m^2) = -(k_E^2 + m^2)$ $\qquad k_E^\mu = (\vec{k}, k_4)$

$k_E^\mu k_{E\mu} = k_E^2 = \vec{k}^2 + k_4^2$

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \xrightarrow[\text{rotation}]{\text{Wick}} -i \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_E^2 + m^2}$$

(در فضای اقلیدسی انتگرالها قطب ندارند (انتگرال را میتوان در دستگاه مختصات کروی حل کرد)

$$I = \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_E^2 + m^2)} = \int \frac{k_E^3 \, dk_E \, d\Omega_4}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_E^2 + m^2)}$$

Use $\quad d\Omega_d = \left.\frac{(2\pi^{d/2})}{\Gamma(\frac{d}{2})}\right|_{d=4} = \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} = 2\pi^2$

$$I = \frac{2\pi^2}{16\pi^4} \int_0^\infty \frac{k_E^3 \, dk_E}{(k_E^2 + m^2)} \to \infty$$

انتگرال بصورت مربعی واگرا است
$D = 2$

$$I_{reg} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{k_E^3 dk_E}{(k_E^2 + m^2)} = \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{\Lambda^2}{2} - \frac{m^2}{2} \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{m^2}\right)\right)$$

quadratic divergency in $\Lambda \to \infty$

جمله اول بصورت مربعی و جمله دوم بصورت لگاریتمی واگرا هستند.

b) d- dimensional regularization

مثال ساده $\qquad I_E = \int \frac{d^dk_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{k_E^2 + m^2} = \int_0^\infty d\alpha \, e^{-\alpha(k_E^2 + m^2)} \frac{d^dk_E}{(2\pi)^d}$

در فضای اقلیدسی

Schwinger parametrization

از این به بعد اندیس E را صرفنظر میکنیم

a) $$I = \int d^dk \, e^{-\alpha k^2} = \int_0^\infty k^{d-1} dk \, d\Omega_d \, e^{-\alpha k^2}$$

$$= \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty k^{d-1} e^{-\alpha k^2} dk$$

$$= \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \frac{1}{2\alpha^{d/2}} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{d}{2}}$$

$$I_E = \int_0^\infty d\alpha\, e^{-\alpha m^2} \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} e^{-\alpha k^2} = \frac{1}{(4\pi^2)^{d/2}} \frac{(\pi)^{\frac{d}{2}}}{1} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha m^2}}{\alpha^{d/2}} d\alpha$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty d\alpha \frac{e^{-\alpha m^2}}{\alpha^{d/2}} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} (m^2)^{\frac{d-2}{2}} \Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)$$

now use : $\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) = \dfrac{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)}{\left(1-\frac{d}{2}\right)}$

$$I_E = \frac{(m^2)^{\frac{d-2}{2}}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)}{1-\frac{d}{2}} \qquad \begin{array}{l} \epsilon = 4-d \\ d = 4-\epsilon \end{array}$$

$$= \frac{2^{\epsilon-3}\, \pi^{\frac{\epsilon-4}{2}}\, (m^2)^{1-\frac{\epsilon}{2}}\, \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}{\epsilon-2}$$

$$\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + O(\epsilon)$$

$$I_E = \frac{-m^2}{(8\pi^2)\epsilon} - \frac{m^2}{16\pi^2} + \frac{m^2}{16\pi^2}\gamma_E + \frac{m^2}{16\pi^2} \ln\frac{m^2}{4\pi}$$

Note: $\quad * \quad (m^2)^{-\frac{\epsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = e^{\ln (m^2)^{-\frac{\epsilon}{2}}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$

$$= e^{-\frac{\epsilon}{2}\ln m^2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$$

$$\simeq \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\ln m^2\right) \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E\right)$$

$$= \frac{2}{\epsilon} - \underbrace{\ln m^2 - \gamma_E}_{\text{متناهی در حد } \epsilon\to 0}$$

واگرا در حد $\epsilon \to 0$

$$\longrightarrow \quad I_E = \frac{-m^2}{8\pi^2\epsilon} + \text{finite} \quad \text{with } \epsilon = 4-d$$

$$\xrightarrow[\text{Minkowski}]{} \quad (I)_{\text{Mink}} = \frac{+i m^2}{8\pi^2\epsilon} + \text{finite}$$

* این نتیجه را می توان مستقیماً از جدول صفحه ۸۰۷ کتاب Peskin بدست آورد:

[illegible]

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2-\Delta)^n} = \frac{(-1)^n i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma\left(n-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-\frac{d}{2}}$$

نتیجه فوق در فضای Minkowski نوشته شده است.

$$I = \int \frac{d^dl}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^2-\Delta} = \frac{-i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(1)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1-\frac{d}{2}} \leftarrow (n=1)$$

در مورد مثال ما:

$$\Delta = m^2$$

$$= \frac{-i}{(4\pi)^{-2+\frac{d}{2}}} \quad \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{1-\frac{d}{2}}$$

$$\times\, m^2 \left(\frac{1}{m^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{1}{(4\pi)^2} = \frac{+i m^2}{16\pi^2}\left(\frac{4\pi}{m^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)$$

Use:
$$\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}} = 1-\frac{\epsilon}{2}\ln\Delta \qquad \epsilon = 4-\frac{d}{2}$$

$$\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon}-\gamma_E$$

$$\times \Rightarrow \left(\frac{2}{\epsilon}-\gamma_E-\ln\Delta\right) + O(\epsilon)$$

In our case:
$$I = \frac{i m^2}{16\pi^2}\left(\frac{2}{\epsilon}-\gamma_E-\ln\frac{m^2}{4\pi}\right)+O(\epsilon)$$

$$\Delta = \frac{m^2}{4\pi}$$

$$I_{div} = \frac{i m^2}{8\pi^2\epsilon}$$ فعلاً هدف ما تعیین جزء بینهایت انتگرال فاینمن است.

نکته: ما قبلاً همین انتگرال را با استفاده از cutoff regularization تنظیم کرده بودیم نتیجه عبارت بود از

$$(I)_{Reg} = \frac{-i}{8\pi^2}\left(\frac{\Lambda^2}{2}-\frac{1}{2}m^2\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}+1\right)\right)$$

(۱) جمله بینهایت مربعی که در تنظیم سازی cutoff وجود آمده، در تنظیم سازی ابعادی حذف شده است.

یادآوری: انتگرال بصورت superficial بصورت مربعی بینهایت بود.

(۲) از مقایسه این دو نتیجه بدست می‌آید که

$$\Longrightarrow \frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{4-d} \longrightarrow \frac{1}{2}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}$$

(البته با صرفنظر کردن از 1 در عبارت $\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}+1\right)$ در حد $\Lambda\to\infty$).

قدم بعدی: در نمودارهای فاینمن غالباً به علت وجود خود انتشارگرها به توان‌های متفاوت انتگرال فاینمن بصورت $\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d}\frac{1}{(l^2-\Delta)^n}$ یا $\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d}\frac{f(l)}{(l^2-\Delta)^n}$ نیست و ما باید ابزار ریاضی اختراع کنیم انتگرال فاینمن را به این صورت بنویسیم؛

مثال: a) خود انرژی فرمیون

b) خود انرژی فوتون (قطبش خلاء)