a) Fermion Self-Energy:

$$p \xrightarrow{\;p-k\;} \quad (k)$$

$$-i\Sigma(p) = (-ig)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \gamma^\mu \frac{i}{\not p - \not k - m}\, \gamma^\nu \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2}\right)$$

$$= -g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \frac{\gamma^\mu (\not p - \not k + m)\gamma_\mu}{k^2\left((p-k)^2 - m^2\right)}$$

Feynman parametrization (a) مخرج‌ها را مشترک می‌کنیم:

استفاده از رابطه

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx\, \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2}$$

با پارامتر فاینمن α: مخرج $k^2\left((p-k)^2 - m^2\right)$

$$\rightarrow \alpha\left((p-k)^2 - m^2\right) + (1-\alpha)k^2 = \alpha p^2 + \cancel{\alpha k^2} - 2pk\alpha - \alpha m^2 + k^2 - \cancel{\alpha k^2}$$

$$= k^2 - 2pk\alpha + \left(p^2\alpha^2 - p^2\alpha^2\right) + \alpha p^2 - \alpha m^2$$

$$= (k - \alpha p)^2 + \alpha p^2(1-\alpha) - \alpha m^2$$

$$k - \alpha p \equiv k' \qquad \& \qquad -\alpha p^2(1-\alpha) + \alpha m^2 \equiv \Delta$$

$$\Rightarrow \text{مخرج} \quad (k'^2 - \Delta)^2 \qquad : (\alpha A + (1-\alpha)B)^2 \ \text{مطابق}$$

we perform a shift in variables:

$$k = \alpha p + k'$$

صورت $\qquad \not p - \not k + m \longrightarrow \not p - (\not k' + \alpha \not p) + m$

$$d^dk = d^dk' \qquad = \not p(1-\alpha) - \not k' + m$$

$$-i\Sigma(p) = -g^2 \int \frac{d^dk'}{(2\pi)^d} \int_0^1 d\alpha\, \frac{\gamma^\mu\left[\not p(1-\alpha) - \not k' + m\right]\gamma_\mu}{(k'^2 - \Delta)^2}$$

نکته: در انتگرال $\int \frac{d^dk'}{(2\pi)^d}\, \frac{\gamma^\mu \not k' \gamma_\mu}{(k'^2 - \Delta)^2} = 0$ زیرا انتگرالده فرد است، لذا انتگرال مساوی صفر می‌شود (حدود انتگرالگیری متقارن، از $-\infty$ تا $+\infty$ است)

$$\Longrightarrow -i\Sigma(p) = -g^2 \int_0^1 d\alpha\, \gamma^\mu\left[\not p(1-\alpha) + m\right]\gamma_\mu \int \frac{d^dk'}{(2\pi)^d}\, \frac{1}{(k'^2 - \Delta)^2}$$

a) $\gamma^\mu \cancel{p} \gamma_\mu = \gamma^\mu \underbrace{\gamma_\nu \gamma_\mu}_{2g_{\nu\mu} - \gamma_\mu \gamma_\nu} p^\nu$

$$= 2 g_{\mu\nu} \gamma^\mu p^\nu - \underbrace{\gamma^\mu \gamma_\mu}_{d} \gamma_\nu p^\nu = 2\cancel{p} - d\cancel{p} = (2-d)\cancel{p}$$

در بعد d ، $= d$

$$\overset{d=4}{=} -2\cancel{p}$$

b) $m \gamma^\mu \gamma_\mu = d\, m \underset{d=4}{=} 4m$

$$\longrightarrow -i\Sigma(p) = -g^2 \int_0^1 d\alpha \, (1-\alpha)(-2\cancel{p}) \int \frac{d^dk'}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k'^2-\Delta)^2}$$

$$- g^2 \int_0^1 d\alpha \, (4m) \int \frac{d^dk'}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k'^2-\Delta)^2}$$

منظم‌سازی به روش d-dim : هدف صرفاً بدست آوردن سهم بینهایت در این انتگرال‌ها است

use: $I \equiv \int \frac{d^dk'}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k'^2-\Delta)^n}\Big|_{n=2} = \frac{(-1)^2 i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}}$

$2 - \frac{d}{2} = \frac{\epsilon}{2}$

$$= \frac{i}{(4\pi)^{-2+\frac{d}{2}}} \frac{1}{(4\pi)^2} \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}}$$

$$= \frac{i}{16\pi^2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{\Delta}{4\pi}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \cong \frac{i}{16\pi^2}\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E\right)\left(1 - \frac{\epsilon}{2} \ln \frac{\Delta}{4\pi}\right)$$

$$= \frac{i}{16\pi^2}\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E - \ln\frac{\Delta}{4\pi}\right)$$

بخش بینهایت انتگرال I عبارت است از

$$I_{div} = \frac{i}{8\pi^2 \epsilon}$$

$$\Longrightarrow \left(-i\Sigma(p)\right)_{div} = -g^2 \int_0^1 d\alpha \, (1-\alpha)(-2\cancel{p}) \frac{i}{8\pi^2\epsilon}$$

$$- g^2 (4m) \int_0^1 d\alpha \frac{i}{8\pi^2\epsilon}$$

$$= -g^2 \left(-2\cancel{p}\,\frac{1}{2} + 4m\right) \frac{i}{8\pi^2\epsilon}$$

$$= \frac{+ig^2}{8\pi^2\epsilon}(\cancel{p} - 4m) \qquad \text{with } \epsilon = 4-d$$

نکته: اگر از کات‌زنی

$$\frac{1}{\epsilon} \longrightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}$$

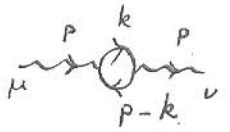
استفاده کنیم نتیجه می‌شود که در cutoff-Regularization قسمت واگرای انتگرال مساوی

$$\left(-i\Sigma(p)\right)_{div} = \frac{ig^2}{16\pi^2} (\not p - 4m) \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}$$

می‌شود. تمرین: اثبات این ادعا.

$$\boxed{\left(-i\Sigma(p)\right)_{div} = \frac{ig^2}{8\pi^2\epsilon} (\not p - 4m)}$$

6) Vacuum polarization $\longrightarrow$ Photon self-energy.



باز هم از روش نظم‌سازی ابعادی استفاده می‌کنیم و فقط قسمت واگرای انتگرال فاینمن مربوط به این نمودار را بدست می‌آوریم.

$$i\Pi_{\mu\nu}(p) = \frac{g^2}{(2\pi)^4} \int d^dk \; \frac{tr.\left[\gamma^\mu (\not k + m) \gamma^\nu (\not k - \not p + m)\right]}{(k^2 - m^2)\left((k-p)^2 - m^2\right)}$$

قدم اول: * در نظم‌سازی ابعادی، در قسمت متناهی معمولاً با عبارت $\ln \frac{\Delta}{4\pi}$ مواجه هستیم که در آن Δ بُعد جرمی مساوی ۲ دارد. این ایراد ریاضی دارد زیرا انتظار داریم که آرگومان لگاریتم بدون بُعد باشد.

برای حل این مشکل (البته یکی از انگیزه‌های روش زیر این مشکل است):

$$g \longrightarrow g\,\mu^{\epsilon/2}$$

در اینجا μ بُعد جرمی دارد، ϵ همان $\epsilon = 4 - d$ است.

این جایگزینی با توجه به بُعد جرمی g در QED انجام گرفته است. (یادآوری: g در QED بُعد جرمی ندارد)

$$i\Pi_{\mu\nu}(p) = g^2 \mu^\epsilon \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \; \frac{tr.\left(\gamma^\mu (\not k + m) \gamma^\nu (\not k - \not p + m)\right)}{(k^2 - m^2)\left((k-p)^2 - m^2\right)}$$

قدم دوم: یکی کردن مخرج‌ها با استفاده از رابطهٔ

$$\frac{1}{a^j b^k} = \frac{(j+k-1)!}{(j-1)!\,(k-1)!} \int_0^1 dx \; \frac{x^{j-1} (1-x)^{k-1}}{\left(ax + b(1-x)\right)^{j+k}}$$

$j = k = 1$

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \; \frac{1}{\left(ax + b(1-x)\right)^2}$$

$$a = k^2 - m^2$$
$$b = (k-p)^2 - m^2$$

$$x\,(k^2-m^2)+(1-x)\,\left((k-p)^2-m^2\right)$$

$$= \cancel{xk^2}-\cancel{xm^2}+k^2+p^2-2kp-m^2-\cancel{xk^2}-xp^2+2kpx+\cancel{xm^2}$$

$$= k^2-2kp\,(1-x)+\underline{p^2(1-x)^2-p^2(1-x)^2}+p^2(1-x)-m^2$$

$$= \left(k-p(1-x)\right)^2+p^2\,(1-x)\,(1-1+x)-m^2$$

$$= \left(k-p(1-x)\right)^2-\left(m^2-p^2x(1-x)\right)$$

$$k \to k' = k-p(1-x) \quad \text{or} \quad k = k'+p(1-x)$$

مخرج کسر : $\quad (k'^2-\Delta)^2 \quad \text{with} \quad \Delta \equiv m^2-p^2x(1-x)$

صورت کسر :

$$\mathrm{tr}\,\left(\gamma^\mu\,(\not k+m)\,\gamma^\nu\,(\not k-\not p+m)\right) \longrightarrow$$

باید جابجایی را انجام دهیم، ولی قبل از آن trace را بازنویسیم.

$$= \mathrm{tr}\left(\gamma^\mu \not k\,\gamma^\nu\,(\not k-\not p)\right)+m^2\,\mathrm{tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\right)$$

$$= k_\alpha k_\beta\,\mathrm{tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta\right)-k_\alpha p_\beta\,\mathrm{tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta\right)+m^2\,\mathrm{tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\right)$$

$$= 4\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}-g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}+g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu}\right)k_\alpha k_\beta-4k_\alpha p_\beta\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}-g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}+g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu}\right)$$
$$+\;4m^2g^{\mu\nu}$$

$$= 4\left(k^\mu k^\nu-g^{\mu\nu}\,k.k+k^\mu k^\nu\right)-4\left(k^\mu p^\nu-g^{\mu\nu}\,k.p+k^\nu p^\mu\right)+4m^2g^{\mu\nu}$$

$$= 4k^\mu(k-p)^\nu-4g^{\mu\nu}\,k.(k-p)+4k^\nu(k-p)^\mu+4m^2g^{\mu\nu}$$

در این عبارت : $\quad k \to k+p(1-x)$

$$\hookrightarrow\; 4\left(k+p(1-x)\right)^\mu\left(k+p(1-x)-p\right)^\nu$$
$$-\,4g^{\mu\nu}\left(k+p(1-x)\right).\left(k+p(1-x)-p\right)$$
$$+\,4\left(k+p(1-x)\right)^\nu\left(k+p(1-x)-p\right)^\mu+4m^2g^{\mu\nu}$$

با کنار گذاشتن جمله‌های فرد در k $\longrightarrow$

$$4\left(k^\mu k^\nu-p^\mu p^\nu x(1-x)-4g^{\mu\nu}\left(k^2-x(1-x)p^2\right)\right.$$
$$\left.+\,k^\mu k^\nu-p^\mu p^\nu x(1-x)\right)+4m^2g^{\mu\nu}$$

در صورت داریم

$\Longrightarrow$ صورت کسر $= 8\left(k^\mu k^\nu-p^\mu p^\nu x(1-x)\right)-4g^{\mu\nu}\left(k^2-m^2-x(1-x)p^2\right)$

$$\boxed{\begin{aligned} i\Pi^{\mu\nu}(p) &= 8g^2\mu^\epsilon\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\int_0^1 dx\,\frac{\left(k^\mu k^\nu-x(1-x)p^\mu p^\nu\right)}{(k^2-\Delta)^2} \\ &\quad -4g^2\mu^\epsilon g^{\mu\nu}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\int_0^1 dx\,\frac{\left(k^2-m^2-x(1-x)p^2\right)}{(k^2-\Delta)^2}\end{aligned}}$$

$$\Delta = m^2 - p^2 x(1-x)$$

- Use:

$$k^2 - m^2 - x(1-x)p^2 = \underbrace{k^2 - m^2 + x(1-x)p^2}_{\Delta} - 2p^2 x(1-x)$$

ما سه انتگرال برای حل کردن داریم

$$(1) \quad 8g^2\mu^\epsilon \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \; \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2-\Delta)^2},$$

$$(2) \quad -8g^2\mu^\epsilon \int dx \; x(1-x) \; (p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}) \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2-\Delta)^2},$$

$$(3) \quad -4g^2\mu^\epsilon g^{\mu\nu} \int_0^1 dx \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2-\Delta)}.$$

$$(I_1)_n = \mu^\epsilon \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2-\Delta)^n} = \frac{i(-1)^{n-1}\mu^\epsilon}{(4\pi)^{d/2}} \frac{g^{\mu\nu}}{2} \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2}-1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-\frac{d}{2}-1}$$

$$(1) \Rightarrow (I_1)_{n=2} = \frac{8g^2\mu^\epsilon i(-1)}{(4\pi)^{d/2}} \frac{g^{\mu\nu}}{2} \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1-\frac{d}{2}}$$

$$= \frac{(-1)8g^2 i}{2(4\pi)^2} g^{\mu\nu} \frac{\Delta}{1-\frac{d}{2}} \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta}\right)^{\frac{4-d}{2}}$$

$\epsilon =$

$$= \frac{8ig^2}{16\pi^2} \frac{g^{\mu\nu}}{2} \Delta \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E\right)\left(1 - \frac{\epsilon}{2} \ln \frac{\Delta}{4\pi\mu^2}\right)$$

$$= g^{\mu\nu} \frac{ig^2}{4\pi^2} \Delta \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E - \ln \frac{\Delta}{4\pi\mu^2}\right)$$

$$(1) = \frac{ig^2}{4\pi^2} g^{\mu\nu} \int_0^1 dx \; (m^2 - p^2 x(1-x)) \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E - \ln\frac{\Delta}{4\pi\mu^2}\right)$$

$$= \frac{ig^2}{2\pi^2\epsilon}\left(m^2 - \frac{p^2}{6}\right) g^{\mu\nu} + \text{finite}$$

$$\boxed{(1) = \frac{ig^2}{2\pi^2\epsilon}\left(m^2 - \frac{p^2}{6}\right) g^{\mu\nu}} + \text{finite}$$

$$(2) \Rightarrow \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2-\Delta)^n} = \frac{i(-1)^n}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-\frac{d}{2}}$$

for $n=2$

$$\longrightarrow \frac{i}{16\pi^2}\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E - \ln\frac{\Delta}{4\pi\mu^2}\right)$$

$$\boxed{(2) = \frac{-ig^2}{6\pi^2\epsilon}(p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}) + \text{finite}}$$

$$(3) \qquad \mu^{\epsilon} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \Delta)} = \frac{-i\mu^{\epsilon}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{\Gamma(1)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1-\frac{d}{2}}$$

$$= \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{\Delta}{1-\frac{d}{2}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta}\right)^{\frac{\epsilon}{2}}$$

$$= \frac{+i}{(4\pi)^2} \Delta \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E\right) \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \ln \frac{\Delta}{4\pi\mu^2}\right) + O(\epsilon)$$

$$= \frac{i}{16\pi^2} \Delta \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E - \ln \frac{\Delta}{4\pi\mu^2}\right)$$

$$(3) = -4g^2 g^{\mu\nu} \int_0^1 dx \left(m^2 - p^2 x(1-x)\right) \frac{2}{\epsilon} \frac{i}{16\pi^2}$$

$$\boxed{(3) = \frac{-ig^2}{2\pi^2\epsilon} g^{\mu\nu} \left(m^2 - \frac{p^2}{6}\right) + \text{finite terms}}$$

$$\boxed{i\Pi^{\mu\nu} = \cancel{(1)} + (2) + \cancel{(3)} = \frac{-ig^2}{6\pi^2\epsilon} \left(p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}\right) + \text{finite}}$$

Ward identity:

$$p_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0$$

$$p_\mu \left(p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}\right) = p^2 p^\nu - p^2 p^\nu = 0$$

$$i\Pi^{\mu\nu}(p) = \left(p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}\right) \Pi(p^2)$$

$$\Pi(p^2) = \Pi_{div}(p^2) + \Pi_{finite}(p^2)$$

$$\Pi_{div}(p^2) = \frac{-ig^2}{6\pi^2\epsilon} + O(g^2)$$