RG- Schemes (Renormalization Group Equation)

• آزادی زیادی برای انتخاب counter term (CT) ها جهت بازتعریف کمیتهای فیزیکی وجود دارد

✓ CT می توانند فقط شامل قسمت ∞ نمودار فاینمن باشند — یا اینکه علاوه بر قسمتهای ∞ بخشی از قسمت متناهی نتیجه انتگرال گیری را شامل شود
(MS-scheme , $\overline{MS}$ scheme , MOM scheme , ...)

✓ نکته اینجاست که تغییر scheme بازبهنجارش نباید تغییری در تئوری بازبهنجار شده بوجود بیاورد — تنها تغییری که بوجود میاید در نحوه پارامتریزه شدن کمیتهای فیزیکی مانند جرم، ثابت جفت شدگی و غیره است.

✓ یکی از روشها برای تغییر شرط بازبهنجارش، Renormalization Prescription، تغییر μ ← مقیاس بازبهنجارش است.

$$\mu \longrightarrow e^s \mu = t\mu$$ تغییر مقیاس

در اینجا $e^s \in$ گروه یک پارامتری تبدیل

سؤال: با تغییر $\mu \rightarrow e^s\mu$ توابع چند نقطه‌ای چگونه تغییر می‌کنند؟

یادآوری: باید برای پاسخ به این سؤال ابتدا یادآوری کنیم که μ کجای توابع چند نقطه‌ای ظاهر می‌شود؟

a) $g_B = g\mu^{\epsilon/2} Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} \Longrightarrow g = g(\mu)$ مثلاً در QED

b) در قسمتهای متناهی نمودارهای فاینمن

$$\Sigma = \Sigma_{div} + \Sigma_f$$

$$\Sigma_f = g^2 \int_0^1 d\alpha \ \ln \frac{(m^2 \pm \alpha(1-\alpha)p^2)}{4\pi\mu^2} \ (-\not{p} + 4m)$$

$g(\mu)$ وابستگی ضمنی به μ — وابستگی صریح به μ

↳ انتشارگر بازبهنجار شده $S_F = \dfrac{i}{\not{p} - m - \Sigma_f(m,g)}$

وابستگی به μ — وابستگی به μ

نتیجه اینکه تابع دو نقطه‌ای علاوه بر وابستگی صریح به μ، به علت وابستگی به g و m و اینکه این کمیتها خودشان به μ بستگی دارند بصورت ضمنی به μ وابسته است.

✓ در ادامه جواب سؤال را در $\lambda\phi^4$ بررسی می‌کنیم؛ ⟵

Callan- Symanzik RG- Equation

Callan - Symanzik RG - Equation :

$\lambda\varphi^4$ - theory : $\qquad \underbrace{\varphi_B}_{\text{bare field}} = Z_\varphi^{1/2} \underbrace{\varphi}_{\text{Renormalized field}}$

$$\hookrightarrow \; G_R^{(n)}(x_1,\dots,x_n) = \langle\Omega|T(\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n))|\Omega\rangle$$
$$= Z_\varphi^{-n/2}\langle\Omega|T(\varphi_B(x_1)\dots\varphi_B(x_n))|\Omega\rangle =$$
$$= Z_\varphi^{-n/2}\, G_B^{(n)}(x_1,\dots,x_n)$$

در فضای فوریه $\quad G_R^{(n)}(x_1\dots x_n) = Z_\varphi^{-n/2}\, G_B^{(n)}(x_1,\dots,x_n)$

$$\hookrightarrow \; \tilde G_R^{(n)}(p_1,\dots,p_n) = Z_\varphi^{-n/2}\, G_B^{(n)}(p_1,\dots,p_n)$$

• توجه کنید که $G_R^{(n)}, \tilde G_R^{(n)}$ توابع چندنقطه‌ای بازبهنجار شده فقط به کمیتهای بازبهنجار شده بستگی دارند.

و $G_B^{(n)}, \tilde G_B^{(n)}$ " " bare " " bare "

• هدف: با فرض اینکه $\tilde G_B^{(n)}(p_1,\dots,p_n)$ تحت تغییرات μ تغییر نمی‌کنند می‌توان تغییرات $\tilde G_R(p_1,\dots,p_n)$ را تحت این تبدیلات بدست آورد.

i.e. $\quad \mu\dfrac{d}{d\mu}\tilde G_B(p_1,\dots,p_n) = 0 \Rightarrow \mu\dfrac{d}{d\mu}\tilde G_R(p_1,\dots,p_n) \neq 0$

Use: $\quad \mu\dfrac{d}{d\mu}\tilde G_B^{(n)}(p_1,\dots,p_n) = 0 = \mu\dfrac{d}{d\mu}\left(Z_\varphi^{n/2}\,\tilde G_R^{(n)}(p_1,\dots,p_n)\right) \qquad *$

$$Z_\varphi = Z_\varphi(\mu)$$
$$,\; \tilde G_R(\{p_i\};\, g_R(\mu),\, m_R(\mu);\, \mu)$$

$$\boxed{0 = \left(\mu\frac{d}{d\mu}Z_\varphi\right)\frac{n}{2}\, Z_\varphi^{\frac{n}{2}-1}\,\tilde G_R^{(n)} + Z_\varphi^{n/2}\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \mu\frac{\partial g_R(\mu)}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial g_R} + \mu\frac{\partial m_R}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial m_R}\right)\tilde G_R^{(n)}}$$

Using :
a) $\mu\dfrac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_\varphi^{1/2} = \dfrac{1}{2} Z_\varphi^{-1}\,\mu\dfrac{d}{d\mu}Z_\varphi \equiv \gamma(g_R(\mu))$

b) $\mu\dfrac{\partial}{\partial\mu}\, g_R(\mu) \equiv \beta(g_R(\mu))$

c) $\mu\dfrac{\partial}{\partial\mu}\, m_R(\mu) \equiv m_R\,\gamma_m(g_R(\mu)) \quad \nearrow$ we obtain

$$(A)\qquad \boxed{0 = \left(n\gamma + \mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(g_R)\frac{\partial}{\partial g_R} + m_R\gamma_m(g_R)\frac{\partial}{\partial m_R}\right)\tilde{G}_R\left(\{p_i\}; g_R(\mu), m_R(\mu)\right)}$$

Callan - Symanzik RG Equation

* حالا می‌خواهیم بستگی به μ را کاملاً حذف کنیم - طوری که تغییرات $\tilde{G}_R^{(n)}$ نسبت به تغییر مقیاس $\mu \to t\mu$ ، $p \to tp$ بدست بیاید:

مثال
$$\tilde{G}_R^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} \xrightarrow{p \to pt} \frac{i}{p^2t^2 - m^2} = \frac{i}{t^2\left(p^2 - \frac{m^2}{t^2}\right)} = \frac{i\,t^{-2}}{p^2 - m^2(t)}$$

می‌بینیم که با تغییر مقیاس p (تغییر آن از p به pt که در آن t یک عدد مثبت است) دو اتفاق می‌افتد:

الف) t^{-2} درصورت ظاهر می‌شود که در آن عدد ۲- همان بُعد جرمی انتشارگر $\tilde{G}_R$ است. (در فضای فوریه)

ب) جرم m وابسته به t می‌شود $m = m(t) = \frac{m}{t}$ (در واقع جرم rescale شد).

دقت کنید که چگونه rescale کردن به بعد جرمی $\tilde{G}_R^{(2)}$ و m برمی‌گردد.

توان t

سوال کلی ۱: بعد جرمی توابع گرین (در فضای فوریه)

a) $G_R^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \langle \varphi_R(x_1)\ldots\varphi_R(x_n)\rangle$

$$[G_R^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)] \underset{\uparrow}{=} M^{n\left(\frac{d-2}{2}\right)}$$
$$[\varphi] = M^{\frac{d-2}{2}}$$

b) $\tilde{G}_R^{(n)}(p_1, \ldots, p_n) = \int G_R^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)\, e^{-i\sum_{j=1}^{n} x_j p_j}\, d^dx_1 \ldots d^dx_n$

$$M^x = M^{\frac{n(d-2)}{2}} \quad M^{-nd}$$

$$x = \frac{n(d-2)}{2} - nd = -n\left(\frac{d}{2}+1\right)$$

$$\boxed{[\tilde{G}_R^{(n)}(p_1, \ldots p_n)] = M^{-n\left(\frac{d}{2}+1\right)}}$$

$$\tilde{G}^{(2)}(p_1, p_2) = \delta^4(p_1+p_2)\,\tilde{G}^{(2)}(p_1)$$

ولی مثلاً برای $n=2$

$$\tilde{G}^{(2)}(p_1) = \frac{i}{p_1^2 - m^2}$$

$$[\tilde{G}^{(2)}(p_1)] = M^x$$
$$[\delta^4(p_1+p_2)] = M^{-4} = M^{-d}$$

بطور کلی $\longrightarrow$ $x = -n\left(\frac{d}{2}+1\right) + d = D =$ Engineering dimension of $\tilde{G}^{(2)}(p_1, \ldots p_{n-1})$

for $n = 2 \longrightarrow x = -2(2+1) + 4 = -2$ ✓

سؤال کلی ۲: با تغییر مقیاس $p \to pt$ چه بر سر $\tilde{G}_R^{(n)}(p_1, \dots p_{n-1})$ می‌آید:

(دیدیم) $\tilde{G}_R^{(2)}(pt, m) = t^{-2}\, \tilde{G}_R^{(2)}(p, m(t) = mt^{-1})$

In analogy:

$$\tilde{G}_R^{(n)}(\{p_i\}; g_R, m_R, \mu) \xrightarrow[p_i = p_i t]{}$$

$$\tilde{G}_R^{(n)}(\{tp_i\}; g_R, m_R, \mu) = t^D\, \tilde{G}_R^{(n)}(\{p_i\}; g_R, m_R(t), \mu(t))$$

with $m_R(t) = t^{-1} m_R \,, \quad \mu(t) = t^{-1}\mu$

مثلاً

$$\Sigma_f \cong \ln \frac{\dots p^2 + \dots m^2}{\dots \mu^2} \xrightarrow[p \to pt]{} \ln \frac{\dots p^2 t^2 + \dots m^2}{\dots \mu^2}$$

$$= \ln \frac{t^2\,(\dots p^2 + \dots m^2 t^{-2})}{t^2\,(\dots \mu^2 t^{-2})} = \ln \frac{(\dots p^2 + \dots m^2(t))}{\dots \mu^2(t)}$$

به این ترتیب

$m(t) = t^{-1} m$

$\mu(t) = t^{-1}\mu$

با توجه به این توضیحات $\longleftarrow$ $t \dfrac{\partial}{\partial t} \tilde{G}_R^{(n)}(tp_i, m_R, g_R, \mu)$ را مشتق می‌گیریم:

$$t \frac{\partial}{\partial t} \tilde{G}_R^{(n)}(tp_i; g_R, m_R, \mu) \overset{①}{=} t\frac{\partial}{\partial t}\left[t^D \tilde{G}_R^{(n)}(p_i; g_R, m_R(t), \mu(t))\right)$$

$$= D\; t^D \tilde{G}_R^{(n)} + t^D \left[t \frac{\partial m_R(t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial m_R} + t \frac{\partial \mu(t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \mu(t)}\right] \tilde{G}_R^{(n)}(p_i; g_R, m_R(t), \mu(t))$$

with

a) $$t \frac{\partial}{\partial t} m_R(t) \frac{\partial}{\partial m_R(t)} = t \frac{\partial}{\partial t}(t^{-1} m_R) \frac{\partial}{\partial (t^{-1} m_R)} = -t^2 t^{-2}\, m_R \frac{\partial}{\partial m_R} = -m_R \frac{\partial}{\partial m_R}$$

b) $$t \frac{\partial}{\partial t} \mu(t) \frac{\partial}{\partial \mu(t)} = t \frac{\partial}{\partial t}(t^{-1}\mu) \frac{\partial}{\partial (t^{-1}\mu)} = -t^2 t^{-2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} = -\mu \frac{\partial}{\partial \mu}$$

$\Longrightarrow$

$$t \frac{\partial}{\partial t} \tilde{G}_R^{(n)}(tp_i; g_R, m_R, \mu) = t^D \left\{ D - m_R \frac{\partial}{\partial m_R} - \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right\} \tilde{G}_R^{(n)}(p_i; g_R, m_R(t), \mu(t))$$

$$t \frac{\partial}{\partial t} \tilde{G}_R^{(n)}(tp_i; g_R, m_R, \mu) = \left(D - m_R \frac{\partial}{\partial m_R} - \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \tilde{G}_R^{(n)}(tp_i; g_R, m_R, \mu)$$

$$\boxed{\left(t \frac{\partial}{\partial t} - D + m_R \frac{\partial}{\partial m_R} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu}\right) \tilde{G}_R^{(n)}(tp_i; g_R, m_R, \mu) = 0} \quad (A)$$

نظریه میدان کوانتومی ذرات - جلسه ۱۵ - صفحه ۴۲

از معادله Callan-Symanzik داریم:

$$\left(n\gamma + \mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta\frac{\partial}{\partial g_R} + m_R\,\gamma_m\frac{\partial}{\partial m_R}\right)\tilde{G}_R^{(n)}(p_i;\, g_R, m_R, \mu) = 0$$

$$\xrightarrow{p_i \to p_i t}\quad \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\tilde{G}_R^{(n)}(tp_i;\, g_R, m_R, \mu) = \left(-n\gamma - \beta\frac{\partial}{\partial g_R} - m_R\,\gamma_m\frac{\partial}{\partial m_R}\right)\tilde{G}_R^{(n)}(tp_i\ldots)$$

(*)

با جایگذاری (*) در (A) خواهیم داشت:

$$0 = \left(-t\frac{\partial}{\partial t} + D - m_R\frac{\partial}{\partial m_R} + n\gamma + \beta\frac{\partial}{\partial g_R} + m_R\,\gamma_m\frac{\partial}{\partial m_R}\right)\tilde{G}_R^{(n)}(tp_i;\, g_R, m_R;\mu)$$

$$\rightarrow \boxed{\left(n\gamma + \beta\frac{\partial}{\partial g_R} + m_R(\gamma_m - 1)\frac{\partial}{\partial m_R} + D - t\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{G}_R^{(n)}(tp_i;\, g_R, m_R;\mu) = 0}$$

(B)

حل معادله بالا:

مثال: تئوری آزاد داشته باشیم:

فرض $m_R = 0 \rightarrow \gamma_m = 0$

در فرض $\beta = 0$

$\gamma = 0$

$$\left(D - t\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{G}_R^{(n)}(tp_i) = 0 \rightarrow t\frac{\partial}{\partial t}\tilde{G}_R^{(n)}(tp_i) = D\,\tilde{G}_R^{(n)}(tp_i)$$

$$\frac{\partial\tilde{G}_R^{(n)}(tp_i)}{\tilde{G}_R^{(n)}(tp_i)} = D\frac{\partial t}{t} \rightarrow \ln\frac{\tilde{G}_R^{(n)}(tp_i)}{\tilde{G}_R^{(n)}(p_i)} = D\ln t$$

$$\rightarrow \boxed{\tilde{G}_R^{(n)}(tp_i) = t^D\,\tilde{G}_R^{(n)}(p_i)}$$

و این همان چیزی است که انتظار داریم

• با توجه به نتیجه بالا و معادله (B) بنظر می‌رسد که "بعد هندسی" D در تئوری‌های برهمکنشی متفاوت از مقدار آن در تئوری آزاد است. ← anomalous dimension

---

حالت کلی: Ansatz: $\tilde{G}_R^{(n)}(tp_i;\, g_R, m_R;\mu) = f(t)\,\tilde{G}_R^{(n)}(p_i;\, g_R(t), m_R(t);\mu)$

این نتیجه را در معادله کالان-سیمانزیک می‌گذاریم و معادله جدیدی برای $f(t)$ بدست می‌آوریم

$$-t\frac{\partial}{\partial t}\,\tilde{G}_R^{(n)}(tp_i;g_R,m_R,\mu) = -t\frac{\partial}{\partial t}\left(f(t)\,\tilde{G}_R^{(n)}(p_i;g_R(t),m_R(t);\mu)\right)$$

$$= \left(-t\frac{\partial}{\partial t}f(t)\right)\tilde{G}_R^{(n)}(p_i;g_R(t),m_R(t);\mu)$$

$$- f(t)\left[t\frac{\partial m_R}{\partial t}\frac{\partial}{\partial m_R} + t\frac{\partial g_R}{\partial t}\frac{\partial}{\partial g_R}\right]\tilde{G}_R^{(n)}(p_i;g_R(t),m_R(t);\mu)$$

$$= \left[\frac{-t}{f(t)}\frac{\partial f(t)}{\partial t} - t\frac{\partial m_R}{\partial t}\frac{\partial}{\partial m_R} - t\frac{\partial g_R}{\partial t}\frac{\partial}{\partial g_R}\right]\underbrace{\tilde{G}_R^{(n)}(p_i;g_R(t),m_R(t);\mu)f(t)}_{=\tilde{G}_R^{(n)}(tp_i;g_R,m_R;\mu)}$$

$$\longrightarrow\ \boxed{\left(-t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{t}{f(t)}\frac{\partial f(t)}{\partial t} + t\frac{\partial m_R}{\partial t}\frac{\partial}{\partial m_R} + t\frac{\partial g_R}{\partial t}\frac{\partial}{\partial g_R}\right)\tilde{G}_R^{(n)}(tp_i;g_R,m_R;\mu)=0}$$

حال این معادله را با (B) مقایسه می‌کنیم

$$t\frac{\partial m_R}{\partial t} = m_R(\gamma_m - 1) \quad ✓$$

$$t\frac{\partial g_R}{\partial t} = \beta(g_R) \quad ✓$$

$$\frac{t}{f(t)}\frac{\partial f(t)}{\partial t} = n\gamma + D$$

از حل معادله آخر $f(t)$ بدست می‌آید:

$$\frac{\partial f(t)}{f(t)} = (n\gamma + D)\frac{\partial t}{t} \rightarrow \ln f(t)\Big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t}(n\gamma + D)\frac{\partial t'}{t'}$$

$$\longrightarrow\ \ln\frac{f(t)}{f(t_0)} = D\ln\frac{t}{t_0} + \int_{t_0}^{t} n\gamma(g_R(t'))\frac{dt'}{t'}$$

$$\boxed{\longrightarrow f(t) = f(t_0)\frac{t^D}{t_0^{\,D}}\exp\left(n\int_{t_0}^{t}\gamma(g_R(t'))\frac{dt'}{t'}\right)}$$

به این ترتیب نحوه scale شدن تابع n نقطه‌ای عبارت است از:

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{G}_R^{(n)}(tp_i;g_R,m_R;\mu) &= f(t)\,\tilde{G}_R^{(n)}(p_i;g_R(t),m_R(t);\mu)\\ &= f(t_0)\left(\frac{t}{t_0}\right)^D\exp\left(n\int_{t_0}^{t}\gamma(g_R(t'))\frac{dt'}{t'}\right)\tilde{G}_R^{(n)}(p_i;g_R(t),m_R(t);\mu)\end{aligned}}$$

γ = Anomalous dimension