دانشکده فیزیک ـ دانشگاه صنعتی شریف

مکانیک کوانتومی ۲ـ نیمسال دوم ۱۴۰۵ـ۱۴۰۴

تمرین سری پنجم

تا اطلاع ثانوی نیازی به تحویل برگه های تمرین نیست

مسئله ۱:

(الف) با استفاده از روش وردش، انرژی حالت پایه اتم هیدروژن را با بکار بردن تابع موج آزمونی زیر با خاصیت تقارن کروی برآورد کنید

$$\varphi_\alpha(r) = \begin{cases} C\left(1-\frac{r}{\alpha}\right) & \text{for} \quad r \le \alpha \\ 0 & \text{for} \quad r > \alpha. \end{cases}$$

در اینجا C ضریب نرمالیزاسیون و α پارامتر وردش است.

(ب) مقدار فرینه α را به دست آورید و آن را با شعاع اتم Bohr مقایسه کنید.

مسئله ۲:

جفت شدگی اسپین مدار برای ذره ای به جرم m و اسپین $\boldsymbol{S}$ که در پتانسیل $V(r)$ حرکت می کند به صورت کلی زیر در نظر بگیرید:

$$H = \frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{dV(r)}{dr}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L}$$

تاثیر این جفت شدگی را بر طیف نوسانگر هماهنگ سه بعدی بدست آورید.

مسئله ۳:

(الف) یک هامیلتونی وابسته به زمان $\hat{H} = \hat{H}_0 + V(t)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید حالت‌های مستقل از زمان $\hat{H}_0|n\rangle = E_n|n\rangle$ را ارضا می‌کنند. سیستمی را در نظر بگیرید که در زمان $t = t_0$ در حالت اولیه $|i\rangle$ آماده شده است. همان‌طور که می‌دانید، حالت نهایی آن، $|f\rangle$، در زمان بعدی t، به صورت $|f\rangle = U_I(t,t_0)|i\rangle$ داده می‌شود، که در آن عملگر تحول زمانی $U_I(t,t_0)$ معادله $i\hbar\partial_t U_I(t,t_0) = V_I(t)U_I(t,t_0)$ را ارضا می‌کند. نشان دهید که برای $U_I(t_0,t_0) = 1$، داریم:

$$U_I(t,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^{t} dt_1 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n V_I(t_1)V_I(t_2)\cdots V_I(t_n). \qquad (۱)$$

(ب) با استفاده از $1 = \sum_n |n\rangle\langle n|$، به دست می‌آوریم $|f\rangle = \sum_n c_n(t)|n\rangle$ که در آن $c_n(t) = \langle n|U_I(t,t_0)|i\rangle$. با استفاده از رابطه (۱) نشان دهید که:

$$c_n(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_n^{(j)}(t),$$

با:

$$
\begin{aligned}
c_n^{(0)} &= \delta_{ni}, \\
c_n^{(1)}(t) &= -\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' e^{i\omega_{ni}t'} V_{ni}(t'), \\
c_n^{(2)}(t) &= -\frac{1}{\hbar^2}\int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' e^{i\omega_{nm}t' + i\omega_{mi}t''} V_{nm}(t') V_{mi}(t''), \\
\cdots &\quad \cdots
\end{aligned}
\qquad (۲)
$$

که در آن $V_{mn}(t) \equiv \langle m|V(t)|n\rangle$ و $\omega_{mn} \equiv (E_m - E_n)/\hbar$.

(ج) فرض کنید یک نوسانگر هارمونیک ساده در زمان $t = -\infty$ در حالت پایه $\langle 0|$ آماده شده است. اگر توسط یک پتانسیل کوچک وابسته به زمان $V(t) = -eExe^{-t^2/\tau^2}$ اختلال داده شود، از نظریهٔ اختلال مرتبه دوم استفاده کرده و احتمال یافتن آن را در حالت برانگیختهٔ دوم تعیین کنید.

مسئله ۴: استخراج قانون طلایی فرمی

(a) $c_n^{(2)}(t)$ از رابطه (۲) در مسئله ۳ را در نظر بگیرید. فرض کنید یک اختلال پتانسیل هارمونیک

$$V(t) = e^{\epsilon t} V e^{-i\omega t}$$

با زمان اولیه $t_0 \to -\infty$ به تدریج اعمال می‌شود. نشان دهید که $c_n^{(2)}$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$c_n^{(2)}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} e^{i(\omega_{ni}-2\omega)t} \frac{e^{2\epsilon t}}{(\omega_{ni} - 2\omega - 2i\epsilon)} \sum_m \frac{\langle n|V|m\rangle\langle m|V|i\rangle}{\omega_m - \omega_i - \omega - i\epsilon}.$$

(b) با استفاده از $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \frac{2\epsilon}{(\omega_{ni}-\omega)^2+\epsilon^2} = 2\pi\delta(\omega_{ni} - \omega)$، نشان دهید که نرخ گذار در حد $\epsilon \to 0$ به صورت زیر است:

$$\Gamma_{i\to n} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{d|c_n^{(2)}|^2}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar^4} \left| \sum_m \frac{\langle n|V|m\rangle\langle m|V|i\rangle}{\omega_m - \omega_i - \omega} \right|^2 \delta(\omega_{ni} - 2\omega).$$

(c) تفسیر خود را از این نتیجه بیان کنید. آیا در این گذار، پایستگی انرژی از دست می‌رود؟