QM-2-L21-1404-2

Sunday, June 7, 2026 10:47 AM

پدیده‌های وابسته به زمان:

الف) تصویر شرودینگر، تصویر هایزنبرگ، تصویر دیراک (برهمکنش)

a) تصویر شرودینگر:

معادله شرودینگر وابسته به زمان
$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi,t\rangle = \hat H |\psi,t\rangle$$

فرض: $\hat H$ وابستگی صریح به زمان ندارد:

حل معادله ← جداسازی:

$$\int_{|\psi,t_0\rangle}^{|\psi,t\rangle} \frac{d|\psi,t\rangle}{|\psi,t\rangle} = \frac{-i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} \hat H\, dt$$

$$\ln|\psi,t\rangle - \ln|\psi,t_0\rangle = \frac{-i}{\hbar}\hat H(t-t_0) \longrightarrow \ln\frac{|\psi,t\rangle}{|\psi,t_0\rangle} = -\frac{i}{\hbar}\hat H(t-t_0)$$

$$\longrightarrow |\psi,t\rangle = U(t,t_0)|\psi,t_0\rangle \quad \text{with} \quad \boxed{U(t,t_0) = \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\hat H(t-t_0)\right)}$$

عملگر تحول زمانی ←

$|\psi,t_0\rangle$ حالت سیستم در $t=t_0$

$|\psi,t\rangle$ حالت سیستم در t

← عملگر $U(t,t_0)$ عملگر یکانی (unitary):

$$U(t,t_0)\,U^{+}(t,t_0) = 1$$

$$U(t,t_0) = e^{\frac{-i}{\hbar}\hat H(t-t_0)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-i}{\hbar}\hat H t\right)^n \frac{1}{n!}$$

$$U^{+}(t,t_0) = e^{+\frac{i}{\hbar}\hat H(t-t_0)} = U^{-1}(t,t_0) = U(t_0,t)$$

	تابع حالت	عملگر
تصویر شرودینگر	$i\hbar\,\partial_t|\psi,t\rangle_s = H_s|\psi,t\rangle_s$ $|\psi,t\rangle_s = U(t,t_0)|\psi,t_0\rangle_s$	$\hat H_s$, $\hat O_s$ مستقل از زمان $\frac{d}{dt}\hat O_s = 0$

عملگر تحول زمان از t_0 تا t

b) تصویر هایزنبرگ:

عملگر $\hat B_s$ را در تصویر شرودینگر در نظر بگیرید. مقدار چشمداشتی آن در حضور $|\psi,t\rangle_s$ در تصویر شرودینگر

$$\langle \hat B_s\rangle_s = {}_s\langle \psi,t|\hat B_s|\psi,t\rangle_s$$

استفاده می‌کنیم از: $|\psi,t\rangle_s = U(t,0)|\psi,0\rangle$ $\qquad U(t,0) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$

استفاده کنیم از ،

$$|\psi,t\rangle_s = U(t,0)\,|\psi,0\rangle \qquad U(t,0) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$$

$${}_s\langle \psi,t| = \langle \psi,0|\, U^{+}(t,0)$$

$$\xrightarrow{\text{Schrödinger}} \langle \hat{B}_s\rangle_s = \langle \psi,0|\underbrace{\boxed{U^{+}(t,0)\hat{B}_s U(t,0)}}_{\equiv \hat{B}_H}\underbrace{\boxed{|\psi,0\rangle}}_{=|\psi\rangle_H} = \langle \hat{B}_H\rangle_H \ \text{Heisenberg}$$

عملگر در تصویر هایزنبرگ $\hat{B}_H \equiv U^{+}(t,0)\,\hat{B}_s\,U(t,0) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht}\,\hat{B}_s\,e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$

حالت در تصویر هایزنبرگ $|\psi\rangle_H \equiv |\psi,0\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi,t\rangle_s = U^{+}(t,0)\,|\psi,t\rangle_s$

$$|\psi,t\rangle_s = U(t,0)|\psi,0\rangle \longrightarrow U^{+}(t,0)\,|\psi,t\rangle_s = \underbrace{U^{+}(t,0)\,U(t,0)}_{=1}\,|\psi,0\rangle$$

$$\longrightarrow \boxed{|\psi,0\rangle = U^{+}(t,0)\,|\psi,t\rangle_s}$$

• تحول زمانی $\hat{B}_H$:

$$\frac{d\hat{B}_H}{dt} = \frac{d}{dt}\left(e^{iHt/\hbar}\,\hat{B}_s\,e^{-iHt/\hbar}\right) =$$

$$= \frac{i}{\hbar}H\,\underbrace{\boxed{e^{iHt/\hbar}\,\hat{B}_s\,e^{-iHt/\hbar}}}_{=\hat{B}_H} - \frac{i}{\hbar}\,e^{iHt/\hbar}\,\hat{B}_s\,\boxed{1}\,H\,e^{-iHt/\hbar}$$

$$e^{-iHt/\hbar}\,e^{+iHt/\hbar} = 1$$

مستقل از زمان $H = H_s$

$$= \frac{i}{\hbar}H\hat{B}_H - \frac{i}{\hbar}\underbrace{\boxed{e^{iHt/\hbar}\,\hat{B}_s\,e^{-iHt/\hbar}}}_{=\hat{B}_H}\ \underbrace{\boxed{e^{iHt/\hbar}\,H\,e^{-iHt/\hbar}}}_{=H}$$

$$= \frac{i}{\hbar}\left(H\hat{B}_H - \hat{B}_H H\right) = \boxed{\frac{i}{\hbar}[H,\hat{B}_H] = \frac{d}{dt}\hat{B}_H}$$

و ضمناً . $\boxed{\frac{d}{dt}|\psi\rangle_H = 0}$

	تابع حالت	عملگر
تصویر شرودینگر	$i\hbar\,\partial_t|\psi,t\rangle_s = H_s\,|\psi,t\rangle_s$ $|\psi,t\rangle_s = U(t,t_0)\,|\psi,t_0\rangle_s$	$\hat{H}_s\,,\ \hat{O}_s$ مستقل از زمان $\frac{d}{dt}\hat{O}_s = 0$
تصویر هایزنبرگ	$|\psi\rangle_H = U^{+}(t,0)\,|\psi,t\rangle_s$ $\frac{d}{dt}|\psi\rangle_H = 0$	$\hat{O}_H(t) = U^{+}(t,0)\,\hat{O}_s\,U(t,0)$ $\frac{d}{dt}\hat{O}_H(t) = \frac{i}{\hbar}[H_s,O_H(t)]$

	$\frac{d}{dt}\,\|\psi\rangle_H = 0$	$\frac{d}{dt}\hat{O}_H(t) = \frac{i}{\hbar}\,[H_S, O_H(t)]$

ج) تصویر برهمکنشی (تصویر دیراک)

$H = H_0 + V(t)$

فرض: H_0 مستقل از زمان

$V(t)$ تنها بخش وابسته به زمان در H

$\longleftarrow$ تعریف. $|\psi,t\rangle_I$ interaction

معادله شرودینگر وابسته به زمان

$$i\hbar\,\partial_t |\psi,t\rangle_S = H|\psi,t\rangle_S$$

$$\int \frac{d|\psi,t\rangle_S}{|\psi,t\rangle_S} = -\frac{i}{\hbar}\int H\,dt = -\frac{i}{\hbar}\int (H_0 + V(t))\,dt$$

$$\ln\frac{|\psi,t\rangle_S}{|\psi,0\rangle_S} = -\frac{i}{\hbar}H_0 t - \frac{i}{\hbar}\int_0^t V(t')\,dt'$$

$$|\psi,t\rangle_S = \boxed{\left(e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t - \frac{i}{\hbar}\int_0^t V(t')dt'}\right)}|\psi,0\rangle_S$$

$$= e^{-iH_0t/\hbar}\; e^{-i/\hbar\int_0^t V(t')dt'}$$

$[H_0, V(t)] = 0 \rightarrow$ دو تا تابع نمایی را می‌توان از هم جدا کرد

• دو طرف رابطه را در $e^{+iH_0t/\hbar}$ ضرب می‌کنیم و از رابطه $U^+(t)U(t) = 1$ استفاده می‌کنیم:

$$\rightarrow \boxed{e^{+iH_0t/\hbar}|\psi,t\rangle_S} = e^{-i/\hbar\int_0^t V(t')dt'}|\psi,0\rangle_S$$

$\overset{\text{تعریف}}{=} |\psi,t\rangle_I$

$$\boxed{|\psi,t\rangle_I = e^{+iH_0t/\hbar}|\psi,t\rangle_S} \rightarrow \text{حالت در تصویر دیراک}$$

$\longleftarrow$ معادله حرکت $|\psi,t\rangle_I$:

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi,t\rangle_I = i\hbar\frac{d}{dt}\left(e^{iH_0t/\hbar}|\psi,t\rangle_S\right)$$

$$= \cancel{i\hbar}\,\frac{i}{\cancel{\hbar}}H_0\,\underline{e^{iH_0t/\hbar}|\psi,t\rangle_S} + e^{iH_0t/\hbar}\,\underline{i\hbar\frac{d}{dt}|\psi,t\rangle_S}$$

$$= \underbrace{i\cancel{\hbar}\,\frac{i}{\cancel{\hbar}}\,H_0}_{=-H_0}\ \underbrace{e^{iH_0t/\hbar}\,|\psi,t\rangle_s}_{=|\psi,t\rangle_I} + e^{iH_0t/\hbar}\ \underbrace{i\hbar\frac{d}{dt}|\psi,t\rangle_s}_{=H\,|\psi,t\rangle_s}$$

[illegible] $\quad e^{iH_0t/\hbar}\,H\,|\psi,t\rangle_s = e^{iH_0t/\hbar}\,(H_0+V(t))\,|\psi,t\rangle_s$

$$= H_0\ \underbrace{\left(e^{iH_0t/\hbar}|\psi,t\rangle_s\right)}_{=|\psi,t\rangle_I} + \underbrace{e^{iH_0t/\hbar}\,V(t)\,e^{-iH_0t/\hbar}}_{\text{use } [H_0,V(t)]=0} \ \underbrace{e^{+iH_0t/\hbar}|\psi,t\rangle_s}_{=|\psi,t\rangle_I}$$

$$= \underbrace{e^{iH_0t/\hbar}\,e^{-iH_0t/\hbar}}_{=1}\,V(t)$$

$$= (H_0+V(t))\ |\psi,t\rangle_I$$

نتیجه $\quad i\hbar\frac{d}{dt}|\psi,t\rangle_I = (-\cancel{H_0}+\cancel{H_0}+V(t))\,|\psi,t\rangle_I = V(t)\,|\psi,t\rangle_I$

$$\boxed{i\hbar\frac{d}{dt}|\psi,t\rangle_I = V_I(t)\,|\psi,t\rangle_I} \longrightarrow \text{تحول حالت در تصویر دیراک}$$

بطور کلی درصورتیکه $[H_0,V(t)]\neq 0$ باشد.

$\longleftarrow$ • تعریف $O_I(t)$:

$$\langle O_s\rangle_s = {}_s\langle\psi,t|\,O_s\,|\psi,t\rangle_s$$

use: $\quad |\psi,t\rangle_I = e^{iH_0t/\hbar}|\psi,t\rangle_s \longrightarrow |\psi,t\rangle_s = e^{-iH_0t/\hbar}|\psi,t\rangle_I$

$$\langle O_s\rangle_s = {}_I\langle\psi,t|\,\boxed{e^{+iH_0t/\hbar}\,O_s\,e^{-iH_0t/\hbar}}\,|\psi,t\rangle_I$$

$$\overset{\text{تعریف}}{\equiv} O_I(t)$$

$$\boxed{O_I(t) = e^{+iH_0t/\hbar}\,O_s\,e^{-iH_0t/\hbar}}$$

$\longleftarrow$ • معادله حرکت جز $O_I(t)$

$$\frac{d}{dt}O_I(t) = \frac{iH_0}{\hbar}\,e^{iH_0t/\hbar}\,O_s\,e^{-iH_0t/\hbar} - \frac{i}{\hbar}\,e^{iH_0t/\hbar}\,O_s\,H_0\,e^{-iH_0t/\hbar}$$

$$= \frac{i}{\hbar}\left(H_0\,O_I(t) - \underbrace{e^{iH_0t/\hbar}\,O_s\,e^{-iH_0t/\hbar}}_{=O_I(t)}\ \underbrace{e^{+iH_0t/\hbar}\,H_0\,e^{-iH_0t/\hbar}}_{H_0}\right)$$

$$= \frac{i}{\hbar}\left(H_0\,O_I(t) - O_I(t)\,H_0\right) = \frac{i}{\hbar}\,[H_0, O_I(t)]$$

	تابع حالت	عملگر
تصویر شرودینگر	$i\hbar\partial_t\|\psi,t\rangle_s = H_s\|\psi,t\rangle_s$ $\|\psi,t\rangle_s = U(t,t_0)\|\psi,t_0\rangle_s$	$\hat H_s$, $\hat O_s$ مستقل از زمان $\frac{d}{dt}\hat O_s = 0$
تصویر هایزنبرگ	$\|\psi\rangle_H = U^{+}(t,0)\|\psi,t\rangle_s$ $\frac{d}{dt}\|\psi\rangle_H = 0$	$\hat O_H(t) = U^{+}(t,0)\,\hat O_s\,U(t,0)$ $\frac{d}{dt}\hat O_H(t) = \frac{i}{\hbar}[H_s, O_H(t)]$
تصویر دیراک (برهمکنش)	$\|\psi,t\rangle_I = e^{iH_0t/\hbar}\|\psi,t\rangle_s$ $i\hbar\partial_t\|\psi,t\rangle_I = V_I(t)\|\psi,t\rangle_I$	$O_I(t) = e^{iH_0t/\hbar}\,O_s\,e^{-iH_0t/\hbar}$ $\frac{d}{dt}O_I(t) = \frac{i}{\hbar}[H_0, O_I(t)]$

اختلال وابسته به زمان (سری Neumann)

$$i\hbar\partial_t|\psi,t\rangle_I = V_I(t)|\psi,t\rangle_I$$

انتگرال نسبت به t می‌گیریم:

$$\int_{t_0}^{t} dt'\, i\hbar\frac{d}{dt'}|\psi,t'\rangle_I = \int_{t_0}^{t} dt'\, V_I(t')|\psi,t'\rangle_I$$

$$i\hbar\left(|\psi,t\rangle_I - |\psi,t_0\rangle_I\right) = \int_{t_0}^{t} V_I(t')|\psi,t'\rangle_I\, dt'$$

$$\rightarrow \boxed{|\psi,t\rangle_I = |\psi,t_0\rangle_I - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} V_I(t')\,|\psi,t'\rangle_I\, dt'} \quad (1)$$

formal solution.

این معادله یک معادله انتگرالی برای $|\psi,t\rangle_I$ است. تا الان هیچ تقریبی به کار نبرده‌ام:

تقریب:

$$|\psi,t\rangle_I \overset{(1)}{=} |\psi,t_0\rangle_I - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} V_I(t')\,|\psi,t_0\rangle_I\, dt' - \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2\int_{t_0}^{t} V_I(t')\int_{t_0}^{t'} V_I(t'')\,|\psi,t''\rangle_I\, dt''$$

در اینجا رابطه (1) به جای $|\psi,t'\rangle_I$ گذاشته شده است، هنوز هم تقریبی در کار نیست، ولی

$$\boxed{|\psi,t\rangle_I = |\psi,t_0\rangle_I - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt'\, V_I(t')\,|\psi,t_0\rangle_I - \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2\int_{t_0}^{t} V_I(t')\int_{t_0}^{t'} V_I(t'')\,|\psi,t_0\rangle_I\, dt'' + \dots}$$

اندازه تقریب را مشخص می‌کند.

اندازه‌ی تقریب را مشخص می‌کند.