دانشکده فیزیک ـ دانشگاه صنعتی شریف

مکانیک کوانتومی ۲ـ نیمسال اول ۰۱ـ۱۴۰۰

آزمون پایان ترم ـ ۱ آذر ماه ۱۴۰۰ ـ وقت: ۲:۳۰ ساعت + ۳۰ دقیقه برای آپلود

لطفاً به نحوه تهیه و ارسال فایل pdf توجه نمایید

برای تهیه و تحویل برگه های آزمون لطفا به نکات زیر توجه کنید:

۱. آزمون رأس ساعت ۹:۰۰ روز شنبه ۲ بهمن ماه ۱۴۰۰ برگزار می شود.

۲. همه دانشجویانی که مایل به شرکت در آزمون میان ترم هستند موظفند در کلاس مجازی درس در همین ساعت حضور داشته باشند و در حضور و غیاب مجازی شرکت نمایند.

۳. لطفاً به محض باز نمودن فایل سؤالات، حضور خود را در کلاس اعلام نمایید. از زمان اعلام حضور در کلاس دو ساعت و نیم وقت برای پاسخ به سؤالات خواهید داشت.

۴. پس از اتمام زمان آزمون، لطفاً برگه های آزمون را به همان شیوه ای که سؤالات تمرین را آماده می کنید، آماده نمایید. برای یادآوری به نکات زیر توجه کنید:

- پاسخهای خود را در صفحات A۴ بنویسید. لطفاً فرمت داده شده در سایت درس را رعایت نمایید.
- لطفاً جواب‌های خود را به ترتیب سؤالات مرتب نمایید.
- حتما نام و نام خانوادگی و شماره دانشجویی خود را در ابتدای برگه پاسخ خود بنویسید.
- صفحات را شماره‌گذاری کنید.
- در انتهای آزمون فایل پاسخنامه را در قالب فقط یک فایل pdf آماده کنید. برای کاهش حجم فایل‌های پی دی اف خود می‌توانید به آدرس https://smallpdf.com/compress-pdf یا وبسایت‌های مشابه مراجعه نمایید.
- نام فایلی که می‌فرستید شامل اسم و عنوان Midterm باشد. به عنوان نمونه Sohrab_Ahmadi-Midterm.pdf
- برای آماده سازی و آپلود فایلها ۲۵ دقیقه وقت دارید.

۵. **پیش از ارسال پاسخ ها از خوانا بودن فایل pdf خود اطمینان حاصل نمایید.**

۶. پس از تهیه فایل pdf لطفاً آن را به یکی از دو آدرس زیر ارسال نمایید:

- دانشجویانی که در گروه ۱ تمرین (شنبه ها) شرکت می کردند به آدرس $qm1.9900.g1@gmail.com$
- دانشجویانی که در گروه ۲ تمرین شرکت (یکشنبه ها) می کردند به آدرس $qm1.9900.g2@gmail.com$

۷. **از ارسال هر گونه پاسخنامه به آدرس شخصی اینجانب یا صفحه CW جداً بپرهیزید.**

۸. بدیهی است که فقط برگه های دانشجویانی که در ابتدای ساعت در کلاس حضور داشته اند، تصحیح خواهند شد.

۹. برگه هایی که پس از ساعت ۱۲:۰۰ روز آزمون به یکی از دو آدرس فوق ارسال شده اند، تصحیح نخواهند شد.

دانشکده فیزیک ـ دانشگاه صنعتی شریف

مکانیک کوانتومی ۲ـ نیمسال اول ۰۱ـ۱۴۰۰

آزمون پایان ترم ـ شنبه ۲ بهمن ماه ۱۴۰۰ ـ ۴ سؤال ـ ۲۴ نمره ـ وقت: ۲:۳۰ ساعت + ۳۰ دقیقه برای آپلود

موعد تحویل: شنبه ۲ بهمن ماه ۱۴۰۰ قبل از ساعت ۱۲:۰۰

۲۰ نمره از این آزمون معادل ۱۰ امتیاز نمره نهایی این درس است.

لطفاً به نحوه تهیه و ارسال فایل pdf توجه نمایید

مسئله اول: (۶ نمره)

همیلتونی

$$\mathcal{H}_D = \frac{Ze^2\hbar^2\beta}{m_e^2c^2}\delta^3(\boldsymbol{r}),$$

را به عنوان یکی از تصحیحات به طیف انرژی اتم هیدروژن در نظر بگیرید. در این رابطه Z تعداد بارهای مثبت در اتم شبه هیدروژن، e بار الکتریکی الکترون، m_e جرم الکترون، β یک ضریب ثابت و c سرعت نور است.

(الف) نشان دهید که منشاء فیزیکی این همیلتونی به اولین تصحیح ناشی از تغییر $\boldsymbol{r}$ به $\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r}$ در پتانسیل کولنی $V(\boldsymbol{r})$ بر می‌گردد. در این تبدیل $\delta\boldsymbol{r}$ بسیار کوچک است. (۳ نمره)

(ب) با استفاده از اختلال غیر وابسته به زمان، تغییرات طیف انرژی اتم هیدروژن ناشی از $\mathcal{H}_D$ را به‌دست آورید. (۳ نمره)

مسئله دوم: (۶ نمره)

حالت ابتدایی یک الکترون با $|m\rangle$ و حالت انتهایی آن با $|n\rangle$ داده شده است. این الکترون در برهمکنش با میدان الکترومغناطیسی خارجی قرار دارد. پتانسیل برهمکنشی برای $t \geq 0$ مساوی است با

$$V_1(t) = -\frac{e}{c}\int d^3x \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t),$$

که در آن $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$ پتانسیل برداری و $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})$ چگالی جریان تعداد ذرات، e بار الکتریکی و c سرعت نور است. اگر فرض کنید که در حالت ابتدایی $n_{\boldsymbol{k}}$ فوتون با پلاریزاسیون λ وجود دارد و در حالت انتهایی $n_{\boldsymbol{k}}+1$ با همان پلاریزاسیون وجود دارد، به سؤالهای زیر پاسخ دهید:

(الف) با استفاده از کوانتش میدان $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$، ابتدا نشان دهید که $V_1(t)$ را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$V_1(t) = \Theta(t)\sum_{\boldsymbol{k},\lambda}\left(F_{\boldsymbol{k},\lambda}e^{-i\omega_{\boldsymbol{k}}t} + F^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}e^{+i\omega_{\boldsymbol{k}}t}\right),$$

در این رابطه $F_{\boldsymbol{k},\lambda}$ و $F^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}$ را تعیین کنید (۲ نمره).

(ب) آهنگ گذار این گسیل القاء شده $\Gamma^{\text{emission}}_{m\to n}$ ، را بدست آورید (۲ نمره).

(ج) توان تابشی $\frac{dP^{\text{emission}}_\lambda}{d\Omega}$ این آهنگ را برای گذار دو قطبی الکتریکی $(E1)$ بدست آورید (۲ نمره).

مسئله سوم (۸ نمره)

همیلتونی نوسانگر هماهنگ یک بعدی را در نظر بگیرید

$$\mathcal{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2.$$

مکانیک کوانتومی ۲ـ نیمسال اول ۰۱ـ۱۴۰۰

آزمون پایان ترم ـ ۲ بهمن ماه ۱۴۰۰ ـ وقت: ۲:۳۰ ساعت + ۳۰ دقیقه برای آپلود

(الف) با استفاده از روش وردش حالت پایه نوسانگر را تخمین بزنید. برای محاسبه وردشی از تابع موج زیر استفاده کنید:

$$\psi_{0\kappa}(x) = N_0 e^{-\kappa x^2},$$

که در آن $\kappa > 0$ پارامتر حقیقی و N_0 ضریب نرمالیزاسیون است.

راهنمایی: قبل از پاسخ به سؤال، ضریب نرمالیزاسیون N_0 را بدست آورید. برای انتگرالگیری ها از روابط زیر استفاده کنید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-ux^2} dx = \frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right) u^{-(1+n)/2} \Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right), \qquad \text{with} \qquad \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{n!}{4^{n/2}\left(\frac{n}{2}\right)!}\sqrt{\pi}. \quad (۱)$$

(ب) با استفاده از روش وردش و تابع موج

$$\psi_{1\kappa}(x) = (ax+b)\, e^{-\kappa x^2},$$

انرژی اولین حالت برانگیخته نوسانگر هماهنگ را تخمین بزنید.

راهنمایی: قبل از پاسخ به سؤال، با استفاده از خاصیت تعامد $\psi_{0\kappa}(x)$ و $\psi_{1\kappa}(x)$، ضریب b را مشخص کنید، سپس ضریب a را از روی رابطه نرمالیزاسیون بدست آورید. برای انتگرالگیری ها از معادلات (۱) استفاده کنید.

مسئله چهارم: (۴ نمره)

با استفاده از روابط

$$\begin{aligned} a_i^\dagger |\cdots, n_i, \cdots\rangle &= (1-n_i)(-1)^{\sum_{j<i} n_j} |\cdots, n_i+1, \cdots\rangle, \\ a_i |\cdots, n_i, \cdots\rangle &= n_i (-1)^{\sum_{j<i} n_j} |\cdots, n_i-1, \cdots\rangle, \end{aligned}$$

برای عملگرهای خلق و فنای فرمیونی نشان دهید

$$\{a_i, a_i^\dagger\} = 1,$$

که در آن $\{A, B\} \equiv AB + BA$ است.