پاسخ تمرین سری ۱

درس مکانیک کوانتومی ۳، دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شریف

پاییز ۱۴۰۱

۱ سوال ۱

در این مساله قصد داریم حرکت یک الکترون آزاد ($V = 0$) را در میدان مغناطیسی ثابت بررسی کنیم. بدین منظور $\phi = 0$ و $A = A(\mathbf{x})$ استفاده می‌کنیم. در این صورت شکل هامیلتونی به صورت:

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{c}}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathbf{2}}. \tag{۱}$$

خواهد بود. تحول عملگر مکان $\mathbf{x}$ در تصویر هایزنبرگ، به این نحو قابل محاسبه خواهد بود:

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{x}} &= \frac{i}{\hbar}\left[H, m\mathbf{x}\right] = \frac{i}{2\hbar}\left[(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{c}}\mathbf{A})^{\mathbf{2}}, \mathbf{x}\right] \\ &= \frac{i}{2\hbar}\Big((\mathbf{p} - \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{c}}\mathbf{A})\left[\mathbf{p} - \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{c}}\mathbf{A}, \mathbf{x}\right] + \left[\mathbf{p} - \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{c}}\mathbf{A}, \mathbf{x}\right](\mathbf{p} - \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{c}}\mathbf{A})\Big) \end{aligned} \tag{۲}$$

با توجه به این که A تابعی از x است پس $[A, x] = 0$ و در این صورت نتیجه خواهد بود:

$$m\dot{\mathbf{x}} = \frac{i}{2\hbar}\left(-2i\,\hbar(p - \frac{e}{c}A)\right) = p - \frac{e}{c}A. \tag{۳}$$

همچنین برای مشتق بعدی عملگر مکان خواهیم داشت:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \frac{i}{\hbar}\left[H, m\dot{\mathbf{x}}\right], \tag{۴}$$

براساس نتیجه‌ی پیشین داریم: $H = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2$ پس با جاگذاری این عبارت خواهیم داشت:

$$m\ddot{\mathbf{x}}_i = \frac{i\,m^2}{2\hbar}\left[\dot{\mathbf{x}}_j\dot{\mathbf{x}}_j, \dot{\mathbf{x}}_i\right], \tag{۵}$$

که در این جا از قاعده‌ی جمع‌زنی اندیس‌های اینشتین استفاده کرده‌ایم. برای ساده سازی این عبارت باید معادله‌ی 7.13.b کتاب را بدست آوریم. می‌نویسیم:

$$[m\dot{\mathbf{x}}_i, m\dot{\mathbf{x}}_j] = \left[p_i - \frac{e}{c}A_i, p_j - \frac{e}{c}A_j\right] \tag{۶}$$

می‌دانیم: $[p_m, A_n] = \frac{\hbar}{i}\partial_m\, A_n$ پس خواهیم داشت:

$$[m\dot{\mathbf{x}}_i, m\dot{\mathbf{x}}_j] = \frac{e\hbar}{ic}\left(\partial_j\, A_i - \partial_i\, A_j\right) \tag{۷}$$

از طرفی می‌دانیم: $B_i = \epsilon_{ijk}\partial_j\, A_k$ پس می‌توان با کمک اتحاد معروف بین ضرب تانسور لوی-چیویتا نوشت:

$$\epsilon_{ijk}B_k = \epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn}\partial_m\, A_n = (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm})\partial_m\, A_n = \partial_i\, A_j - \partial_j\, A_i. \tag{۸}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$[m\dot{\mathbf{x}}_i, m\dot{\mathbf{x}}_j] = i\,\hbar\frac{e}{c}\epsilon_{ijk}B_k. \tag{۹}$$

به معادله‌ی (۵) باز می‌گردیم، اکنون می‌توان آن را ساده کرد:

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{x}}_i &= \frac{i\,m^2}{2\hbar}\left[\dot{\mathbf{x}}_j\dot{\mathbf{x}}_j, \dot{\mathbf{x}}_i\right] = \frac{i\,m^2}{2\hbar}\left(\dot{\mathbf{x}}_j\left[\dot{\mathbf{x}}_j, \dot{\mathbf{x}}_i\right] + \left[\dot{\mathbf{x}}_j, \dot{\mathbf{x}}_i\right]\dot{\mathbf{x}}_j\right) \\ &= \frac{e}{2c}\epsilon_{ijk}\left(\dot{\mathbf{x}}_j\, B_k + B_k\,\dot{\mathbf{x}}_j\right) = \frac{e}{2c}\epsilon_{ijk}\left(2\dot{\mathbf{x}}_j\, B_k + [B_k, \dot{\mathbf{x}}_j]\right) \end{aligned} \tag{۱۰}$$

برای این قدم نهایی داریم:

$$[\dot{x}_j, B_k] = \epsilon_{kmn}[\dot{x}_j, \partial_m\, A_n] = \frac{\epsilon_{kmn}}{m}[p_j - \frac{e}{c}A_j, \partial_m\, A_n] = \frac{\epsilon_{kmn}\hbar}{im}\partial_j\partial_m A_n. \tag{۱۱}$$

اگر ثابت بودن میدان برداری B را فرض کنیم، جمله‌ی مورد بررسی صفر می‌شود و نتیجه ساده خواهد شد:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \frac{e}{c}\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B} \tag{۱۲}$$

با فرض این که میدان مغناطیسی در راستای محور z قرار دارد: $\mathbf{B} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{B})$ معادله‌ی حرکت به صورت زیر در خواهد آمد:

$$m\ddot{x} = -\omega_c\,\tau\,\dot{x}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_c = -\frac{Be}{mc}. \tag{۱۳}$$

با توجه به اتحاد زیر (قابل اثبات به کمک بسط تابع نمایی):

$$\exp(\tau\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}, \tag{۱۴}$$

حل معادله‌ی دیفرانسیل $m\ddot{x} = -\omega_c \tau \dot{x}$ به شکل زیر خواهد بود:

(۱۵)

$$\dot{x}(t) = \exp(-\omega_c t\tau)\dot{x}(0) = \begin{pmatrix} cos\omega_c t & -sin\omega_c t \\ sin\omega_c t & cos\omega_c t \end{pmatrix} \dot{x}(0) = (cos(\omega_c t) - \tau sin(\omega_c t))\dot{x}(0).$$

با انتگرال گیری از این نتیجه می‌توان عملگر مکان بر حسب زمان را محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} x(t) = X + \frac{1}{\omega_c}(sin(\omega_c t) + \tau cos(\omega_c t))\dot{x}(0) &= X + \frac{1}{\omega_c}\tau e^{-\omega_c \tau t}\dot{x}(0) \\ &= X + \frac{1}{\omega_c}\tau \dot{x}(t) \end{aligned} \tag{۱۶}$$

که در این جا X ثابت انتگرال‌گیری‌ای است که در حالت کلی می‌تواند یک عملگر باشد. برای ادامه‌ی کار کتاب از یک پیمانه‌ی خاص که در آن $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{2}}(-\mathbf{x_2}, \mathbf{x_1})$ است استفاده کرده. با این فرض از معادله‌ی فوق خواهیم داشت:

$$X = x - \frac{1}{\omega_c}\tau\dot{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \frac{\tau}{m\omega_c}\left[\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \frac{m\omega_c}{2}\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{m\omega_c}\begin{pmatrix} p_2 \\ -p_1 \end{pmatrix}$$

(۱۷)

اکنون می‌توان همه‌ی روابط جابجایی ممکن را نوشت. نخست از (۹) داریم:

$$[m\dot{x}_1, m\dot{x}_2] = \frac{i\hbar eB}{c}. \tag{۱۸}$$

همچنین:

$$[X_1, X_2] = [\frac{1}{2}x_1 - \frac{p_2}{m\omega_c}, \frac{1}{2}x_2 + \frac{p_1}{m\omega_c}] = \frac{i\hbar}{m\omega_c}. \tag{۱۹}$$

و همین طور:

$$[X_1, m\dot{x}_1] = [\frac{1}{2}x_1 - \frac{p_2}{m\omega_c}, p_1 - \frac{m\omega_c}{2}x_2] = 0, \tag{۲۰}$$

$$[X_1, m\dot{x}_2] = [\frac{1}{2}x_1 - \frac{p_2}{m\omega_c}, p_2 + \frac{m\omega_c}{2}x_1] = 0, \tag{۲۱}$$

$$[X_2, m\dot{x}_1] = [\frac{1}{2}x_2 + \frac{p_1}{m\omega_c}, p_1 - \frac{m\omega_c}{2}x_2] = 0, \tag{۲۲}$$

$$[X_2, m\dot{x}_2] = [\frac{1}{2}x_2 + \frac{p_1}{m\omega_c}, p_2 + \frac{m\omega_c}{2}x_1] = 0, \tag{۲۳}$$

مجموع این چهار معادله را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$[X_i, m\dot{x}_j] = 0, \tag{۲۴}$$

اگر تعریف به شکل زیر را در نظر بگیریم:

$$a = \frac{m(\dot{x}_2 + i\dot{x}_1)}{\sqrt{2\hbar\omega_c m}} \tag{۲۵}$$

در این صورت می‌توان نشان داد:

$$\begin{aligned} a^\dagger a = \frac{m}{2\hbar\omega_c}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{x}_1^2 + i(\dot{x}_2\dot{x}_1 - \dot{x}_1\dot{x}_2)\right) &= \frac{m}{2\hbar\omega_c}\left(\dot{\mathbf{x}}^2 - i[\dot{x}_1, \dot{x}_2]\right) \\ &= \frac{m}{2\hbar\omega_c}(\dot{\mathbf{x}}^2 - \frac{\hbar\omega_c}{m}) \end{aligned} \tag{۲۶}$$

و با توجه به این رابطه که $H = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2$ نتیجه می‌دهد:

$$H = \hbar\omega_c(a^\dagger a + \frac{1}{2}). \tag{۲۷}$$

نتایج مساله‌ی نوسانگر هارمونیک کوانتومی در اینجا نیز صادق است چرا که:

$$[a^\dagger, a] = \frac{m}{2\hbar\omega_c}[\dot{x}_2 - i\dot{x}_1, \dot{x}_2 + i\dot{x}_1] = \frac{m}{2\hbar\omega_c}\frac{2\hbar eB}{cm^2} = -1. \tag{۲۸}$$

در قدم بعدی تعریف زیر را معرفی می‌کنیم:

$$x_\pm = \frac{x_2 \pm ix_1}{\sqrt{2}}, \quad p_\pm = \frac{p_2 \mp ip_1}{\sqrt{2}}. \tag{۲۹}$$

بین این کمیت‌ها روابط زیر برقرار است:

$$[x_+, p_+] = \frac{1}{2}[x_2 + ix_1, p_2 - ip_1] = i\hbar, \tag{۳۰}$$

$$[x_+, p_-] = \frac{1}{2}[x_2 + ix_1, p_2 + ip_1] = 0, \tag{۳۱}$$

$$[x_-, p_+] = \frac{1}{2}[x_2 - ix_1, p_2 - ip_1] = 0, \tag{۳۲}$$

$$[x_-, p_-] = \frac{1}{2}[x_2 - ix_1, p_2 + ip_1] = i\hbar, \tag{۳۳}$$

بنابر این کمیت‌ها می‌توان نوشت:

$$a = \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega_c m}}\left(p_- - \frac{im\omega_c}{2}x_+\right) = \frac{1}{2ir_0}\left(x_+ + 2r_0^2\partial_{x_-}\right). \tag{۳۴}$$

که در این جا: $r_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}}$ است. همچنین به صورت مشابه:

$$a^\dagger = \frac{i}{2r_0}\left(x_- - 2r_0^2\partial_{x_+}\right). \tag{۳۵}$$

برای تابع موج در حالت پایه داریم:

$$a\left|0\right\rangle = 0, \quad \left(x_+ + 2r_0^2\partial_{x_-}\right)\psi_0(x_+, x_-) = 0 \tag{۳۶}$$

می‌توان دید که پاسخی به شکل:

$$\psi_0 = \exp\left(-\frac{x_- x_+}{2r_0^2}\right)f(x_+) \tag{۳۷}$$

که تابع $f(x_+)$ نامعین است در معادله‌ی دیفرانسیل فوق صدق می‌کند.

دیگر کمیت‌های مهم عبارتند از:

$$X_\pm = \frac{X_2 \pm iX_1}{\sqrt{2}}. \tag{۳۸}$$

داریم:

$$[X_+, X_-] = \frac{1}{2}[X_2 + iX_1, X_2 - iX_1] = -\frac{\hbar}{m\omega_c} = -r_0^2. \tag{۳۹}$$

در این نمایش نقش هامیلتونی را عملگر دیگری بازی می‌کند: $X_1^2 + X_2^2 = 2X_+X_- + r_0^2$ می‌توان دید که هر بار اعمال عملگر X_+ که به نوعی نقش بالابرنده را دارد، ویژه بردار این عملگر را به اندازه‌ی مشخصی بالاتر می‌برد:

$$(2X_+X_- + r_0^2)X_+\left|E\right\rangle = X_+(2X_+X_- + r_0^2)\left|E\right\rangle - (2X_+[X_+, X_-])\left|E\right\rangle = (E + r_0^2)X_+\left|E\right\rangle. \tag{۴۰}$$

به این ترتیب باید انتظار داشت ویژه بردار با کمترین ویژه مقدار $X_1^2 + X_2^2 = 2X_+X_- + r_0^2$ تحت عملگر پایین برنده‌ی X_- صفر بشود: $X_-\left|n\right\rangle = 0$ به یاد داریم که X و $\dot{x}$ با هم جابجا می‌شوند. به این ترتیب انتظار داریم که بردار پایه‌ی مشترکی نیز داشته باشند پس:

$$X_-\left|0\right\rangle = 0 \tag{۴۱}$$

به کمک این شرط اضافه می‌توان تابع موج حالت پایه را معین ساخت. به این منظور می‌نویسیم:

$$X_{\pm} = \frac{1}{2}x_{\pm} \mp r_0^2\partial_m p \qquad (۴۲)$$

پس نتیجه عبارت است از:

$$X_{-}\left|0\right\rangle = 0 = \left(\frac{1}{2}x_{-} + r_0^2\partial_{x_+}\right)\exp\left(-\frac{x_{-}x_{+}}{2r_0^2}\right)f(x_+). \qquad (۴۳)$$

معادله‌ی فوق را می‌توان بررسی کرد، عملگر $\left(\frac{1}{2}x_{-} + r_0^2\partial_{x_+}\right)$ به جمله‌ی نمایی اعمال می‌شود و نتیجه صفر می‌شود. اما وقتی به جمله‌ی $f(x_+)$ اعمال می‌شود نتیجه خواهد بود: $r_0^2 f'(x_+) = 0$ که مشخصا قید می‌کند که: $f(x_+) = const.$

اگر تعریف کنیم: $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 = 2x_+x_-$ شکل تابع موج عبارت خواهد بود از: $\psi_0 = Ne^{-\rho^2/4r_0^2}$ همچنین می‌توان تابع موج حالت‌های با انرژی بالاتر را با ضرب کردن عملگر بالابرنده $a^\dagger$ به دست آورد:

$$\psi_n = (a^\dagger)^n\psi_0 \propto \left(x_{-} - 2r_0^2\partial_{x_+}\right)^n\exp\left(-\frac{\rho^2}{4r_0^2}\right) \qquad (۴۴)$$

از سویی به سادگی داریم:

$$\partial_{x_+}F(\rho) = (\partial_{x_+}\rho^2)F'(\rho^2) = 2x_{-}F'(\rho^2) \qquad (۴۵)$$

پس برای عبارت فوق می‌توان نوشت:

$$\psi_n \propto (2x_{-})^n\exp\left(-\frac{\rho^2}{4r_0^2}\right) \qquad (۴۶)$$

از سویی هر ویژه بردار انرژی تبهگن است، این تبهگنی را می‌توان به شکل زیر دید که با اعمال عملگر X_+ به بردار ψ_n می توان سایر بردارهای با انرژی $E_n = \hbar\omega_c(n+1/2)$ را بدست آورد.

با نوشتن عملگر x_- به صورت: $x_- = -i\rho e^{-i\phi}$ بدست می‌آوریم:

$$\psi_n = N\frac{1}{\sqrt{n!}}\frac{1}{r_0^n}e^{in\phi}\rho^n\exp\left(-\frac{\rho^2}{4r_0^2}\right) \qquad (۴۷)$$

اکنون می‌توان گفت تابع توزیع احتمال وجود الکترون در فاصله‌ی ρ با $\rho|\psi_n|^2$ ارتباط دارد(احتمال حضور در نوار دایره‌ای به شعاع ρ با محیط دایره متناسب است):

$$\rho|\psi_n|^2 \propto \rho^{2n+1}e^{-\rho^2/2r_0^2}. \qquad (۴۸)$$

می‌توان پرسید ماکسیمم این تابع در چه نقطه‌ای رخ می‌دهد:

$$\frac{d}{d\rho}(\rho|\psi_n|^2) = 0 \to \frac{2n+1}{\rho} - \frac{\rho}{r_0^2} = 0 \qquad (۴۹)$$

که حل آن به سادگی نتیجه می‌دهد: $\rho = r_0\sqrt{2n+1}$

۲ سوال ۲

۱.۲ (الف)

تبدیل پیمانه‌ای معرفی شده به شکل:

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\mathbf{\Lambda}, \quad \phi \to \phi' = \phi - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}}\frac{\partial\mathbf{\Lambda}}{\partial\mathbf{t}}. \tag{۵۰}$$

این خاصیت را دارد که میدان‌های برداری الکتریکی $\mathbf{E}$ و مغناطیسی $\mathbf{B}$ را که کمیت‌های قابل اندازه‌گیری فیزیکی هستند را دست‌نخورده باقی می‌گذارند. فرم پیشنهادی برای تبدیل تابع موج به شکل:

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \to \psi'(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{exp}\left(\frac{\mathbf{i}\,\mathbf{e}}{\mathbf{\hbar}\,\mathbf{c}}\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{t})\right)\psi(\mathbf{x}, \mathbf{t}). \tag{۵۱}$$

قابل تحقیق است که معادله‌ی شرودینگر را دست‌نخورده باقی خواهد گذاشت. به این صورت که:

$$\begin{gathered}\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}'\right)^2 + e\phi'\right]\psi' = i\,\hbar\frac{\partial}{\partial\,t}\psi' \\ \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}(\mathbf{A} + \nabla\mathbf{\Lambda})\right)^2 + e(\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t})\right]e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda}\psi = i\,\hbar\frac{\partial}{\partial\,t}e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda}\psi\end{gathered} \tag{۵۲}$$

چنانچه تعریف کنیم:

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{\hbar}}{\mathbf{i}}\nabla - \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{c}}\mathbf{A}, \quad \mathbf{D}' = \frac{\mathbf{\hbar}}{\mathbf{i}}\nabla - \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{c}}(\mathbf{A} + \nabla\mathbf{\Lambda}). \tag{۵۳}$$

آن گاه می‌توان به سادگی دید:

$$D\psi' = De^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda}\psi = e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda}D\psi + \frac{e}{c}(\nabla\Lambda)\psi'. \tag{۵۴}$$

همچنین:

$$D'f(x,t) = Df(x,t) - \frac{e}{c}(\nabla\Lambda)f(x,t). \tag{۵۵}$$

از ترکیب دو عبارت فوق خواهیم داشت:

$$D'\psi' = D\psi' - \frac{e}{c}(\nabla\Lambda)\psi' = e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda}D\psi + \frac{e}{c}(\nabla\Lambda)\psi' - \frac{e}{c}(\nabla\Lambda)\psi' = e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda}D\psi. \tag{۵۶}$$

همچنین با تکرار این عملیات:

$$(D')^2\psi' = e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda}D^2\psi. \tag{۵۷}$$

با جاگذاری این نتیجه در معادله‌ی (۵۲) خواهیم داشت:

(۵۸)
$$e^{\frac{ie}{\hbar c}\lambda}\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2+e\phi\right]\psi-\frac{e}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda}\psi=i\,\hbar e^{\frac{ie}{\hbar c}\lambda}\frac{\partial}{\partial t}\psi-\frac{e}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda}\psi$$

با ساده کردن دو طرف معادله‌ی فوق به معادله‌ی شرودینگر اصلی می‌رسیم:

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2+e\phi\right]\psi=i\,\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi \qquad (۵۹)$$

در نتیجه معادله‌ی شرودینگر دست‌نخورده باقی می‌ماند.

۲.۲ (ب)

مساله‌ی حرکت الکترون در محیط با میدان مغناطیسی ثابت را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم در ناحیه‌ای از فضا بردار میدان مغناطیسی صفر باشد. یعنی:

$$B=0\rightarrow\nabla\times A=0\rightarrow A=\nabla\Lambda \qquad (۶۰)$$

و می‌توان نوشت:

$$\Lambda(x)=\int_{x_0}^{x}ds.A(s) \qquad (۶۱)$$

معادله‌ی شرودینگر در چنین محیطی را یادآوری می‌کنیم:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2\psi=i\,\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi \qquad (۶۲)$$

با تبدیل پیمانه‌ای مناسب: $A'=A-\nabla\Lambda=0$ می‌توان اثر پتانسیل الکترومغناطیس در معادله‌ی شرودینگر را از بین برد:

$$\frac{1}{2m}(\frac{\hbar}{i}\nabla)^2\psi'=i\,\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi' \qquad (۶۳)$$

که در صورت نبود پتانسیل خارجی همان انتشار آزاد در خلا است. ولی باید توجه داشت در صورتی این نتیجه به دست می‌آید که معادله شرودینگر برای تابع موج تبدیل یافته‌ی ψ' نوشته شود که رابطه‌ی زیر را با تابع موج فیزیکی دارد:

$$\psi=\psi'\exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\Lambda\right). \qquad (۶۴)$$

اکنون چینش آزمایشی دوشکاف را در نظر بگیرید به صورت رسم شده در شکل ۳.۷ کتاب. تفاوت این آزمایش با دوشکاف معمول، گذر شار مغناطیسی از میان دو شکاف (از طریق یک سیم پیچ به طول بی‌نهایت) است. اگر نور از دو مسیر ۱ و ۲ از شکاف بگذرد و به یک نقطه از پرده برخورد کند، در هر دوی این حالت‌ها رابطه‌ی بین تابع موج فیزیکی و تابع موج انتشار آزاد عبارت است از:

$$\psi_{1,B} = \psi_{1,0}\mathbf{exp}\left(\frac{ie}{\hbar c}\int_1 ds.A(s)\right) \quad (۶۵)$$

$$\psi_{2,B} = \psi_{2,0}\mathbf{exp}\left(\frac{ie}{\hbar c}\int_2 ds.A(s)\right) \quad (۶۶)$$

با تجمیع این دو خواهیم داشت:

$$\psi_{B} = \psi_{1,0}\mathbf{exp}\left(\frac{ie}{\hbar c}\int_1 ds.A(s)\right) + \psi_{2,0}\mathbf{exp}\left(\frac{ie}{\hbar c}\int_2 ds.A(s)\right) \quad (۶۷)$$

اختلاف فاز ناشی از مسیر این دو عبارت است از:

$$\int_1 ds.A(s) - \int_2 ds.A(s) = \oint ds.A(s) = \int da.curlA = \Phi_B \quad (۶۸)$$

به این وسیله می‌توان نوشت:

$$\psi_{B} = \left(\psi_{1,0}\mathbf{exp}\left(\frac{ie}{\hbar c}\Phi_B\right) + \psi_{2,0}\right)\exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\int_2 ds.A(s)\right) \quad (۶۹)$$

برای موج استوانه‌ای تابع موج انتشار آزاد به شکل $\psi_{i,0} \propto \frac{e^{ikr_i}}{\sqrt{r_i}}$ نوشته می‌شود. اکنون شرط این که دو جمله درون پرانتز در عبارت فوق فاز سازنده داشته باشند عبارت خواهد بود از:

$$kr_1 + \frac{e}{\hbar c}\Phi_B - kr_2 = 2\pi n. \quad (۷۰)$$

مشاهده می‌کنیم که شار مغناطیسی می‌تواند طرح تداخلی روی پرده را جابجا کند، این اتفاق در حالی رخ می‌دهد که الکترون از ناحیه‌ای که میدان مغناطیسی داشته گذر نکرده است. این اثر موسوم به اثر آهارونوف-بوهم است.