پاسخ تمرین سری ۳

درس مکانیک کوانتومی ۳، دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شریف

پاییز ۱۴۰۱

۱ سوال ۱

برای آهنگ گذار میان دو حالت m و n که توسط تابش فوتون با بردار موج $\vec{k}$ و قطبش λ انجام می‌شود، داریم:

$$\Gamma_{m\to n,k,\lambda} = \frac{(2\pi)^2 e^2}{kc}\,\delta(E_m - E_n - \hbar\, c\, k) \times \left|\langle n| \int d^3x\, \mathbf{j}(x).\epsilon^*_{k,\lambda} \frac{e^{-ik.x}}{\sqrt{V}}\, |m\rangle\right|^2 \quad (۱)$$

با اعمال تبدیل فوریه‌ی موج خروجی به صورت:

$$\mathbf{j}_k = \int d^3x\, \mathbf{j}(x)\, e^{-i\,k.x} \quad (۲)$$

خواهیم داشت:

$$\Gamma_{m\to n,k,\lambda} = \frac{(2\pi)^2 e^2}{kcV}\,\delta(E_m - E_n - \hbar\, c\, k)\left|\langle n|\, \mathbf{j}_k(x).\epsilon^*_{k,\lambda}\, |m\rangle\right|^2 \quad (۳)$$

بسط استفاده‌شده در صورت سوال عبارت است از:

$$\mathbf{j}_k = \mathbf{j}_0 - i\int d^3x\, \mathbf{j}(x)(k.x) + ... \quad (۴)$$

اکنون قصد دنبال کردن نقش جمله‌ی دوم را در آهنگ گذار داریم. انتگرال‌ده در این جمله را می‌توان به شیوه زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{j}(x).\epsilon^*_{k,\lambda}\right)(k.x) &= \frac{1}{2}\left(\left(\mathbf{j}(x).\epsilon^*_{k,\lambda}\right)(k.x) - \left(x.\epsilon^*_{k,\lambda}\right)(k.\mathbf{j})\right)\\ &+ \frac{1}{2}\left(\left(\mathbf{j}(x).\epsilon^*_{k,\lambda}\right)(k.x) + \left(x.\epsilon^*_{k,\lambda}\right)(k.\mathbf{j})\right)\end{aligned} \quad (۵)$$

جمله‌ی نخست در نتیجه‌ی عبارت فوق را می‌توان به این شیوه نوشت:

$$\frac{1}{2}\left(\left(\mathbf{j}(x).\epsilon^*_{k,\lambda}\right)(k.x)-\left(x.\epsilon^*_{k,\lambda}\right)(k.\mathbf{j})\right)=(k\times\epsilon^*_{k,\lambda}).(x\times\mathbf{j})=\frac{1}{m}(k\times\epsilon^*_{k,\lambda}).L \quad (۶)$$

جمله‌ی دوم که مربوط به تابش چهارقطبی الکتریکی است را در این جا بررسی نمی‌کنیم. برای اثبات روابط 16.79 کافیست همه‌ی حالت‌های غیر صفر زیر را در نظر بگیریم:

$$\langle l',m'|\,(k\times\epsilon^*_{k,\lambda}).L\,|l,m\rangle \quad (۷)$$

با توجه به این که $[L^2,\vec{L}]=0$ ، شرط ضروری برای غیر صفر بودن عبارت فوق این خواهد بود که: $l=l'$.

از سوی دیگر جمله‌ی L_z شرایطی را فراهم می‌کند که $m=m'$ جملات غیر صفر تولید کند. نتیجه‌ی غیر صفر همچنین می‌تواند از مولفه‌های L_x و L_y بیرون بیاید، چون این دو مولفه را می‌توان بر حسب $L_\pm$ نوشت، پس تنها حالت باقی‌مانده‌ی غیر صفر عبارت است از: $m=m'\pm1$.

۲ سوال ۲

در این پرسش به بررسی یک پتانسیل با تقارن کروی به شکل یک پوسته‌ی با ضخامت بسیار نازک به فرم:

$$V(r) = -\lambda \frac{\hbar^2}{2m} \delta(r-a). \tag{۸}$$

بپردازیم. اگر از کمیت‌های بدون بعد: $y = r/a$ کمک بگیریم:

$$\delta(r-a) = \delta(a(y-1)) = \frac{1}{a}\delta(y-1) \tag{۹}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$V(y) = -\lambda \frac{\hbar^2}{2ma} \delta(y-1) \tag{۱۰}$$

فرم عمومی جواب‌های معادله‌ی شعاعی شرودینگر ([17.2]) در بخش 17.2 کتاب، با فرض قرار گرفتن در ناحیه‌ای با پتانسیل ثابت، مورد بررسی قرار گرفته است. باید با در نظر گرفتن شرایط مرزی این نواحی را به هم متصل ساخت. در این مساله این دو ناحیه عبارتند از: $0 < r < a$ و $a < r$.

با توجه به وجود پتانسیل از نوع دلتای دیراک، و این که معادله‌ی دیفرانسیلی مورد نظر درجه‌ی دو است، انتظار داریم دیگر شرط مرزی $R'(a^+) = R'(a^-)$ که همان ثابت بودن مشتق در مرز است صادق نباشد. باید جایگزین این شرط مرزی را بدست بیاوریم. بدین منظور از معادله‌ی کامل شروع می‌کنیم:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\right] R(r) = 0 \tag{۱۱}$$

اگر از عبارت فوق در ناحیه‌ی $r = (a-\epsilon, a+\epsilon)$ انتگرال‌گیری کنیم و $\epsilon \to 0$ را اعمال کنیم بدست می‌آوریم:

$$\int_-^+ \frac{d}{dr}(R')dr + \int_-^+ \frac{2}{r}\frac{d}{dr}R dr + \int_-^+ \left(\frac{2m}{\hbar^2}E - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) R\, dr - \int_-^+ \frac{2m}{\hbar^2} V\, R\, dr = 0 \tag{۱۲}$$

و نتیجه خواهد بود:

$$R'(a^+) - R'(a^-) + R(a)\lambda = 0. \tag{۱۳}$$

این شرط مرزی به همراه: $R(a^+) = R(a^-)$ باید برای حل این مساله کفایت کند.

بر اساس راه حل ارائه شده در بخش 17.3 کتاب، حل معادله‌ی دیفرانسیلی برای ناحیه‌ی $r < a$ به صورت $R(r) = A\, j_l(i\kappa r)$ است که $\kappa = \sqrt{-2mE}/\hbar$. این جواب با در نظر گرفتن واگرا نشدن جواب در حد $r \to 0$ بدست آمده. برای ناحیه‌ی $r > a$ از سوی دیگر

جواب به صورت: $R(r) = Bh_l^{(1)}(i\kappa r)$ است تا در حد $r \to \infty$ به صورت نمایی نزول پیدا کند. شرایط مرزی بدست خواهند داد:

$$A\, j_l(i\kappa a) = B\, h_l^{(1)}(i\kappa a) \tag{۱۴}$$

$$B\, h_l^{(1)\prime}(i\kappa a) - A\, j_l'(i\kappa a) + \lambda A\, j_l(i\kappa a) = 0 \tag{۱۵}$$

برای حالت: $l = 0$ خواهیم داشت:

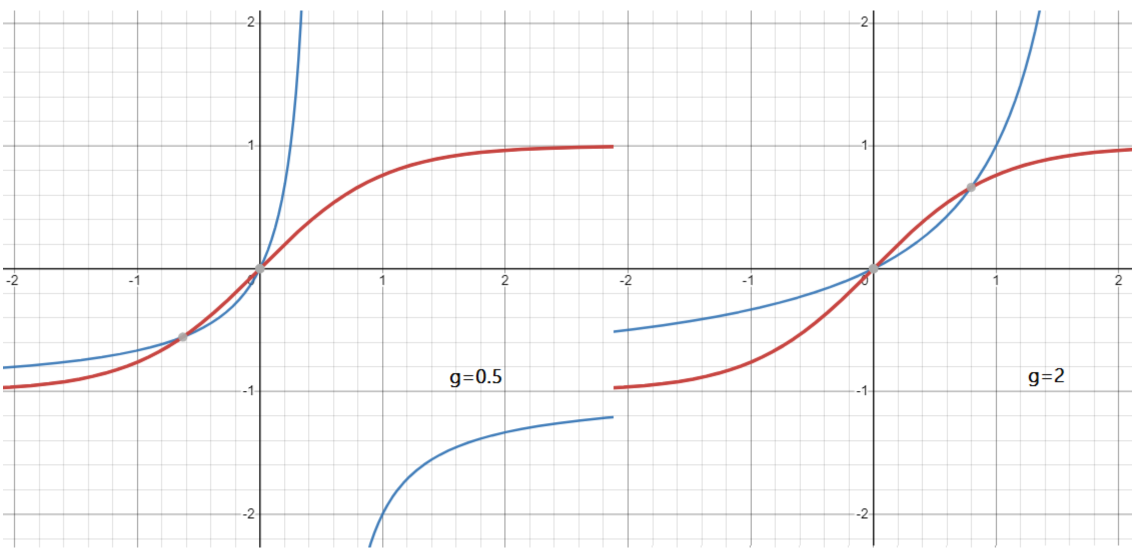
$$A\,\frac{sinh(\kappa a)}{\kappa a} = B\,\frac{sin(i\kappa a) - icos(i\kappa a)}{i\kappa a} = -B\frac{1}{\kappa a}e^{-\kappa a} \tag{۱۶}$$

$$B\,\frac{1}{a}e^{-\kappa a} + B\,\frac{1}{\kappa a^2}e^{-\kappa a} - A\,\frac{cosh(\kappa a)}{a} + A\frac{sinh(\kappa a)}{\kappa a^2} + \lambda A\frac{sinh(\kappa a)}{\kappa a} = 0 \tag{۱۷}$$

با ترکیب دو معادله خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &B\frac{e^{\xi}}{a}(1+\frac{1}{\xi}) + \frac{A}{a}\left(-cosh(\xi) + sinh(\xi)\left(\frac{1}{\xi}+\frac{g}{\xi}\right)\right) = 0 \\ &-sinh(\xi)(1+\frac{1}{\xi}) - cosh(\xi) + \frac{sinh(\xi)}{\xi}(1+g) = 0 \\ &tanh(\xi) = \frac{\xi}{g-\xi} \end{aligned} \tag{۱۸}$$

با رسم هر دو سمت نتیجه‌ی نهایی فوق مشاهده می‌کنیم این معادله در حالت $0 < g < 1$ هیچ جوابی که با شرط $\xi > 0$ همخوانی داشته باشد ندارد.



ولی در حالت $g<1$ مشابه نمودار یک جواب خواهد داشت.

بخش ب:

با بازگشت به شرایط مرزی (۱۴) و (۱۵) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{h_l^{(1)}(ika)}\frac{d}{dr}h_l^{(1)}(ika)-\frac{1}{j_l(ika)}\frac{d}{dr}j_l(ika)+\lambda=0 \tag{۱۹}$$

با استفاده از متغیرهای بدون بعد:

$$ik\left(\frac{h_l^{(1)\prime}(x)j_l(x)-j_l'(x)h_l^{(1)}(x)}{h_l^{(1)}(x)j_l(x)}\right)_{(x=ika)}+\lambda=0 \tag{۲۰}$$

می‌توان رابطه‌ی فوق را ساده کرد به این نحو که داریم:

$$h_l^{(1)\prime}(x)j_l(x)-j_l'(x)h_l^{(1)}(x)=\frac{i}{x^2} \tag{۲۱}$$

رجوع شود به تمرین 11.7.20 از کتاب ریاضی-فیزیک آرفکن ویراست ۳. با جاگذاری این عبارت بدست می‌آوریم:

$$\frac{1}{h_l^{(1)}(ika)j_l(ika)}=-\lambda\,k\,a^2 \tag{۲۲}$$

رفتار این معادله را در دو حد $\xi=ka$ بسیار کوچک و بسیار بزرگ بررسی می‌کنیم:

$$-\frac{1}{h_l^{(1)}(i\xi)j_l(i\xi)}=g\xi \tag{۲۳}$$

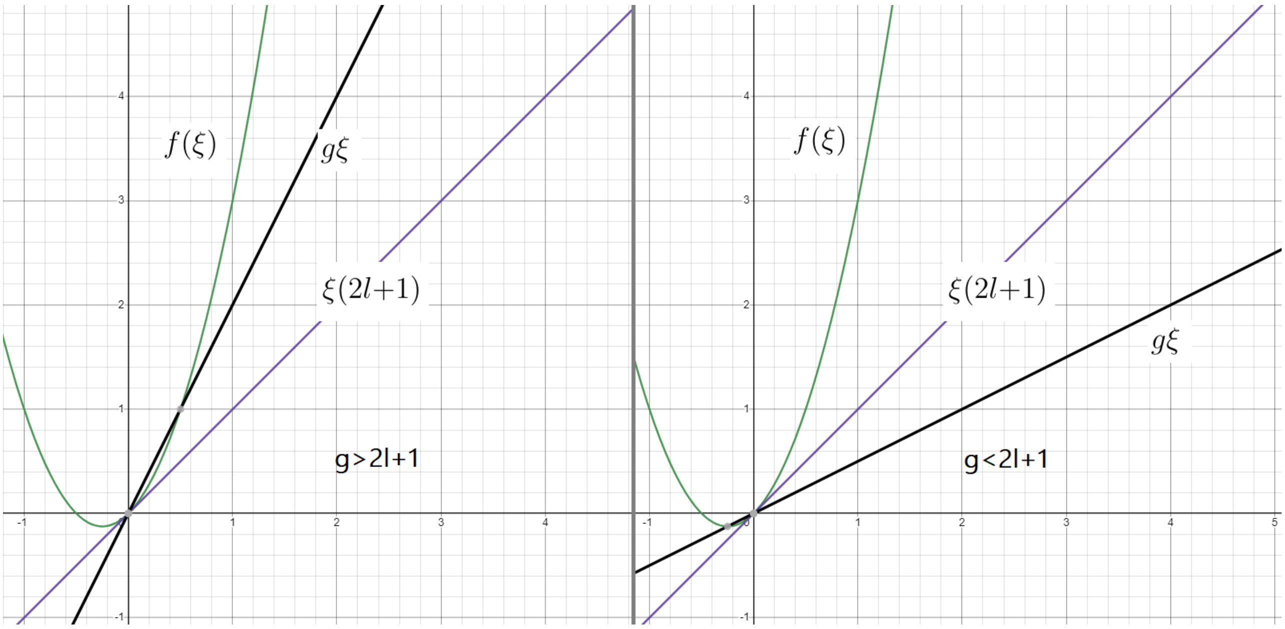
برای $\xi>>1$ داریم:

$$\xi>>1\qquad f(\xi)=-\frac{1}{h_l^{(1)}(i\xi)j_l(i\xi)}=-\frac{1}{-\frac{i}{i\xi}e^{-\xi-il\pi/2}\frac{1}{i\xi}\sin\left(i\xi-l\pi/2\right)}=2\xi^2 \tag{۲۴}$$

و در حالت دیگر:

$$\xi<<1\qquad f(\xi)=-\frac{1}{h_l^{(1)}(i\xi)j_l(i\xi)}=-\frac{1}{\frac{(i\xi)^l}{1\times3\times\ldots\times(2l+1)}(-i)\frac{1\times3\times\ldots\times(2l-1)}{(i\xi)^{l+1}}}=\xi(2l+1) \tag{۲۵}$$

پس می‌توان سمت چپ معادله‌ی (۲۳) را این گونه شناخت که، در ξ های کوچک شبیه معادله‌ی خطی $\xi(1+2l)$ رفتار می‌کند و هر چه ξ بیشتر می‌شود رفتار آن به سهمی $2\xi^2$ نزدیک‌تر می‌شود. مسلما جنین نموداری اگر در ξ کوچک، زیر نمودار $g\xi$ قرار نگیرد، همواره بالای آن خواهد بود و هیچ تقاطعی وجود نخواهد داشت، به این سبب، تنها حالتی که جواب غیر صفر وجود داشته باشد حالتی است که: $g>2l+1$ باشد. اگر این شرط برقرار باشد تنها یک جواب خواهیم داشت چرا که سهمی $2\xi^2$ رشد شدیدتری نسبت به $g\xi$ دارد و از آن عقب نمی‌ماند.


$f(\xi)$
$g\xi$
$\xi(2l{+}1)$
g>2l+1
$f(\xi)$
$\xi(2l{+}1)$
$g\xi$
g<2l+1