$r = |\vec{y}| \geq 0$

درحالت کلی

$$G_\pm(\vec{y}) = -\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{y}}}{\vec{q}^2 - \vec{k}^2 \mp i\epsilon}$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) \int_0^{\infty} \frac{e^{iqr\cos\theta}}{q^2 - k^2 \mp i\epsilon} \frac{q^2 dq}{(2\pi)^3}$$

$$= -2\pi \int_0^{\infty} \frac{q^2 dq}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{iqr} e^{iqr\cos\theta} \right)_{-1}^{+1} \frac{1}{(q^2 - k^2 \mp i\epsilon)}$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2 ir} \int_0^{\infty} \frac{q\,dq}{q^2 - k^2 \mp i\epsilon} \left(e^{iqr} - e^{-iqr} \right)$$

$$= \frac{-1}{4\pi^2 ir} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{q\,dq\, e^{iqr}}{q^2 - k^2 \mp i\epsilon} - \int_0^{\infty} \frac{q\,dq\, e^{-iqr}}{q^2 - k^2 \mp i\epsilon} \right\}$$

$$q \to -q$$

$$- \int_0^{-\infty} \frac{q\,dq\, e^{+iqr}}{q^2 - k^2 \mp i\epsilon}$$

$$= \frac{-1}{4\pi^2 ir} \left(\int_0^{\infty} \frac{q\,dq\, e^{iqr}}{q^2 - k^2 \mp i\epsilon} + \int_{-\infty}^{0} \frac{q\,dq\, e^{iqr}}{q^2 - k^2 \mp i\epsilon} \right)$$

$$\boxed{G_\pm(\vec{y}) = \frac{-1}{4\pi^2 ir} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q\,dq\, e^{iqr}}{q^2 - k^2 \mp i\epsilon}}$$

$$e^{iqr} = e^{i(\alpha + i\beta)r} = \cancel{e^{i\alpha r}}^{\,-\beta r} \quad \beta \to +\infty \;\Rightarrow\; \to 0$$

با توجه به علامت e^{iqr} و اینکه $r \geq 0$ است، برای G_+ و G_- انتگرال‌گیری را باید روی نیم صفحه بالا انجام دهیم؛

$$G_+(|\vec{y}|) = G_+(r) = \frac{-1}{4\pi^2 ir} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q\,dq\, e^{iqr}}{\big(q - (k + i\epsilon)\big)\big(q - (-k - i\epsilon)\big)}$$

$q = k$ * تنها قطب باقیمانده در نیم صفحه بالا

$$= -\frac{1}{4\pi^2 \cancel{i} r} \cancel{2\pi i} \frac{\cancel{k}\, e^{ikr}}{2\cancel{k}} = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$

$$\boxed{G_+(r) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}}$$ Retarded Green's function

$$G_-(|\vec{y}|) = G_-(r) = \frac{-1}{4\pi^2 i r}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{q\,dq\,e^{iqr}}{\big(q-(-k+i\epsilon)\big)\big(q-(+k-i\epsilon)\big)}$$

تنها قطب باقیمانده در نیم صفحه بالا $q=-k$

$$= \frac{-1}{\cancel{4\pi^2 i r}}\,\cancel{2\pi i}\,\frac{(-k)\,e^{-ikr}}{\cancel{-2k}} = -\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}$$

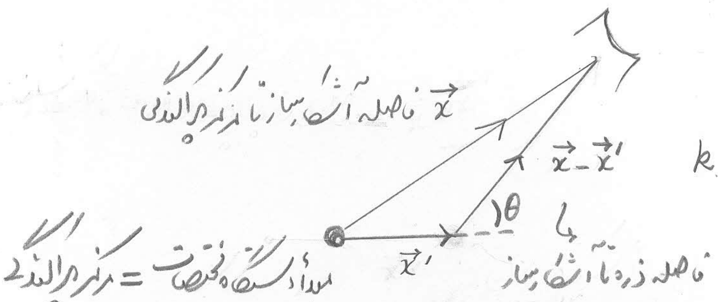
$$\boxed{G_-(r) = -\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}}$$ Advanced Green's function

در مسئله مورد نظر ما، تابع Retarded باید در نظر گرفته شود. زیرا ابتدا اختلالی به سیستم وارد شود (ذره در محیط پتانسیل وارد شده است) و سپس پاسخ آن را از سیستم می‌خواهیم

در نتیجه همان معادله انتگرالی است که باید با تقریب حل شود: Lippmann-Schwinger equation

$$\boxed{\psi_k(\vec{x}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3x'\,\frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,V(\vec{x}')\,\psi_{\vec{k}}(\vec{x}')}$$

تقریب: فاصله زیاد آشکارساز از ذره پراکنده کننده $|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$



$$k|\vec{x}-\vec{x}'| = k\left(\vec{x}^2+\vec{x}'^2-2\vec{x}\cdot\vec{x}'\right)^{1/2}$$

$$= kr\left(1+\cancel{\frac{\vec{x}'^2}{\vec{x}^2}}-\frac{2\vec{x}\cdot\vec{x}'}{\vec{x}^2}\right)^{1/2}$$

$$\underset{|\vec{x}|\gg|\vec{x}'|}{\cong} kr\left(1-\frac{2\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r^2}\right)^{1/2} \approx kr\left(1-\frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r^2}\right)$$

$$= kr - \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r}k$$

Def: $\frac{k\vec{x}}{r} \equiv \vec{k}' \longrightarrow k|\vec{x}-\vec{x}'| \approx kr - \vec{k}'\cdot\vec{x}'$

$$e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|} \approx e^{ikr}\,e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}'}$$

$$\boxed{\psi_k(\vec{x}) \cong e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3x'\,\frac{e^{ikr}\,e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}'}}{r}\,V(\vec{x}')\,\psi_{\vec{k}}(\vec{x}')}$$

$$\psi_{\vec k}(\vec x) \simeq e^{i\vec k\cdot\vec x} + \frac{e^{ikr}}{r} f_{\vec k}(\theta,\varphi)$$

$$\text{with} \quad f_{\vec k}(\theta,\varphi) \equiv -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3x' \; e^{-i\vec k'\cdot\vec x'}\, V(\vec x')\,\psi_{\vec k}(\vec x')$$

scattering amplitude دامنه پراکندگی

• این جواب فرم کلی جواب‌های پراکندگی پایا stationary scattering solution است.

نکته: این دامنه پراکندگی فقط به ۲ زاویه θ و φ بستگی دارد و هرگونه اطلاعات در مورد فاصله آشکارساز تا منبع یا فاصله آشکارساز تا محل پراکندگی و غیره از آن حذف شده است.

همچنین مشاهده می‌شود که جواب $\psi_{\vec k}(\vec x)$ شامل یک بخش موج تخت و یک بخش موج کروی است و ضریب موج کروی اطلاعات مربوط به دامنه پراکندگی را شامل می‌شود.

رفتار زمانی بسته موج:

بسته ورودی (امواج تخت به ذره آزاد) $\psi_0(\vec x,t_0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a_{\vec k}\, e^{i\vec k\cdot\vec x}$ (1) داشتیم

$$\psi_0(\vec x,t_0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} A_{\vec k}\,\psi_{\vec k}(\vec x) \longrightarrow$$ بسط ψ_0 برحسب $\psi_{\vec k}$

هدف: تعیین $a_{\vec k}$ برحسب $A_{\vec k}$ با استفاده از تعریف:

استفاده می‌کنیم از

$$\psi_{\vec k}(\vec x) = e^{i\vec k\cdot\vec x} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3x' \,\frac{e^{ik|\vec x-\vec x'|}}{|\vec x-\vec x'|} V(\vec x')\,\psi_{\vec k}(\vec x')$$

$$e^{i\vec k\cdot\vec x} = \psi_{\vec k}(\vec x) + \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3x' \,\frac{e^{ik|\vec x-\vec x'|}}{|\vec x-\vec x'|} V(\vec x')\,\psi_{\vec k}(\vec x')$$

این عبارت را در (۱) جایگزین می‌کنیم:

$$\psi_0(\vec x,t_0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a_{\vec k}\left\{\psi_{\vec k}(\vec x) + \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3x' \,\frac{e^{ik|\vec x-\vec x'|}}{|\vec x-\vec x'|} V(\vec x')\,\psi_{\vec k}(\vec x')\right\}$$

$$(\star)\quad = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a_{\vec k}\,\psi_{\vec k}(\vec x) + \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a_{\vec k}\int d^3x' \,\frac{e^{ik|\vec x-\vec x'|}}{|\vec x-\vec x'|} V(\vec x')\,\psi_{\vec k}(\vec x')$$

ادعا: اگر بتوانیم با استفاده از تقریب ثابت کنیم جمله دوم قابل صرفنظر کردن است، در این صورت $A_{\vec k} \approx a_{\vec k}$ می‌شود و این نتیجه می‌دهد که تابع موج $\psi_0(\vec x, t_0)$ اگر بر حسب جواب‌های پایا $\psi_k(\vec x)$ بسط داده شود، همان ضرایبی را در فضای k خواهد داشت که اگر بر حسب موج تخت بسط داده می‌شد.

اثبات:

$$k = \sqrt{\vec k^2} = \sqrt{(\vec k_0 + \vec k - \vec k_0)^2} = \sqrt{\vec k_0^2 + (\vec k - \vec k_0)^2 + 2\vec k_0 \cdot (\vec k - \vec k_0)}$$

$$= k_0 \left(1 + \frac{(\vec k - \vec k_0)^2}{\vec k_0^2} + 2\frac{(\vec k - \vec k_0)\cdot \vec k_0}{\vec k_0^2}\right)^{\frac12}$$

اگر $k_0^2 \gg (\vec k - \vec k_0)^2$ باشد، می‌توان از جمله دوم صرفنظر کرد، در آن صورت خواهیم داشت:

$$k \approx k_0 \left(1 + \frac{2\vec k_0 \cdot (\vec k - \vec k_0)}{\vec k_0^2}\right)^{\frac12} \cong k_0 \left(1 + \frac{\vec k_0 \cdot (\vec k - \vec k_0)}{\vec k_0^2}\right)$$

$$\sim k_0 + \frac{\vec k_0}{k_0}\cdot(\vec k - \vec k_0) = k_0 + \hat k_0 \cdot (\vec k - \vec k_0)$$

$\hat{k}_0$ بردار واحد در جهت $\vec k_0$

$$= \cancel{k_0} + \hat k_0 \cdot \vec k - \cancel{\underbrace{\hat k_0 \cdot \vec k_0}_{\frac{\vec k_0^2}{k_0} = k_0}}$$

$$= \hat k_0 \cdot \vec k$$

$$\boxed{k \approx \hat k_0 \cdot \vec k}$$

این مقدار را در جمله دوم (*) صفحه قبل جایگزین می‌کنیم:

$$* \text{ جمله دوم} \quad \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a_{\vec k} \int d^3x' \frac{e^{ik|\vec x - \vec x'|}}{|\vec x - \vec x'|} V(\vec x') \psi_{\vec k}(\vec x')$$

$$\approx \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a_{\vec k} \int d^3x' \frac{e^{i\hat k_0 \cdot \vec k |\vec x - \vec x'|}}{|\vec x - \vec x'|} V(\vec x') \psi_{\vec k}(\vec x')$$

$$\simeq \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3x \; V(\vec x') \frac{1}{|\vec x - \vec x'|}$$

$$\times \overbrace{\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a_{\vec k} \; e^{i\hat k_0 \cdot \vec k |\vec x - \vec x'|}}^{*} \underbrace{\psi_{\vec k}(\vec x')}_{\sim \psi_{\vec k_0}(\vec x')}$$

تقریب با توجه به اینکه ماکزیمم تابع موج در $\vec k = \vec k_0$ قرار دارد

$*$

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a_{\vec k} \; e^{i\hat k_0 \cdot \vec k |\vec x - \vec x_0|} = \psi_0(\hat k_0 |\vec x - \vec x'|, t_0)$$

$\longrightarrow$

$$\star \quad \text{جمله دوم} \approx \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3x'\, V(\vec{x}')\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,\underbrace{\psi_0\left(\hat{k}_0|\vec{x}-\vec{x}'|, t_0\right)\psi_{\vec{k}_0}(\vec{x}')}$$

این همان تابع موج اولیه است بنتها مکانش در نقطه $\hat{k}_0|\vec{x}-\vec{x}'|$ است؛

$$\hat{k}_0|\vec{x}-\vec{x}'| \approx \hat{k}_0|\vec{x}| = \hat{k}_0 r.$$

این نقطه تقریباً در مکان آشکارساز است. ولی تابع موج اولیه در مکان آشکارساز تقریباً صفر است.

نتیجه: پس جمله دوم قابل صرفنظر کردن است.

$$(\star) \rightarrow \psi_0(\vec{x},t_0) \simeq \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, a_{\vec{k}}\,\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) + \text{جملات قابل صرفنظر}\ \Bigg\}\rightarrow A_{\vec{k}}\approx a_{\vec{k}}$$

ansatz مقایسه با $\psi_0(\vec{x},t_0) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, A_{\vec{k}}\,\psi_{\vec{k}}(\vec{x})$ ∎

برگردیم به صفحه ۷۵: در آنجا دیدیم که تحول زمانی $\psi_0(\vec{x},t_0)$ منجر می‌شود به $\psi(\vec{x},t)$

$$\psi(\vec{x},t) = \exp\left(\frac{-i}{\hbar}H_0(t-t_0)\right)\psi_0(\vec{x},t_0)$$

$$= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0(t-t_0)\right)\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}A_{\vec{k}}\,\psi_{\vec{k}}(\vec{x})$$

$$= \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\exp\left(\frac{-i}{\hbar}E_{\vec{k}}(t-t_0)\right)\underbrace{A_{\vec{k}}}_{A_{\vec{k}}\approx a_{\vec{k}}}\ \underbrace{\psi_{\vec{k}}(\vec{x})}$$

$$H_0\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = E_{\vec{k}}\psi_{\vec{k}}(\vec{x})$$

صفحه ۸۱

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) \approx e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \frac{e^{ikr}}{r}f_{\vec{k}}(\theta,\varphi)$$

$$\psi(\vec{x},t) \approx \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\exp\left(\frac{-i}{\hbar}E_{\vec{k}}(t-t_0)\right)a_{\vec{k}}\left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \frac{e^{ikr}}{r}f_{\vec{k}}(\theta,\varphi)\right)$$

$$(\star\star)\quad \boxed{\begin{aligned}\psi(\vec{x},t) = &\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_{\vec{k}}(t-t_0)}\, a_{\vec{k}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ &+ \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_{\vec{k}}(t-t_0)}\,\frac{e^{ikr}}{r}f_{\vec{k}}(\theta,\varphi)\, a_{\vec{k}}\end{aligned}}$$

ادعا: می‌خواهیم نشان دهیم:

$$\boxed{\psi(\vec{x},t) = \underbrace{\psi_0(\vec{x},t)}_{\text{شکل تابع موج تغییر نکرده فقط تحول یافته.}} + \underbrace{\psi_0(\hat{k}_0 r,t)}_{\text{مکان آشکارساز}}\frac{f_{\vec{k}_0}(\theta,\varphi)}{r}}$$

اثبات:

جمله اول در $(**)$

سمت موج تخت

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, a_{\vec{k}}\, e^{i\vec{k}.\vec{x}}\, e^{-\frac{iE_{\vec{k}}(t-t_0)}{\hbar}} \underset{E_{\vec{k}}=\frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2m}}{=} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, a_{\vec{k}}\, e^{i\vec{k}.\vec{x}}\, e^{-\frac{i\vec{k}^2\hbar}{2m}(t-t_0)}$$

تقریب ۱: $\frac{\hbar\vec{k}^2}{2m}(t-t_0) \approx \frac{\hbar\,\vec{k}\cdot\vec{k}_0\,(t-t_0)}{2m}$ در نظر

✓ به این علت که ماکزیمم تابع موج در $\vec{k} \simeq \vec{k}_0$ است.

✓ لذا استفاده می‌کنیم از $\frac{\hbar\vec{k}_0}{m} \equiv \vec{v}$

$$\frac{E_k(t-t_0)}{\hbar} = \frac{\hbar\vec{k}^2}{2m}(t-t_0) \sim \vec{k}\cdot\vec{v}\,(t-t_0)$$

پس خواهیم داشت.

$$\boxed{\begin{aligned}\text{جمله اول در } (**) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, a_{\vec{k}}\, e^{i\vec{k}.\vec{x}}\, e^{-i\vec{k}.\vec{v}(t-t_0)}\\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, a_{\vec{k}}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{v}(t-t_0))}\\ &= \psi_0(\vec{x}-\vec{v}(t-t_0)) \equiv \psi_0(\vec{x},t)\end{aligned}}$$

بخش موج تخت

تعبیر: این همان تابع موج اولیه است و بدون تغییر شکل با سرعت $\vec{v}$ بدون اینکه تغییر شکل تا لحظهٔ t (دلخواه ولی $t>t_0$) به مسیر خود ادامه می‌دهد. این عدم تغییر شکل به این معنی است که ذره‌ای می‌آید و بدون اینکه مرکز پراکندگی را ببیند ...

به راه خود ادامه می‌دهد و می‌رود!

جمله دوم $(**)$

سمت موج کروی

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \frac{e^{ikr}}{r}\, f_{\vec{k}}(\theta,\varphi)\, a_{\vec{k}}\, e^{-\frac{iE_{\vec{k}}(t-t_0)}{\hbar}}$$

مجدداً مشابه استدلال بالا (تقریب ۱)

$$\frac{E_k(t-t_0)}{\hbar} = \frac{\hbar\vec{k}^2}{2m}(t-t_0) \sim \vec{k}.\vec{v}\,(t-t_0)$$

• تقریب ۲: $k \approx \hat{k}_0.\vec{k}$ (صفحه ۸۲)

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \frac{e^{i\hat{k}_0.\vec{k}r}}{r}\, e^{-i\vec{k}.\vec{v}(t-t_0)}\, \underbrace{f_{\vec{k}}(\theta,\varphi)}_{\sim f_{\vec{k}_0}(\theta,\varphi)}\, a_{\vec{k}}$$

به این علت که مرکز بسته موج در فضای تکانه در $\vec{k}_0$ است.

$$\simeq \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\hat{k}_0 r-\vec{v}(t-t_0))}}{r}\, \underbrace{f_{\vec{k}_0}}_{\text{از زیر انتگرال روی } \vec{k} \text{ می‌تواند بیرون بیاید}}(\theta,\varphi)\, a_{\vec{k}}$$

ادامه

جمله دوم در (**)
$$\approx \frac{f_{\vec{k}_0}(\theta,\varphi)}{r} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{k}\cdot(\hat{k}_0 r - \vec{v}(t-t_0))} a_{\vec{k}}$$

$$= \frac{f_{\vec{k}_0}(\theta,\varphi)}{r}\, \psi_0\left(\hat{k}_0 r - \vec{v}(t-t_0)\right) \equiv \psi_0(\hat{k}_0 r, t)$$

پس خواهیم داشت.

$$\psi(\vec{x},t) \cong \psi_0(\vec{x},t) + \psi_0(\hat{k}_0 r, t)\frac{f_{\vec{k}_0}(\theta,\varphi)}{r}$$

همانطور که ادعا شده بود.

به این ترتیب در حالت مجانبی هم شکل تابع موج متناسب است با $\psi_0(\hat{k}_0 r, t)$ که همان شکل اولیه تابع موج است.

- جمله اول قسمت گذرای بسته موج است.
- جمله دوم قسمت پراکنده‌شده بسته موج است.
- موج نهایی ترکیب خطی از این دو قسمت است.
- نکته اینجاست که قسمت پراکنده‌شده با توجه به $f_{\vec{k}_0}(\theta,\varphi)$ در همه فضا (کره به مرکز مکان ذره پراکنده‌کننده) پراکنده می‌شود.

ج) سطح مقطع پراکندگی — Scattering cross section

حکم:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{\vec{k}}(\theta,\varphi)|^2.$$

سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی

اثبات:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \frac{e^{ikr}}{r} f_{\vec{k}}(\theta,\varphi)$$
$$= \psi_{\vec{k}}^{in}(\vec{x}) + \psi_{\vec{k}}^{out}(\vec{x})$$

$$\vec{J}(\vec{x}) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi_{\vec{k}}^{*}\vec{\nabla}\psi_{\vec{k}} - \psi_{\vec{k}}\vec{\nabla}\psi_{\vec{k}}^{*}\right)$$

$$\vec{J}_{in} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi_{\vec{k}(in)}^{*}\vec{\nabla}\psi_{\vec{k}(in)} - \psi_{\vec{k}(in)}\vec{\nabla}\psi_{\vec{k}(in)}^{*}\right) = \frac{\hbar \vec{k}}{2m} = \frac{\hbar}{2mi}(2i\vec{k})$$

$$\vec{J}_{out} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi_{\vec{k}(out)}^{*}\vec{\nabla}\psi_{\vec{k}(out)} - \psi_{\vec{k}(out)}\vec{\nabla}\psi_{\vec{k}(out)}^{*}\right) = \frac{\hbar k}{2mr^2}\times 2\hat{e}_r |f_{\vec{k}}|^2$$
$$= \frac{\hbar k}{mr^2}|f_{\vec{k}}(\theta,\varphi)|^2 \hat{e}_r$$

$$d\sigma \equiv \frac{N\,d\Omega}{j_{in}} =$$

$$N\,d\Omega = \vec{J}_{out}\cdot(d\vec{F})_r = \vec{J}_{out}\cdot\hat{e}_r\,dA = \vec{J}_{out}\cdot\hat{e}_r\,r^2 d\Omega$$

$$= \frac{\hbar k}{m r^2}\,|f_{\vec{k}}(\theta,\varphi)|^2\,(\hat{e}_r\cdot\hat{e}_r)\,r^2 d\Omega = \frac{\hbar k}{m}\,|f_{\vec{k}}(\theta,\varphi)|^2 d\Omega$$

$$\rightarrow d\sigma = \frac{\frac{\hbar k}{m}\,|f_{\vec{k}}(\theta,\varphi)|^2\,d\Omega}{\frac{\hbar k}{m}} \Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{\vec{k}}(\theta,\varphi)|^2}$$

$$\sigma = \int d\sigma = \int |f_{\vec{k}}(\theta,\varphi)|^2\,d\Omega$$ سطح مقطع کل پراکندگی