مطالب کوانتومی ۳ - صفحه ۸۷ - آبان ۱۳۹۷

• بسط برحسب امواج جزئی :

(مراجعه به بخش ۱۷ کتاب)

معرفی ابزار :

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} C_{lm}(k)\, j_l(kr)\, Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

وقتی در مسئله ای تقارن کروی وجود داشته باشد (تقارن نسبت به تغییر φ)، کافی است به حالت $m=0$ فقط توجه کنیم؛ در اینصورت با استفاده از $Y_{l0}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,P_l(\cos\theta)$ و روشی که در کتاب شرح آن رفته است، خواهیم رسید به :

$$\boxed{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l\,(2l+1)\, j_l(kr)\, P_l(\cos\theta)}$$

که در آن $P_l(\cos\theta)$ توابع Legendre هستند

$$j_l(\rho) = (-\rho)^l\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^l \frac{\sin\rho}{\rho}$$

• با توجه به قانون جمع برای توابع Legendre

$$P_l(\cos\theta) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{+l} Y^{*}_{lm}(\theta,\varphi)\, Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

که می توان آن را بصورت کلی تر

$$P_l(\cos\theta) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{+l} Y^{*}_{lm}(\Omega_{\vec{k}})\, Y_{lm}(\Omega_{\vec{x}})$$

که در آن $\Omega_{\vec{x}} = (\theta,\varphi)$ در فضای مکان و $\Omega_{\vec{k}} = (\theta_{\vec{k}},\varphi_{\vec{k}})$ در فضای تکانه هستند

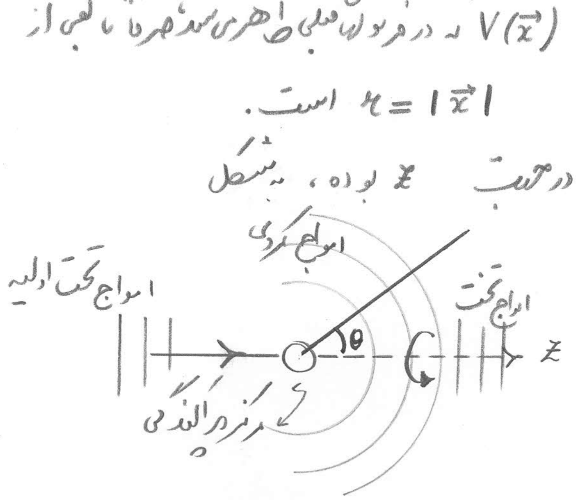
خواهیم رسید به :

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} i^l\, j_l(kr)\, Y^{*}_{lm}(\Omega_{\vec{k}})\, Y_{lm}(\Omega_{\vec{x}})$$

برگردیم به مسئله پراکندگی

فرض ۱ : در ادامه فرض می کنیم که پتانسیل $V(\vec{x})$ که در فرمولهای قبلی ظاهر می شود صرفاً تابعی از فاصله r است که در اینجا $r = |\vec{x}|$ است.

فرض ۲ : فرض می کنیم که موج فرودی صرفاً در جهت z بوده، به شکل



$$\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \frac{e^{ikr}}{r} f_{\vec{k}}(\theta,\varphi)$$

جواب بالا = ترکیب خطی امواج تخت و امواج کروی.

$\vec{k} = k\vec{e}_z$

دامنه پراکندگی $\rightarrow$ $\boxed{f_{\vec{k}}(\theta,\varphi) = f_k(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)\, f_\ell\, P_\ell(\cos\theta)}$. (I)

بسط $f_k(\theta)$ برحسب $P_\ell(\cos\theta)$

$f_k(\theta) =$ Scattering Amplitude

$f_\ell =$ Partial wave scattering amplitude.

(II) . از طرفی می‌خواهیم از بسط زیر برای بسط $\psi_{\vec{k}}(\vec{x})$ امواج پایه برحسب $P_\ell(\cos\theta)$ استفاده کنیم:

Partial wave expansion

بسط برحسب امواج جزئی

$$\boxed{\begin{cases} \psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \dfrac{e^{ikr}}{r} f_k(\theta) \\ \qquad\quad = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell+1)\, R_\ell(r)\, P_\ell(\cos\theta) \end{cases}}$$

به این ترتیب در روابط (I) و (II) دو مجهول R_ℓ و f_ℓ وجود دارند که در ادامه سعی می‌کنیم آنها را تعیین کنیم؛

$\leftarrow$ ابتدا R_ℓ را تعیین می‌کنیم:

در نواحی‌ای که در آنجا $V(r) \sim 0$ می‌شود (یا حداقل $V(r) < \frac{1}{r^2}$ است)، به نظر می‌رسد بتوان نوشت

مثلاً $V(r) \sim \frac{1}{r} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Ansatz:

$$\boxed{R_\ell = B_\ell \Big(\underbrace{h_\ell^{(2)}(kr)}_{\text{سهم موج ورودی}} + S_\ell(E)\, \underbrace{h_\ell^{(1)}(kr)}_{\text{سهم موج خروجی}} \Big)}$$

$h_\ell^{(1)}(\rho) = j_\ell(\rho) + i\, n_\ell(\rho)$ Spherical Hankel function

$h_\ell^{(2)}(\rho) = \left(h_\ell^{(1)}(\rho)\right)^*$

رفتار حدی این توابع در حد $\rho = kr \to \infty$ عبارت است از

$$h_\ell^{(1)}(\rho) \longrightarrow -i\,\frac{e^{i(\rho - \ell\pi/2)}}{\rho}$$

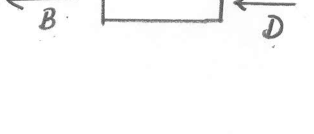
$$h_\ell^{(2)}(\rho) \longrightarrow i\,\frac{e^{-i(\rho - \frac{\ell\pi}{2})}}{\rho}$$

. توجه کنید که $S_\ell(E)$ بطور کلی ویژه مقادیر ماتریس پراکندگی هستند:

$\psi_L(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$

$\psi_R(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx}$

$$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}$$



$\psi_{out} = S\,\psi_{in}$ $\quad \psi_{out} = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$ $\quad \psi_{in} = \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}$

$S^T = S \;,\; S^* S = I$

$$\rho \equiv kr$$

ببینیم تا اینجا چه داریم :

از یک طرف
$$\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \frac{e^{ikr}}{r} f_k(\theta)$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1)\, j_l(\rho)\, P_l(\cos\theta) + \frac{k\, e^{i\rho}}{\rho} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l\, P_l(\cos\theta)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{\rho} P_l(\cos\theta) \left[i^l \rho\, j_l(\rho) + k e^{i\rho} f_l \right] \qquad (A)$$

از طرف دیگر
$$\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) R_l P_l(\cos\theta)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta)\, i^l B_l \left(h_l^{(2)}(\rho) + S_l(E)\, h_l^{(1)}(\rho) \right) \qquad (B)$$

<u>اولاً :</u> (۱) از مقایسه (A) و (B) با استفاده از تعاریف j_l و $h_l^{(1)}$ و $h_l^{(2)}$ می‌توان ثابت کرد که در حد $\rho \to \infty$ مقدار $B_l = \frac{1}{2}$ است.

(۲) در صورتی که فرض کنیم پراکندگی از نوع کشسان است، یعنی $|S_l(E)| = 1$ می‌شود یا به عبارت دیگر $S_l(E) = e^{2i\delta_l}$ که δ_l انتقال فاز است، آنگاه مجدداً در حد $\rho \to \infty$ می‌توان نشان داد که

$$f_l = \frac{e^{i\delta_l} \sin\delta_l}{k}$$

(۳) و به این ترتیب با فرض کشسان بودن پراکندگی داریم:

$$R_l(\rho) \xrightarrow[\rho\to\infty]{} \frac{e^{i\delta_l}}{\rho} \sin\left(\rho - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right)$$

اثبات: (۱)

(A) را در نظر بگیرید

$$(A)\quad \psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{\rho} P_l(\cos\theta)\left[i^l \rho\, j_l(\rho) + k e^{i\rho} f_l\right]$$

طبق تعریف

$$j_l \xrightarrow[\rho\to\infty]{} \frac{1}{\rho}\sin\left(\rho-\frac{l\pi}{2}\right) = \frac{1}{2i\rho}\left(e^{i(\rho-\frac{l\pi}{2})} - e^{-i(\rho-\frac{l\pi}{2})}\right)$$

را در آن جایگزین می‌کنیم:

$$(A') \rightarrow \psi_{\vec{k}}(\vec{x}) \cong \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{\rho} P_l(\cos\theta)\left[\frac{i^l}{2i}\left(e^{i(\rho-\frac{l\pi}{2})} - \underline{\underline{e^{-i(\rho-\frac{l\pi}{2})}}}\right) + k e^{i\rho} f_l\right] \quad (A')$$

حال (B) را در نظر می‌گیریم و بجای $h_l^{(1)}$ ، $h_l^{(2)}$ مقادیر حدی آن را جایگزین می‌کنیم

$$h_l^{(1)} \xrightarrow[\rho\to\infty]{} \frac{-i}{\rho} e^{+i(\rho-\frac{l\pi}{2})}$$

$$h_l^{(2)} \longrightarrow \frac{+i}{\rho} e^{-i(\rho-\frac{l\pi}{2})}$$

خواهیم رسید به:

$$(B') \rightarrow \psi_{\vec{k}}(\vec{x}) \cong \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{\rho} P_l(\cos\theta)\left[\underline{\underline{\frac{i^l}{-i} B_l\, e^{-i(\rho-\frac{l\pi}{2})}}} + S_l(E)\frac{i^l}{i} B_l\, e^{+i(\rho-\frac{l\pi}{2})}\right]$$

اگر جمله دوم رابطه A' را با جمله اول رابطه B' مقایسه کنیم $B_l = \frac{1}{2}$ خواهد شد. ∎

اثبات (۲): در اینجا فرض کشسان بودن پراکندگی (برخورد) بسیار اساسی است. در این مورد (فعلاً بدون اثبات، اثبات آن را آخر انجام خواهیم داد)، در نظر می‌گیریم که در پراکندگی کشسان

$$|S_l(E)|^2 = 1 \longrightarrow S_l(E) = e^{2i\delta_l}$$

حال از مقایسه جمله اول رابطه (A') با جمله دوم رابطه (B') خواهیم داشت: ←

$$(\star)\quad e^{i(\rho-\frac{l\pi}{2})} + \frac{2ik}{i^l} k e^{i\rho} f_l = \underbrace{S_l(E)}_{=e^{2i\delta_l}} e^{i(\rho-\frac{l\pi}{2})} = e^{i(\rho-\frac{l\pi}{2}+2\delta_l)}$$

$$\rightarrow \frac{2\cancel{i}}{i^l} k e^{\cancel{i\rho}} f_l = e^{i\delta_l} e^{i(\rho-\frac{l\pi}{2})}\left(e^{i\delta_l} - e^{-i\delta_l}\right)$$

$$= 2i e^{i\delta_l} \cancel{e^{i\rho}} e^{-\frac{il\pi}{2}} \sin\delta_l$$

$$\frac{k}{i^l} f_l = e^{i\delta_l} \underbrace{e^{-\frac{il\pi}{2}}}_{(-i)^l = \frac{1}{i^l} = \star} \sin\delta_l$$

$$\Rightarrow \boxed{f_l = \frac{e^{i\delta_l}\sin\delta_l}{k}} \quad ∎$$

نکته: این جواب در حد $\rho \to \infty$ ($\rho \gg l$) و در صورت پراکندگی کشسان صحیح است.

اثبات (۳): برگردیم به رابطهٔ (B). با فرض کشسان بودن پراکندگی (یعنی $S_\ell(E)=e^{2i\delta_\ell}$)، R_ℓ عبارت خواهد بود از

$$R_\ell = \underbrace{B_\ell}_{=\frac{1}{2}} \left(h_\ell^{(2)}(\rho) + \underbrace{e^{2i\delta_\ell}}_{S_\ell(E)} h_\ell^{(1)}(\rho) \right).$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(j_\ell(\rho) - i n_\ell(\rho)\right) + e^{2i\delta_\ell} \left(j_\ell(\rho) + i n_\ell(\rho)\right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{i\delta_\ell} \left(j_\ell(\rho)\left(e^{-i\delta_\ell} + e^{+i\delta_\ell}\right) + i n_\ell(\rho)\left(e^{i\delta_\ell} - e^{-i\delta_\ell}\right) \right)$$

$$= e^{i\delta_\ell} \left(j_\ell(\rho) \cos\delta_\ell - n_\ell(\rho) \sin\delta_\ell \right)$$

$$\xrightarrow[\rho\to\infty]{} \frac{e^{i\delta_\ell}}{\rho} \left(\sin\left(\rho - \frac{\ell\pi}{2}\right)\cos\delta_\ell + \cos\left(\rho - \frac{\ell\pi}{2}\right)\sin\delta_\ell \right)$$

$$= \frac{e^{i\delta_\ell}}{\rho} \sin\left(\rho - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell\right)$$

$$\longrightarrow \boxed{R_\ell(\rho) = \frac{e^{i\delta_\ell}}{\rho} \sin\left(\rho - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell\right)}$$

اختلاف فاز جزئی $\rightarrow$ Partial Phase Shift $\rightarrow$ $\delta_\ell(E)$

نکته: در تمرین‌ها اثبات می‌کنیم که شار جریان احتمال در جهت شعاع (رابطهٔ ۱۸.۳۴ کتاب)

$$j_r \propto \frac{\hbar k}{m} \operatorname{Im}\left(R_\ell^* \frac{\partial}{\partial\rho} R_\ell \right) \qquad \rho = kr$$

$$= \frac{\hbar k}{m} \operatorname{Im}\left\{ \left(h_\ell^{(1)*} + S_\ell h_\ell^{(1)} \right)^* \frac{\partial}{\partial\rho} \left(h_\ell^{(1)*} + S_\ell h_\ell^{(1)} \right) \right\}$$

$h_\ell^{(2)} = h_\ell^{(1)*}$

$$= \frac{\hbar k}{m} \operatorname{Im}\left\{ h_\ell^{(1)} h_\ell^{(1)*\prime} + \underbrace{h_\ell^{(1)} S_\ell h_\ell^{(1)\prime} + S_\ell^* h_\ell^{(1)*} h_\ell^{(1)*\prime}}_{\text{این دو جمله مزدوج هم‌اند} \leftarrow \text{جمعشان حقیقی می‌شود و قابل صرف‌نظر کردن}} + |S_\ell|^2 h_\ell^{(1)*} h_\ell^{(1)\prime} \right\}$$

$$= \frac{\hbar k}{m} \operatorname{Im}\left\{ \underbrace{h_\ell^{(1)} h_\ell^{(1)*\prime}}_{a+ib} + |S_\ell|^2 \underbrace{h_\ell^{(1)*} h_\ell^{(1)\prime}}_{a-ib} \right\}$$

این دو جمله هم مزدوج هم‌اند

$$\propto \frac{\hbar k}{m} \left(1 - |S_\ell|^2 \right)$$

به این ترتیب j_r متناسب می‌شود با $(1-|S_\ell|^2)$. در پراکندگی الاستیک (کشسان) باید $j_r = 0$ باشد
زیرا اگر یک کره حول مرکز پراکندگی قرار دهیم، تعداد ذرات ورودی و خروجی از کره باید با هم برابر باشند

$$\longrightarrow j_r = 0 \Longrightarrow |S_\ell(E)|^2 = 1 \longrightarrow S_\ell(E) = e^{2i\delta_\ell(E)}$$

بسط سطح مقطع پراکندگی برحسب امواج جزئی :

• قبلاً دیده بودیم که $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{\vec{k}}(\theta,\varphi)|^2$ است. از طرفی $f_k(\theta)$ را برحسب امواج جزئی (به شرط وجود تقارن سمتی برحسب φ) بسط دادیم

$$f_k(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, P_l(\cos\theta)\, f_l =$$

از طرفی داشتیم

$$f_l = \frac{e^{i\delta_l} \sin\delta_l}{k}$$

سؤال این است که آیا می‌توان $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ را هم برحسب امواج جزئی بسط داد :

ادعا :

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l \longrightarrow \sigma_l = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\sin^2\delta_l$$

اثبات :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_k(\theta)|^2 = \left|\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\, P_l(\cos\theta)\, f_l\right|^2$$

$$= \left|\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\, P_l(\cos\theta)\, \frac{e^{i\delta_l}\sin\delta_l}{k}\right|^2$$

$$= \sum_{l,l'=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}(2l+1)(2l'+1)\, P_l(\cos\theta)\, P_{l'}(\cos\theta)\, e^{i\delta_l} e^{-i\delta_{l'}} \sin\delta_l \sin\delta_{l'} \qquad (*)$$

ما به $\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$ نیاز داریم و می‌توانیم از رابطهٔ تعامد برای $P_l(\cos\theta)$ استفاده کنیم

(رابطهٔ) $\int d\Omega\, P_l(\cos\theta)\, P_{l'}(\cos\theta) = \frac{4\pi}{2l+1}\delta_{ll'}$ (5.28 استفاده شده است)

با جایگزینی در رابطهٔ $(*)$ و جمع روی l' داریم

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\sin^2\delta_l \equiv \sum_{l=0}^{\infty}\sigma_l$$

$$\longrightarrow \boxed{\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\sin^2\delta_l}$$

قضیه اپتیکی Optical Theorem

ادعا : می‌توان نشان داد که

$$\sigma = \frac{4\pi}{k}\, \mathrm{Im}\left(f_k(\theta=0)\right)$$