برهمکنش با میدان تابش

• همیلتونی یک الکترون در مجاورت میدان الکترومغناطیسی:

$e =$ بار الکتریکی

$m \equiv m_e =$ جرم الکترون

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{x},t)\right)^2 + e\varphi(\vec{x},t) + V(\vec{x})$$

• اگر جزئی تعداد متناهی الکترون این معادله را در نظر بگیریم: (با جرم های مساوی برای همه الکترونها)

$$H = \sum_i \left[\frac{1}{2m}\left(\vec{P}_i - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{x}_i,t)\right)^2 + e\varphi(\vec{x}_i,t) + V(\vec{x}_i)\right] \qquad (A)$$

Or

$$H = H_0 + V(t)$$

$$H_0 = \sum_i \left(\frac{\vec{P}_i^{\,2}}{2m} + V(\vec{x}_i)\right)$$

$$V(t) = \sum_i \left[\frac{-e}{2mc}\left\{\vec{P}_i , \vec{A}(\vec{x}_i,t)\right\} + \frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}(\vec{x}_i,t) + e\varphi(\vec{x}_i,t)\right]$$

پادجابجاگر $\{A,B\} = AB + BA$

نکته: $V(\vec{x}_i)$ می تواند شامل پتانسیل جاذبه بین الکترونها و هسته ها و دافعه بین خود الکترونها باشد.

• تعریف:

$\rho(\vec{x}) \equiv \sum_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$ چگالی تعداد ذرات

$\vec{J}(\vec{x}) \equiv \frac{1}{2}\sum_i \left\{\frac{\vec{P}_i}{m}, \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)\right\}$ چگالی جریان

نکته: $\vec{J}(\vec{x})$ چگالی جریان "تعداد ذرات" است و نه چگالی جریان الکتریکی. اگر بخواهیم چگالی جریان الکتریکی بدست بیاوریم باید از همیلتونی H نسبت به $\vec{A}$ وردش بگیریم

چگالی جریان "الکتریکی"
$$\vec{J} = -c\frac{\delta H}{\delta \vec{A}(\vec{x},t)} \underset{H \text{ از معادله } (A)}{=} \sum_i \left[\frac{-c}{2m}\left(\frac{-e}{c}\right)\delta(\vec{x}-\vec{x}_i)\left(\vec{P}_i - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{x}_i,t)\right) - \frac{c}{2m}\left(\frac{-e}{c}\right)\left(\vec{P}_i - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{x}_i,t)\right)\delta(\vec{x}-\vec{x}_i)\right]$$

$$\boxed{\vec{J}(\vec{x},t) = \frac{e}{2m}\sum_i \left\{\underbrace{\left(\vec{P}_i - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{x}_i,t)\right)}_{= m\dot{\vec{x}}_i \text{ Kinetic momentum}}, \delta(\vec{x}-\vec{x}_i)\right\}}$$

ادامه • با استفاده از تعاریف بالا برای $\rho(\vec{x})$, $\vec{J}(\vec{x})$ نشان می دهیم:

ادعا: $V(t) = \int d^3x \left(-\frac{e}{c}\vec{J}(\vec{x})\cdot\vec{A}(\vec{x},t) + \frac{e^2}{2mc^2}\rho(\vec{x})\vec{A}^2(\vec{x},t) + e\,\rho(\vec{x})\,\varphi(\vec{x},t) \right)$

اثبات:
$$V(t) = \int d^3x \left(\frac{-e}{2mc}\sum_i \left\{\vec{P}_i, \delta(\vec{x}-\vec{x}_i)\right\}\cdot\vec{A}(\vec{x},t) + \frac{e^2}{2mc^2}\sum_i \delta(\vec{x}-\vec{x}_i)\vec{A}^2(\vec{x},t) + e\sum_i \delta(\vec{x}-\vec{x}_i)\varphi(\vec{x},t) \right)$$

Use
$$\int d^3x\ \delta(\vec{x}-\vec{x}_i)\, f(\vec{x},t) = f(\vec{x}_i,t)$$

$$V(t) = \frac{-e}{2mc}\sum_i \left\{\vec{P}_i, \vec{A}(\vec{x}_i,t)\right\} + \frac{e^2}{2mc^2}\sum_i \vec{A}^2(\vec{x}_i,t) + \left[e\,\varphi(\vec{x}_i,t)\right. \quad \checkmark \quad \square$$

در مقایسه با $V(t)$ صفحه قبل صحیح است

نتیجه اینکه:

$$\boxed{\begin{aligned} H &= H_0 + V(t) \\ H_0 &= \sum_i \left(\frac{\vec{P}_i^2}{2m} + V(\vec{x}_i)\right) \\ V(t) &= \int d^3x \left(-\frac{e}{c}\vec{J}(\vec{x})\cdot\vec{A}(\vec{x},t) + \frac{e^2}{2mc^2}\rho(\vec{x})\vec{A}^2(\vec{x},t) + e\rho(\vec{x})\varphi(\vec{x},t) \right) \end{aligned}}$$

کوانتیزه کردن میدان تابشی:

مقدمه:

معادلات همگن ماکسول

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0 \longrightarrow \vec{\nabla}\times\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\exists\varphi: \quad \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = -\vec{\nabla}\varphi \Longrightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$$

معادلات ناهمگن ماکسول

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

• فرض می‌کنیم که $\vec{J}=0$ ، $\rho=0$ (چشمه‌های خارجی موجود نیستند):

در پیمانه کولنی : $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ ، $\varphi = 0$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = 0 = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right)$$

$$\longrightarrow \underbrace{\cancel{\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})}}_{=0 \ \text{در پیمانه کولنی}} - \vec{\nabla}^2\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\left(\vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}\right) = 0}$$

به این ترتیب (در شرایط خاصی که چشمه خارجی وجود ندارد و پیمانه کولنی انتخاب شده است) $\vec{A}$ در معادله موج صدق می‌کند.

جواب این معادله در حالت کلی عبارت است بسط فوریه برحسب پایه‌های موج تخت

$$(\star) \qquad \vec{A}(\vec{x},t) = \sum_{\vec{k}} \vec{A}_{\vec{k}}(t)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

در اینجا $\vec{k}$ گسسته در نظر گرفته شده است. ولی در حالت کلی می‌توان آن را پیوسته گرفت و بجای $\sum_{\vec{k}}$ انتگرال $\int d^3k$ گذاشت.

قدمهای اصلی برای کوانتیزه کردن میدان الکترومغناطیسی:

(a) انرژی کل میدان را برحسب میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در نظر می‌گیریم و آن را برحسب $\vec{A}$ بازنویسی می‌کنیم؛

(b) از بسط جواب $(\star)$ برای $\vec{A}(\vec{x},t)$ استفاده می‌کنیم.

(c) جواب بدست آمده را با همیلتونی نوسانگرهای هماهنگ مقایسه می‌کنیم.

(d) جواب مربوط برای $\vec{A}$ را توسط عملگرهای افزاینده و کاهنده که از مقایسه با نوسانگر داریم می‌نویسیم:

← قدم اول و دوم:

$$H_{rad} = \frac{1}{8\pi}\int d^3x\,(\vec{E}^2+\vec{B}^2) = \frac{1}{8\pi}\int d^3x\left(\left|-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right|^2 + |\vec{\nabla}\times\vec{A}|^2\right)$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$
$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

جمله اول در H_{rad}

(1) Use $\star$: $\quad \dot{\vec{A}}(\vec{x},t) = \sum_{\vec{k}} \dot{\vec{A}}_k(t)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$

$$\rightarrow \frac{1}{c^2}\int d^3x\,|\dot{\vec{A}}(\vec{x},t)|^2 = \frac{1}{c^2}\int d^3x \sum_{\vec{k},\vec{k}'} \dot{\vec{A}}_k(t)\,\dot{\vec{A}}^*_{k'}(t)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}}$$

$$= \frac{1}{c^2}\sum_{\vec{k},\vec{k}'} \dot{\vec{A}}_k(t)\,\dot{\vec{A}}^*_{\vec{k}'}(t)\,\underbrace{\int d^3x\, e^{i\vec{x}\cdot(\vec{k}-\vec{k}')}}_{=V\delta_{\vec{k},\vec{k}'}}$$

$$= \frac{V}{c^2}\sum_{\vec{k}} \dot{\vec{A}}_{\vec{k}}(t)\,\dot{\vec{A}}^*_{\vec{k}}(t) = \frac{V}{c^2}\sum_{\vec{k}} |\dot{\vec{A}}_k(t)|^2$$

جمله اول H_{rad} →

$$\boxed{\frac{1}{8\pi c^2}\int d^3x\left|\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right|^2 = \frac{V}{8\pi c^2}\sum_{\vec{k}} |\dot{\vec{A}}_{\vec{k}}(t)|^2}$$

$$\int d^3x\, |\vec\nabla\times\vec A|^2 = \int d^3x\, \Big|\vec\nabla\times\sum_{\vec k}\vec A_{\vec k}(t)\, e^{i\vec k\cdot\vec x}\Big|^2$$

$$= \int d^3x \sum_{\vec k}\Big| i\vec k\times\vec A_{\vec k}(t)\, e^{i\vec k\cdot\vec x}\Big|^2$$

$$= i(-i)\int d^3x \sum_{\vec k,\vec k'}\big(\vec k\times\vec A_{\vec k}(t)\big)\big(\vec k'\times\vec A^{*}_{\vec k'}(t)\big)\, e^{i\vec k\cdot\vec x}\, e^{-i\vec k'\cdot\vec x}$$

Use

$$\int d^3x\, e^{i\vec k\cdot\vec x - i\vec k'\cdot\vec x} = V\delta_{\vec k,\vec k'}$$

$$\boxed{\curvearrowright\ \frac{1}{8\pi}\int d^3x\, |\vec\nabla\times\vec A|^2 = \frac{V}{8\pi}\sum \big|\vec k\times\vec A_{\vec k}(t)\big|^2}$$: جمله دوم Hrad

به این ترتیب Hrad :

$$\boxed{\begin{aligned} H_{rad} &= \frac{1}{8\pi}\int d^3x \left(\Big|\frac{-1}{c}\frac{\partial\vec A}{\partial t}\Big|^2 + |\vec\nabla\times\vec A|^2\right) \\ &= \frac{V}{8\pi}\sum_{\vec k}\left(\frac{1}{c^2}\big|\dot{\vec A}_{\vec k}(t)\big|^2 + \big|\vec k\times\vec A_{\vec k}(t)\big|^2\right)\end{aligned}} \qquad (2)$$

قدم سوم: مقایسه با همیلتونی نوسانگرهای هماهنگ؛

$$H = \frac{1}{2}m\dot q^2(t) + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2(t)$$

$$q(t)\longrightarrow \vec A_k(t)$$

$$\frac{m}{2}\longrightarrow\frac{V}{8\pi c^2}\ \curvearrowright\ m\to\frac{V}{4\pi c^2}$$

$$\frac{1}{2}m\omega^2\longrightarrow\frac{V}{8\pi}\vec k^2 = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{V}{4\pi c^2}\right)}_{m}\vec k^2c^2$$

در مقایسه

$\omega_{\vec k}^2 = \vec k^2 c^2$ که معادله پاشندگی فوتون است.

با توجه به این مقایسه Hrad با همیلتونی نوسانگرهای هماهنگ معادل است (که کوپل نشده اند) (در واقع مجموعه‌ای از ∞ نوسانگر) !

یادآوری مجدد: برای یک نوسانگر داشتیم

$$q(t) = \frac{x_0}{\sqrt2}\left(a e^{-i\omega t} + a^+ e^{+i\omega t}\right)$$

$$\dot q(t) = \frac{x_0}{\sqrt2}\left(-i\omega a e^{-i\omega t} + i\omega a^+ e^{+i\omega t}\right)$$

$$\hookrightarrow\ H = \frac{1}{2}m\dot q^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2(t)\ \curvearrowright\ H = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right)$$

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle,\quad E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

به این ترتیب خواهیم داشت:

Use: $x_0 = \sqrt{\dfrac{\hbar}{m\omega}} \longrightarrow \sqrt{\dfrac{\hbar}{\frac{V}{4\pi c^2}kc}} = \sqrt{\dfrac{2\pi\hbar c}{kV}}$

with $k = |\vec k|$

ترم چهارم

به این ترتیب خواهیم داشت:

For $H_{rad} = \frac{V}{8\pi} \sum_{\vec{k}} \left(\frac{1}{c^2} |\dot{\vec{A}}_{\vec{k}}(t)|^2 + |\vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}}(t)|^2 \right)$

$$(3) \quad \boxed{\vec{A}(\vec{x},t) = \sum_{\vec{k},\lambda=1,2} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kV}} \left(a_{\vec{k},\lambda}\, \vec{\epsilon}_{\vec{k},\lambda}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega_{\vec{k}} t} + a^+_{\vec{k},\lambda}\, \vec{\epsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\omega_{k} t} \right)}$$

نکته: • $\vec{\epsilon}_{\vec{k},\lambda}$ بردارهای پلاریزاسیون فوتون هستند و $\lambda = 1,2$ دو جهت پلاریزاسیون (درجه آزادی فیزیکی) برای فوتون را تشکیل می‌دهند

• با توجه به شرط پیمانه‌ای $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$$\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_{\vec{k},\lambda} = 0$$

از مشابهت (analogy) با نوسانگرهای هماهنگ از رابطهٔ $[a, a^+] = 1$ بدست خواهیم آورد:

$$[\, a_{\vec{k},\lambda} \,,\, a^+_{\vec{k}',\lambda'} \,] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'}\, \delta_{\lambda\lambda'}$$

• توجه کنید که ما میدان الکترومغناطیسی را در یک حجم محدود در نظر گرفته بودیم. به همین علت $\delta_{\vec{k},\vec{k}'}$ (دلتای کرونکر) بدست می‌آید بجای دلتای دیراک $\delta(\vec{k}-\vec{k}')$

• تعبیر ما از $a_{\vec{k},\lambda}$ و $a^+_{\vec{k},\lambda}$ به ترتیب عملگرهای فنا (بجای کاهنده) و خلق (بجای افزاینده) است.

به این معنی که $a_{\vec{k},\lambda}$ یک فوتون را با تکانه $\vec{k}$ و پلاریزاسیون λ نابود می‌کند و

$a^+_{\vec{k},\lambda}$ یک فوتون را با تکانه $\vec{k}$ و پلاریزاسیون λ خلق می‌کند.

• فوتونهایی که به این ترتیب خلق یا فنا می‌شوند به اصطلاح on-mass shell هستند. یعنی فرکانس و عدد موج آنها در رابطه $\omega_{\vec{k}} = |\vec{k}|c$ صدق می‌کند. اگر دو طرف را در یک $\hbar$ ضرب کنیم $E = \hbar\omega_k = \hbar k c = pc$ رابطهٔ پاشندگی یک ذره بدون جرم نسبیتی است. $(k = |\vec{k}| \,,\, p = |\vec{p}|)$

حالا اگر رابطهٔ (3) را در رابطهٔ (2) قرار دهیم، به مشابهت با هملیتونی نوسانگرها هماهنگ خواهیم داشت:

$$\boxed{H_{rad} = \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\omega_{\vec{k}} \left(a^+_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2} \right) \qquad \omega_{\vec{k}} = kc}$$

تعریف: $\hat{n}_{\vec{k},\lambda} \equiv a^+_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda}$

تعبیر جدید از این عملگر (بجای عملگر شمارش) ← عملگر اشغال Occupation number Op.

← این عملگر می‌گوید چند تعداد فوتون با تکانه $\vec{k}$ و پلاریزاسیون λ در هر کدام از حالتها نشسته‌اند.

معادله ویژه مقداری برای $\hat{n}_{\vec{k},\lambda}$

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{n}_{\vec{k},\lambda}\,|n_{\vec{k},\lambda}\rangle &= n_{\vec{k},\lambda}\,|n_{\vec{k},\lambda}\rangle \\ n_{\vec{k},\lambda} &= 0,1,2,\dots\end{aligned}}$$

$$|n_{\vec{k},\lambda}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k},\lambda}!}}\left(a^{+}_{\vec{k},\lambda}\right)^{n_{\vec{k},\lambda}}|0\rangle$$

$|0\rangle$ حالتی است که در آن هیچ فوتونی وجود ندارد.

در حالت کلی:

$$|\dots n_{\vec{k},\lambda}\dots\rangle = \underbrace{\prod_{\vec{k}_i}\prod_{\lambda_i}}_{\text{ضرب تانسوری}}|n_{\vec{k}_i,\lambda_i}\rangle$$

$$H_{rad}|\dots n_{\vec{k},\lambda}\dots\rangle = E_{rad}|\dots n_{\vec{k},\lambda}\dots\rangle$$

$$E_{\vec{k},\lambda} = \hbar\omega_{\vec{k}}\left(n_{\vec{k},\lambda}+\tfrac{1}{2}\right) \quad \rightarrow \quad E_{rad} = \sum_{\vec{k},\,\lambda=1,2}\hbar\omega_{\vec{k}}\left(n_{\vec{k},\lambda}+\tfrac{1}{2}\right)$$

$$a_{\vec{k},\lambda}|\dots n_{\vec{k},\lambda}\dots\rangle = \sqrt{n_{\vec{k},\lambda}}\,|\dots n_{\vec{k},\lambda}-1_{\vec{k},\lambda}\dots\rangle$$

$$a^{+}_{\vec{k},\lambda}|\dots n_{\vec{k},\lambda}\dots\rangle = \sqrt{n_{\vec{k},\lambda}+1}\,|\dots n_{\vec{k},\lambda}+1_{\vec{k},\lambda}\dots\rangle$$

$$a^{+}_{k,\lambda}|0\rangle = |1_{\vec{k},\lambda}\rangle \leftarrow$$

در اینجا یک فوتون با تکانه $\vec{k}$ و با پلاریزاسیون λ خلق می شود

خلاصه:

$$H_{tot} = H_0 + H_{rad} + H_1$$

$$H_0 = \sum_i\left(\frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + V(\vec{x}_i)\right)$$ همیلتونی الکترونهای آزاد

$$H_{rad} = \sum_{\vec{k},\lambda=1,2}\hbar\omega_{\vec{k}}\left(\hat{n}_{\vec{k},\lambda}+\tfrac{1}{2}\right)$$ همیلتونی میدان الکترومغناطیسی آزاد

(در پیمانه کولنی $\varphi=0$) $$H_1 = \int d^3x\left(-\frac{e}{c}\vec{J}(\vec{x})\cdot\vec{A}(\vec{x}) + \frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2(\vec{x})\,\rho(\vec{x})\right)$$

همیلتونی برهمکنش در تصویر شرودینگر

چگالی تعداد ذرات $$\rho(\vec{x}) = \sum_i\delta(\vec{x}-\vec{x}_i) \longrightarrow \rho(\vec{x},t) = e^{iH_0t/\hbar}\rho(\vec{x})e^{-iH_0t/\hbar}$$

چگالی جریان ذرات $$\vec{J}(\vec{x}) = \sum_i\left\{\frac{\vec{p}_i}{2m_e},\delta(\vec{x}-\vec{x}_i)\right\} \rightarrow \vec{J}(\vec{x},t) = e^{iH_0t/\hbar}\vec{J}(\vec{x})e^{-iH_0t/\hbar}$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \sum_{\vec{k},\lambda}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kV}}\left(a_{\vec{k},\lambda}\vec{\epsilon}_{\vec{k},\lambda}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a^{+}_{\vec{k},\lambda}\vec{\epsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right)$$

$$\longrightarrow \vec{A}(\vec{x},t) = e^{iH_{rad}t/\hbar}\vec{A}(\vec{x})e^{-iH_{rad}t/\hbar}$$

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \sum_{\vec{k},\lambda}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kV}}\left(a_{\vec{k},\lambda}\vec{\epsilon}_{\vec{k},\lambda}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega_{\vec{k}}t} + a^{+}_{\vec{k},\lambda}\vec{\epsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}+i\omega_{\vec{k}}t}\right)$$