گسیل خودبخود (فوتون)

حالت الکترون   تعداد فوتونها

$|\text{State of electron}\rangle|\#\text{ of photons}\rangle$

- حالت ابتدائی $\quad |i\rangle = |0\rangle\,|m\rangle \quad$ Initial state

که صفر فوتون داریم = فوتون نداریم.   یک الکترون در حالت m ام است

یک الکترون در حالت $|m\rangle$ با انرژی E_m است و در این حالت هیچ فوتونی وجود ندارد.

- حالت نهائی $\quad |f\rangle = |1_{\vec{k},\lambda}\rangle\,|n\rangle \quad$ Final state

که یک فوتون تولید شده است $|n\rangle$ الکترون در حالت نهائی است

✓ در اینجا یک گذار رخ داده است و الکترون از حالت $|m\rangle$ به حالت $|n\rangle$ گذار کرده است.

✓ در نتیجه این گذار یک فوتون با تکانه $\vec{k}$ و پلاریزاسیون λ تولید شده است. ⟵ گسیل خودبخود فوتون

✓ فوتون با استفاده از عملگر $a^{+}_{\vec{k},\lambda}$ خلق شده است

$$a^{+}_{\vec{k},\lambda}\,|0\rangle = |1_{\vec{k},\lambda}\rangle$$

✓ عملگری در هامیلتونی $H = H_0 + H_{rad} + V$ که باعث این گذار می‌شود $V(t)$ است.

✓ جمله مرتبه اول در $V(t)$ را در $\vec{A}$ در نظر می‌گیریم ⟵ $V_1(t)$

$$V_1(t) = \frac{-e}{c}\int d^3x\;\vec{J}(\vec{x})\cdot\vec{A}(\vec{x},t)$$

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \sum_{\vec{k},\lambda}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kV}}\left(a_{\vec{k},\lambda}\,\vec{\epsilon}_{\vec{k},\lambda}\,e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + a^{+}_{\vec{k},\lambda}\,\vec{\epsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}\,e^{i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})}\right)$$

به این ترتیب شکل کلی $V_1(t)$ بصورت زیر است:

$$V_1(t) = \theta(t)\sum_{\vec{k},\lambda}\left(F_{\vec{k},\lambda}\,e^{-i\omega_k t} + F^{+}_{\vec{k},\lambda}\,e^{+i\omega_k t}\right)$$

with.

$$F_{\vec{k},\lambda} = -\frac{e}{c}\int d^3x\,\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kV}}\;a_{\vec{k},\lambda}\,e^{+i\vec{k}\cdot\vec{x}}\;\vec{J}(\vec{x})\cdot\vec{\epsilon}_{\vec{k},\lambda}$$

$$F^{+}_{\vec{k},\lambda} = -\frac{e}{c}\int d^3x\,\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kV}}\;a^{+}_{\vec{k},\lambda}\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\;\vec{J}(\vec{x})\cdot\vec{\epsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}$$

<u>سؤال:</u> می‌خواهیم آهنگ این گذار را پیدا کنیم.

برای پیدا کردن آهنگ گذار بر می‌گردیم به مثالی که قبلاً داشتیم:

$$V(t) = \theta(t)\left(F e^{-i\omega t} + F^{+} e^{+i\omega t}\right)$$

$$\Gamma_{m\to n} = \frac{P_{m\to n}(t)}{t}$$
$$= \frac{2\pi}{\hbar}\Big\{ \delta(E_n - E_m - \hbar\omega)\,|\langle n|F|m\rangle|^2 + \delta(E_n - E_m + \hbar\omega)\,|\langle n|F^{+}|m\rangle|^2 \Big\}$$

به این ترتیب در مقایسه با این رابطه، آهنگ گذار به ازای هر λ و $\vec{k}$ از حالت ابتدائی $|i\rangle$ به حالت نهائی $|f\rangle$ عبارت خواهد بود از:

$$\boxed{\Gamma_{i\to f;\vec{k},\lambda} = \frac{2\pi}{\hbar}\Big\{ \delta(E_n - E_m - \hbar\omega_{\vec{k}})\,|\langle f|F_{\vec{k},\lambda}|i\rangle|^2 + \delta(E_n - E_m + \hbar\omega_{\vec{k}})\,|\langle f|F^{+}_{\vec{k},\lambda}|i\rangle|^2 \Big\}} \qquad (*)$$

• $F_{\vec{k},\lambda}$ شامل عملگر فنای فوتون و $F^{+}_{\vec{k},\lambda}$ شامل عملگر خلق فوتون است. از آنجائیکه حالت ابتدائی و انتهائی مورد نظر ما به ترتیب شامل ۰ و ۱ فوتون با $\vec{k}$ و λ هستند، داریم

$$\langle f|F_{\vec{k},\lambda}|i\rangle = \langle n|\langle 1|F_{\vec{k},\lambda}|0\rangle|m\rangle = 0$$
$$\langle f|F^{+}_{\vec{k},\lambda}|i\rangle = \langle n|\langle 1|F^{+}_{\vec{k},\lambda}|0\rangle|m\rangle \neq 0 \longrightarrow ?$$

می‌توان استفاده کرد از:

$$\langle f|a^{+}_{\vec{k},\lambda}|i\rangle = \langle n|\underbrace{\langle 1_{\vec{k},\lambda}|a^{+}_{\vec{k},\lambda}|0\rangle}_{=\langle 1_{\vec{k},\lambda}|1_{\vec{k},\lambda}\rangle = 1}|m\rangle = \langle n|m\rangle$$

ولی در عبارتی که ما برای $F^{+}_{k,\lambda}$ داریم، موجودات دیگری هم کنار $a^{+}_{\vec{k},\lambda}$ نشسته‌اند! اگر فقط جمله دوم در (*) را نگاه کنیم:

$$\Gamma_{i\to f;\vec{k},\lambda} = \frac{2\pi}{\hbar}\delta(E_n - E_m + \hbar\omega_{\vec{k}})\,|\langle f|F^{+}_{\vec{k},\lambda}|i\rangle|^2 =$$
$$= \frac{2\pi}{\hbar}\left(\frac{2\pi\hbar c}{kV}\right)\frac{e^2}{c^2}\delta(E_n - E_m + \hbar\omega_{\vec{k}}) \times \left|\int d^3x\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\langle n|\vec{J}(\vec{x})\cdot\vec{\epsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}|m\rangle\right|^2$$
$$= \frac{(2\pi)^2 e^2}{kVc}\delta(E_n - E_m + \hbar\omega_{\vec{k}})\,|\langle n|\vec{J}_{\vec{k}}\cdot\vec{\epsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}|m\rangle|^2$$

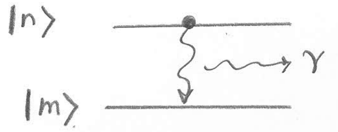
سهم جمله اول در * به $\Gamma_{i\to f}$ صفر است.

$$\vec{J}_{\vec{k}} = \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\,\vec{J}(\vec{x})\,d^3x$$

در اینجا استفاده شده از عکس تبدیل فوریه

(یادآوری اینکه $\vec{k}$ گسسته است).

• نکته: $\delta(E_n - E_m + \hbar\omega_k)$ متضمن قانون بقای انرژی است.



خلق فوتون

$$E_n = E_m - \hbar\omega_{\vec k}$$

انرژی حالت نهائی الکترون

انرژی حالت ابتدائی الکترون

توان تابشی در زاویه $d\Omega$:

$$dP_\lambda = \sum_{\vec k \in d\Omega} \hbar\omega_k \, \Gamma_{i\to f;\vec k,\lambda}$$

$$\text{توان تابشی} = \frac{\text{انرژی گذار}}{\text{زمان}} = \sum_{\vec k,\lambda} \frac{\text{احتمال گذار}}{\text{زمان}} \times \text{انرژی فوتون گسیل شده در هر گذار}$$

جمع روی همه مدهائی که در بعد فضائی $d\Omega$ در فضای k نه قرار دارند.

تعداد مدها در المان حجم d^3k در فضای k نه $= d^3k \frac{V}{(2\pi)^3} = k^2dk\, d\Omega \frac{V}{(2\pi)^3}$

$$\sum_{\vec k\in d\Omega} = d\Omega \int k^2 dk \frac{V}{(2\pi)^3}$$

انرژی گسیل شده هر فوتون $= \hbar kc = \hbar\omega_k$

$$dP_\lambda = \sum_{\vec k\in d\Omega} \hbar\omega_{\vec k}\, \Gamma_{i\to f;\vec k,\lambda} = d\Omega \int \frac{(2\pi)^2 e^2}{kc\cancel{V}} \frac{\cancel{V}}{(2\pi)^3} k^2 dk$$
$$\times\, \delta(E_n - E_m + \hbar\omega_{\vec k})\, |\langle n| \vec J_{\vec k} \cdot \vec\epsilon^{\,*}_{\vec k,\lambda} |m\rangle|^2$$
$$= d\Omega \int \frac{dk\ \hbar k^2 e^2}{(2\pi)} \delta\left(\hbar c\left(\frac{E_n - E_m}{\hbar c} + k\right)\right) |\langle n|\vec J_{\vec k}\cdot \vec\epsilon^{\,*}_{\vec k,\lambda}|m\rangle$$

$$= d\Omega \int \frac{dk\ \hbar k^2 e^2}{(2\pi)} \frac{1}{\hbar c} \delta\left(\frac{\omega_{nm}}{c} + k\right) |\langle n|\vec J_{\vec k}\cdot\vec\epsilon^{\,*}_{\vec k,\lambda}|m\rangle|^2$$

$$\boxed{dP_\lambda = d\Omega \frac{e^2}{2\pi c} \left(\frac{-\omega_{nm}}{c}\right)^2 |\langle n|\vec J_{\vec k}\cdot\vec\epsilon^{\,*}_{\vec k,\lambda}|m\rangle|^2}$$

نکته • انتگرال گیری روی k با استفاده از تابع δ متضمن بقای انرژی است (به این معنی که فوتون با هر انرژی دلخواهی گسیل نمی شود بلکه عدد موج فوتون k باید مساوی $\frac{-\omega_{nm}}{c} = \frac{-E_n+E_m}{c}$ باشد. (← اصل طلائی فرمی)

به این ترتیب :

$$(**)\quad \boxed{\frac{dP_\lambda}{d\Omega} = \frac{e^2\,\omega_{nm}^2}{2\pi c^3}\left|\langle n|\,\vec{J}_{\vec{k}}\cdot\vec{\epsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}\,|m\rangle\right|^2}$$

بسط چند قطبی $\vec{J}_{\vec{k}}$:

$$\vec{J}_{\vec{k}} = \int d^3x\,\vec{J}(\vec{x})\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \int d^3x\,\vec{J}(\vec{x})\,(1-i\,\vec{k}\cdot\vec{x}+\cdots)$$

$$= \underbrace{\int d^3x\,\vec{J}(\vec{x})}_{\text{Zero mode}} - i\int d^3x\,\vec{J}(\vec{x})\,(\vec{k}\cdot\vec{x})+\cdots$$

$$= \vec{J}_0 - i\int d^3x\,\vec{J}(\vec{x})\,(\vec{k}\cdot\vec{x})+\cdots$$

با جایگذاری این رابطه در (*) خواهیم داشت :

$$\boxed{\frac{dP_\lambda}{d\Omega} = \frac{\omega_{nm}^2 e^2}{2\pi c^3}\Big\{\left|\langle n|\vec{J}_0\cdot\vec{\epsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}|m\rangle\right| + \left|\langle n|\int d^3x\,(\vec{J}(\vec{x})\cdot\vec{\epsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda})(\vec{k}\cdot\vec{x})\,|m\rangle\right|^2+\cdots\Big\}}$$

جمله اول: $\left|\langle n|\vec{J}_0\cdot\vec{\epsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}|m\rangle\right|^2 \sim$ گذار دوقطبی الکتریکی (E1)

جمله دوم: $\left|\langle n|\int d^3x\,(\vec{J}(\vec{x})\cdot\vec{\epsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda})(\vec{k}\cdot\vec{x})|m\rangle\right|^2 \sim$ گذار دوقطبی مغناطیسی (M1)

جمله سوم: " چهار قطبی الکتریکی و غیره.

گذار دوقطبی الکتریکی (E1):

(a) محاسبه $\vec{J}_0$:

چگالی جریان ذرات

$$\vec{J}(\vec{x}) = \frac{1}{2m}\sum_i\left\{\vec{P}_i\,,\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_i)\right\}$$ داریم

$$\vec{J}_0 = \int d^3x\,\vec{J}(\vec{x}) = \frac{1}{2m}\sum_i\int d^3x\,\left\{\vec{P}_i\,,\,\delta(x-\vec{x}_i)\right\} = \frac{1}{m}\sum_i\vec{P}_i$$

انتگرال روی d^3x را می‌گیریم.

تعریف

$$\vec{P} \equiv \sum_i \vec{P}_i$$

$$\vec{J}_0 = \frac{\vec{P}}{m}$$

ازفرض برای N الکترون داریم:

مکان مرکز جرم

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i\vec{x}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m\sum_i\vec{x}_i}{N\,m} = \frac{\sum_i\vec{x}_i}{N}$$

تعریف

$$\vec{X} \equiv \sum_i\vec{x}_i \longrightarrow \vec{R} = \frac{\vec{X}}{N}$$